

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе БГУ

\_\_\_\_\_ А.Л. Толстик

(подпись)

\_\_\_\_\_

(дата утверждения)

Регистрационный № УД-\_\_\_\_\_/уч.

**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ,  
НАПРАВЛЕНИЮ СПЕЦИАЛЬНОСТИ, СПЕЦИАЛИЗАЦИИ**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по государственному экзамену для специальности  
1-31 03 01 Математика (по направлениям)**

**направления специальности  
1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность)**

Учебная программа составлена на основе ОСРБ 1-31 03 01-2008 и учебного плана специальности 1-31 03 01 Математика, направления специальности 1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность) (№ G31-100/уч.; 30.05.2012).

### **СОСТАВИТЕЛИ:**

А.Л. Гладков, зав. кафедрой математической кибернетики, доктор физ.-мат. наук, профессор;

О.И. Мельников – профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор педагогических наук, доцент;

В.Я. Степанец – доцент кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат технических наук, доцент;

В.П. Супрун – доцент кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат технических наук, доцент;

Н.И. Юрчук – профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

### **РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета (протокол №2 от 16 октября 2016 г.);

Советом механико-математического факультета (протокол №2 от 26 октября 2016 г.);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета (протокол №1 от 1 ноября 2016 г.)

Ответственный за редакцию: О.И. Мельников

Ответственный за выпуск: Д.Н. Чергинец

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

На государственном экзамене по специальности студент должен

**знать:**

- определения математических понятий, участвующих в формулировках теорем, которые он излагает;
- точные формулировки математических теорем;
- формулировки лемм и теорем, используемых при доказательствах.

**уметь:**

- применять теорию к решению задач и иллюстрировать определения математических понятий и формулировки теорем простыми примерами;
- проверять выполнимость условий теорем, применяемых при доказательствах.

Члены Государственной экзаменационной комиссии могут предлагать студенту в качестве дополнительных вопросов разбор простых примеров, определения и формулировки теорем из программы.

Вопросы, выделенные жирным шрифтом, излагаются с доказательствами.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### РАЗДЕЛ I. Алгебра.

#### Тема 1.1 Множества

Множества конечные и бесконечные, счетные и несчетные. Упорядоченные множества. Комплексные числа и их основные свойства.

#### Тема 1.2 Матрицы

Понятие матрицы. Специальные виды матриц: единичная, треугольная, нулевая, вектор-столбец, вектор-строка. Сложение матриц, умножение матрицы на число. Умножение матриц. Равенство матриц. Нормальная форма матрицы. Элементарные преобразования матриц. Определитель квадратной матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Обратная матрица. Ранг матрицы и его свойства. Теорема об определителе произведения матриц. Системы линейных алгебраических уравнений. Решение системы. **Теорема Крамера.** Метод Гаусса. **Критерии совместимости.** Общее и частное решение системы. Свободные и независимые переменные. Однородные системы. Фундаментальная система решений.

#### Тема 1.3 Алгебраические структуры

Группа, подгруппа, поле, кольцо, подкольцо. Кольцо многочленов. **Теорема о делении многочленов с остатком,** алгоритм Евклида. Наибольший общий делитель многочленов, его вычисление, критерий взаимной простоты многочленов. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители над  $R$  и над  $C$ . Корни многочлена, теорема о числе корней.

#### Тема 1.4 Векторные пространства

Линейная зависимость и независимость векторов. Размерность, базис. Ранг системы векторов. Линейные (векторные) пространства, линейная зависимость и независимость векторов. Базис, матрица перехода от одного базиса к другому. Размерность. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства. Линейные подпространства и операции с ними. **Теорема о сумме и пересечении подпространств,** дополнительные подпространства. **Теорема о дополнении системы линейно независимых векторов до базиса.**

#### Тема 1.5 Линейные операторы

Линейные операторы в линейных пространствах. Линейные операторы в конечномерных пространствах, матрица линейного оператора: матрица композиции линейных операторов. **Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора.** Собственные значения и собственные векторы линейного оператора, характеристический многочлен. **Теорема об условиях существования базиса, в котором матрица линейного оператора диагональна.** Нормальная жорданова форма матрицы. Теорема о существовании базиса, в котором матрица данного оператора имеет нормальную жорданову форму: алгоритм нахождения нормальной жордановой формы. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. **Теорема о приведении действительной квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.**

## РАЗДЕЛ II. Геометрия

### Тема 2.1 Кривые 2-го порядка

Эллипс, гипербола, парабола. **Вывод их канонические уравнения и основные свойства.** Приведение к каноническому виду фигур второго порядка на плоскости. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

### Тема 2.2 Аффинное пространство

Определение аффинного пространства. Репер (аффинная система координат в аффинных пространствах. Плоскости в аффинном пространстве их взаимное расположение. **Теорема о пересечении плоскостей.** Аффинные преобразования, геометрия аффинной группы.

