

Задача 1 [3+2=5 баллов]. 10 студентов решили образовать из своего состава спортивные команды при следующих условиях: 1) каждый из 10 может записаться в любое число команд; 2) ни одна команда не должна целиком содержаться в другой команде или полностью совпадать с ней. Чему равно максимально возможное число команд M и какое число игроков N такие команды содержат?

Задача 2 [5 баллов]. Решите уравнение $\lim_{n \rightarrow \infty} \left((1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdot \dots \cdot (1+x^{2^n}) \right) = 2012$.

Задача 3 [4 балла]. Пусть A и B – матрицы размера $n \times n$, E – единичная матрица размера $n \times n$. Существует ли обратная матрица к матрице $E-BA$, если определитель $\det(E-AB)$ отличен от нуля.

Задача 4 [4 балла]. В колонию бактерий попадает вирус. В первую секунду он уничтожает одну бактерию и делится пополам, а оставшиеся бактерии тоже делятся пополам. За вторую секунду два вируса уничтожают две бактерии и делятся пополам (всего получается четыре вируса), оставшиеся бактерии тоже делятся пополам, и так далее. Вымрет ли колония бактерий?

Задача 5 [5+2=7 баллов]. Опытный менеджер предлагает транспортной компании доставить туристов из города A в город B (расстояние $|AB|=1000$ миль) на следующих условиях: 1) менеджер делает предоплату \$1500 тыс.; 2) транспортная компания возвращает менеджеру \$9 тыс. за каждый час пребывания туристов в пути. Транспортное средство перевозит туристов с постоянной скоростью V миль/ч. По счастливому прибытию транспортная компания выплачивает команде транспорта премию в размере \$10 V тыс. Определите: а) скорость V , при которой транспортная компания получит максимальную прибыль; б) объем максимальной прибыли.

Задача 6 [6 баллов]. Исследуйте на экстремум функцию $f(x) = \begin{cases} 2 - |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Задача 7 [5 баллов]. Андрей и Борис по очереди ломают палку. Андрей начинает первым и ломает ее на две части, затем Борис ломает любую из двух частей на две части, затем Андрей – любую из трех частей на две части, и т. д. Андрей выигрывает, если сможет после какого-то из своих ходов сложить из шести кусков два равных треугольника. Может ли Борис ему помешать?

Задача 8 [4 балла]. Определите объем тела, полученного вращением круга радиуса R вокруг не пересекающей его координатной оси.

Задача 9 [5 баллов]. Найдите геометрическое место точек, которые являются основаниями перпендикуляров, опущенных из вершин парабол $y = -4ax^2$ на касательные к этой параболе.

Задача 10 [3 балла]. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$.

Математическая олимпиада (МОН-2012)
для студентов факультетов нематематического профиля БГУ

Ф. И. О. _____
 Факультет _____ специальность _____ курс _____ группа _____

Балл

Номер задачи	Ответ на задачу	Балл
Задача 1 (максимальный балл=5)	Ответ:	
Задача 2 (максимальный балл=5)	Ответ:	
Задача 3 (максимальный балл=4)	Ответ:	
Задача 4 (максимальный балл=4)	Ответ:	
Задача 5 (максимальный балл=7)	Ответ:	
Задача 6 (максимальный балл=6)	Ответ:	
Задача 7 (максимальный балл=5)	Ответ:	
Задача 8 (максимальный балл=4)	Ответ:	
Задача 9 (максимальный балл=5)	Ответ:	
Задача 10 (максимальный балл=3)	Ответ:	