### Тема 2.3 Евклидово пространство

Определение евклидова пространства, основные свойства. Ортонормированный репер. Ортогональные плоскости. **Расстояние от точки до гиперплоскости.**

## РАЗДЕЛ III. Математический анализ.

### Тема 3.1 Вещественные числа

Понятие вещественного числа. Поле вещественных чисел. Точные границы числовых множеств.

### Тема 3.2 Функции

Функции, область определения и область значений функции. График функции. Способы задания функции. Алгебраические операции с функциями, суперпозиция функций.

### Тема 3.3 Последовательности

Определение предела последовательности. **Теорема о пределе монотонной последовательности.** Число  $e$ . Предельная точка множества в  $\mathbb{R}$ . Лемма Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки. Теорема о стягивающейся последовательности отрезков.

### Тема 3.4 Производная

Определение предела функции в точке. Определение непрерывности функции в точке. Понятие непрерывной непрерывности. Определение производной и дифференциала функции одной вещественной переменной. **Теорема Ферма, Ролля, Лагранжа (о конечных приращениях).** **Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.** Формула Тейлора, остаточные члены в форме Пеано, Лагранжа, Коши.

### Тема 3.5 Первообразная

**Существование первообразной для непрерывной функции.** **Формула Ньютона-Лейбница.** Интегрирование по частям. Определение интеграла Римана. Интегрируемость непрерывной функции.

### Тема 3.6 Числовые ряды

Понятие числового ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Признаки сходимости положительных рядов. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. **Признаки Дирихле и Абеля.** Функциональные ряды и последовательности. Равномерная сходимость. Критерий Коши сходимости последовательностей.

### **Тема 3.7 Функции многих переменных**

Понятие дифференцируемости функции многих переменных. Матрица Якоби. Экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие, достаточные условия существования экстремума. Условный экстремум функций многих переменных.

### **Тема 3.8 Кратные интегралы**

Классы поточечной сходимости рядов Фурье. Лемма Римана-Лебега. Определение двойного и тройного интеграла Римана. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода. Определение поверхностных интегралов первого и второго рода. Формулы Грина, Стокса и Гаусса-Остроградского.

## **РАЗДЕЛ IV. Математическая логика и теория булевых функций**

### **Тема 4.1 Высказывания**

Алгебра высказываний. Формулы. Равносильность формул. Функции алгебры высказываний, способы задания. Проблема минимизации. Исчисление высказываний. Аксиоматика, правила вывода. Выводимость формул исчисления высказываний. Теорема дедукции. Полнота и **непротиворечивость исчисления высказываний**.

### **Тема 4.2 Предикаты**

Логика предикатов. Кванторы, коллизия переменных. Формулы, приведенные и нормальные формулы. Проблема разрешения. Исчисление предикатов. Аксиоматика, правила вывода. Выводимость формул исчисления предикатов.

### **Тема 4.3 Булевы функции**

Определение, способы задания. Задача минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных форм (ДНФ). Методы минимизации. Замыкание. Основные замкнутые классы булевых функций. Полнота системы булевых функций. Теорема Поста о функциональной полноте (**необходимость** и достаточность).

### **Тема 4.4 Логические элементы**

Понятие элементного базиса. Задача синтеза логических схем. Методы логического синтеза. Абстрактные автоматы Мили и Мура. Способы задания. Минимизация абстрактных автоматов. Частичные автоматы Мили и Мура. Задача минимизации частичных автоматов. Метод минимизации. Структурные автоматы. Синтез логических схем структурных автоматов.

## **РАЗДЕЛ V. Теория графов**

### **Тема 5.1 Определение графа**

Определение графа. Примеры графов. Способы задания графов. Лемма о рукопожатиях. Маршруты, цепи, циклы. **Критерий двудольности графа**.

### **Тема 5.2 Деревья**

**Эквивалентные определения деревьев**. Распознавание деревьев. Деревья и остовы. Матричная теорема Кирхгофа о деревьях. **Алгоритм нахождения минимального остова**.

### **Тема 5.3 Паросочетания и независимость**

Число паросочетания и число независимости. Приближенный метод нахождения наибольшего независимого множества. **Теорема Холла о паросочетаниях.**

### **Тема 5.4 Обходы графов**

Гамильтоновы графы. Эйлеровы графы. **Критерий эйлеровости.** Разбиение ребер графа на наибольшее число реберно-непересекающихся цепей.

### **Тема 5.4 Раскраска графов и планарность**

Раскраска графов. Хроматическое число и его оценки. Хроматический индекс. Теорема Визинга. Плоские и планарные графы. Теорема Понтрягина-Куратовского.

## **РАЗДЕЛ VI. Математическая кибернетика**

### **Тема 6.1 Линейное программирование**

Теорема об улучшении опорного плана при решении задач линейного программирования симплекс-методом. Теоремы об оптимальности плана. Решение задач линейного перограммирования с помощью искусственного базиса. Двойственные задачи. **Теорема двойственности.** Матричные игры. **Основная теорема матричных игр.**

### **Тема 6.2 Методы решения экстремальных комбинаторных задач**

Алгоритмы построения кратчайших цепей. **Основная теорема о потоке.** Решение задачи о назначении. Метод ветвей и границ. Решение задачи коммивояжера. Динамическое программирование. Задача о рюкзаке. Задачи теории расписаний.

## **РАЗДЕЛ VII. Теория алгоритмов**

**Тема 7.1 Принципы оценки трудоемкости комбинаторных алгоритмов**

Алгоритмы сортировки. **Теоремы о трудоемкости алгоритмов сортировки с помощью сравнений.** 2-3 дерева и реализуемые ими структуры.

### **Тема 7.2 Поиск в глубину**

**Выделение точек сочленения и двусвязных компонент.** Построение фундаментального множества циклов и множества циклов.

### **Тема 7.3 Понятие о классах $P$ и $NP$ .**

$NP$ -полные и  $NP$ -трудные задачи.

## **РАЗДЕЛ VIII. Дифференциальные уравнения**

### **Тема 8.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы**

Задача Коши и краевые задачи. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, линейные, Рикатти и в полных дифференциалах.

### **Тема 8.2 Линейные дифференциальные уравнения**

Линейное однородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений. **Метод**

**вариаций произвольных постоянных для линейных неоднородных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка.**

**Тема 8.3 Существование и единственность решения задачи Коши**

Особые точки автономных систем: узел, седло, фокус, центр. Устойчивость решений по Ляпунову, функции Ляпунова. Теорема Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

**РАЗДЕЛ IX. Математическая физика**

**Тема 9.1 Уравнения с частными производными.**

**Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Решение задачи Коши для уравнения колебаний струны методом характеристик (формулы Даламбера). Решение смешанной задачи для уравнения колебаний струны методом Фурье.**

**Тема 9.2 Основные краевые задачи**

Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Свойства гармонических функций. Теоремы единственности решений краевых задач. Поверхностный и объемный потенциалы и их свойства. Сведение краевых задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям Фредгольма.

**Тема 9.3 Принцип максимума**

Теоремы единственности решений первой краевой задачи и задачи Коши для уравнения теплопроводности. Решение смешанных задач для уравнения теплопроводности методом Фурье.

**Тема 9.4 Разностные схемы для уравнений математической физики**

Основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема Самарского-Филиппова о связи аппроксимации и устойчивости со сходимостью. Явные и неявные четырехточечные двухслойные разностные схемы, условия их устойчивости. Понятие об экономичности разностных схем.

**Тема 9.5 Аппроксимация простейших задач**

Аппроксимация простейших гиперболических, параболических и эллиптических задач. Определение порядка аппроксимации разностных схем, исследование их устойчивости.



## ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

### Алгебра

1. **Теорема Крамера.**
2. Определитель квадратной матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Обратная матрица. Ранг матрицы и его свойства.
3. Критерий обратимости квадратных матриц, нахождение обратной матрицы. Теорема об определителе произведения матриц.
4. Жорданова нормальная форма матрицы и алгоритм ее нахождения.
5. Понятие вещественного числа. Поле вещественных чисел. Точные границы числовых множеств.
6. Кольцо многочленов. **Теорема о делении многочленов с остатком, алгоритм Евклида.**
7. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители над  $R$  и над  $C$ .
8. Линейные операторы, матрица линейного оператора в данных базисах. **Теорема о существовании базиса, в котором матрица линейного оператора диагональна.**
9. Линейная зависимость и независимость векторов. Размерность, базис. Ранг системы векторов.
10. Линейные (векторные) пространства, линейная зависимость и независимость векторов. Базис, матрица перехода от одного базиса к другому. Размерность. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства.
11. Линейные операторы в линейных пространствах. Линейные операторы в конечномерных пространствах, матрица линейного оператора, матрица композиции линейных операторов.
12. **Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора**
13. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора, характеристический многочлен.
14. **Теорема о приведении действительной квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.**
15. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

### Геометрия

16. Кривые 2-го порядка эллипс, гипербола, парабола. **Вывод их канонических уравнений и их основные свойства.**
17. Плоскости в аффинном пространстве, их взаимное расположение.
18. Определение евклидова пространства, основные свойства. Ортонормированный репер. Ортогональные плоскости.
19. **Расстояние от точки до гиперплоскости в евклидовом пространстве.**

## Математический анализ

20. Предельная точка множества в  $R$ . Лемма Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки.
21. Теорема о стягивающей последовательности отрезков.
22. Понятие предела функции в точке. Определение непрерывности функции в точке. **Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.**
23. **Теорема о пределе монотонной последовательности. Число  $e$ .**
24. Дифференцируемость функций одной переменной. **Теорема Ферма, Ролля.**
25. Формула Тейлора, остаточные члены в форме Пеано, Лагранжа, Коши.
26. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. **Признаки Дирихле и Абеля.**
27. Функциональные ряды и последовательности. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.
28. Понятие дифференцируемости функции многих переменных. Матрица Якоби.
29. Экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие, достаточные условия существования экстремума. Условный экстремум функций многих переменных.
30. **Существование первообразной для непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.** Интегрирование по частям и замена переменных в интеграле.
31. Определение интеграла Римана. Интегрируемость непрерывной функции.
32. Определение поверхностных интегралов первого и второго рода.
33. Криволинейные интегралы и их свойства. Формула Грина.

## Математическая логика и теория булевых функций

34. Булевы функции. Задание БФ нормальными формами.
35. Замыкание. Основные замкнутые классы булевых функций.
36. Полнота системы булевых функций. Критерий функциональной полноты (теорема Поста).
37. Задача минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных форм (ДНФ). Методы минимизации.
38. Теорема дедукции. Полнота и **непротиворечивость исчисления высказываний.**
39. Предикаты. Логика предикатов. Кванторы. Приведенные и нормальные формулы. Проблема разрешения.
40. Абстрактные автоматы Мили, Мура. Минимизация абстрактных автоматов.

## Теория графов

41. Плоские и планарные графы. Теорема Понтрягина-Куратовского.

42. Графы. Способы задания графов. Двудольные графы. **Критерий двудольности.**
43. Деревья и остовы. **Эквивалентные определения дерева.** Алгоритм нахождения минимального остова Матричная теорема Кирхгофа о деревьях.
44. Обходы графов. Гамильтоновы графы. Эйлеровы графы. **Критерий эйлеровости.**
45. Раскраска графов. Хроматическое число и его оценки. Хроматический индекс. Теорема Визинга.
46. **Теорема Холла о паросочетаниях.**

### Математическая кибернетика

47. Теорема об улучшении опорного плана при решении задач линейного программирования симплекс-методом.
48. Двойственные задачи линейного программирования. **Теорема двойственности.**
49. Задача о назначении и алгоритм ее решения.
50. Метод ветвей и границ. Решение задачи коммивояжера.
51. Динамическое программирование. Задача о рюкзаке.

### Теория алгоритмов.

52. Алгоритмы сортировки. **Теоремы о трудоемкости алгоритмов сортировки с помощью сравнений.**
53. 2-3-деревья и реализуемые ими структуры.
54. Поиск в глубину. **Выделение точек сочленения и двусвязных компонент.**

### Дифференциальные уравнения

55. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы. Задача Коши и краевые задачи.
56. Линейное однородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

### Математическая физика

57. Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.
58. **Классификация уравнений в частных производных 2-го порядка, линейных относительно старших производных.**
59. Аппроксимация простейших гиперболических, параболических и эллиптических задач.
60. Свойства гармонических функций.
61. Теоремы о единственности решений краевых задач для уравнения Пуассона.

62. **Решение задачи Коши для уравнения колебаний струны методом характеристик (формула Даламбера).**
63. Решение смешанных задач для уравнения теплопроводности методом Фурье.
64. Теорема Самарского-Филиппова о связи аппроксимации и устойчивости со сходимостью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зорич В.А. Математический анализ. - М., Наука, Т.1 - 1981, Т.2 - 1984.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. - М., Наука, Т.1,2 - 1983 и др. издания.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. - М., Высшая школа, Т.1,2 - 1981 и др. издания.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М., Наука - 1969 и др. издания.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М., Наука - 1977 и др. издания.
6. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Высшая школа, 1991.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Вышэйшая школа, 1974.
8. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
9. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: Вища шк., 1979.
10. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - М.: Наука, 1984.
11. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1988.
12. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1987
13. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. -М.: Наука, 1999.
14. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. – М.:Либроком, 2009.
15. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979.
16. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.
17. Черняк А. А., Новиков В. А., Мельников О. И., Кузнецов А. В. Математика для экономистов на базе Matcad. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2003.
18. Черняк А. А., Черняк Ж. А., Метельский Ю. М. Математическое программирование. Алгоритмический подход. Минск: Вышэйшая школа, 2007
19. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1982.
20. Михлин С.Г. Курс математической физики. М., 1968.
21. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1977.
22. Сборник задач по уравнениям математической физики (под. редакцией Владимиров В.С.). М., 1982.