Решения «МОН-2016»
IX олимпиада по математике
среди студентов нематематических специальностей БГУ
12 апреля 2016 г.

Решение задачи 1.
Применим метод математической индукции.

1. По условию $x+\dfrac{1}{x}$ – целое число $(x \neq 0)$.
2. Предположим, что $x^k+\dfrac{1}{x^k}$ – целое число для любого натурального k.
3. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^k+\dfrac{1}{x^k}\right)$ – целое число согласно п. 1 и п. 2.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)=\left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right)+\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right) \qquad (*)$$

$\left(x^{k-1}+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$ – целое число по индуктивному предположению, следовательно, в формуле (*) слагаемое $\left(x^{k+1}+\dfrac{1}{x^{k+1}}\right)$ – также целое число, для любого натурального k.

При $-k<0$ из (*) получаем, что $\left(x^{k+1}+\dfrac{1}{x^{k+1}}\right)$ – целое число.

При $n=0$ число $x^n+\dfrac{1}{x^n}=2$ – целое.

Ответ: при $n \in \mathbb{Z}$ число $x^n+\dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Решение задачи 2.
Построим отношение приращения функции f к приращению аргумента в точке $x=0$:

$$\left|\frac{f(g(\Delta x))-f(g(0))}{\Delta x}\right|=\left|\frac{f\left((\Delta x)^2\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right)-f(0)}{\Delta x}\right|=$$

$$=\left|\frac{f\left((\Delta x)^2\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right)-f(0)}{(\Delta x)^2\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}\right|\cdot\left|(\Delta x)\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right|=L, \quad \Delta x \neq 0.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} L \le Const\cdot(\Delta x)\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right).$$

Следовательно, существует $\left.\dfrac{df(g(x))}{dx}\right|_{x=0}=0$.

Ответ: значение производной $\left.\dfrac{df(g(x))}{dx}\right|_{x=0}=0$.

Решение задачи 3.

а) Обозначим на плане местности через F_1 и F_2 точки размещения станций A и B, через $M=M(x;y)$ – произвольный пункт грузоотправителя. Введем декартову прямоугольную систему координат Oxy: оси Ox принадлежат точки F_1 и F_2, ось Oy проходит через середину отрезка F_1F_2 (см. рис. 1). Пусть стоимость за 1 км провоза груза равна p руб. при использовании автотранспорта и q руб. – при использовании железной дороги.

Тогда $p\cdot|F_1M|+q\cdot|F_1F_2|+q\cdot|F_2C|$ – суммарные транспортные расходы на перевозку груза из M в C при использовании станции A, а $p\cdot|F_1M|+q\cdot|F_2C|$ – из M в C при использовании в качестве промежуточной станции B. Равенство

$$p\cdot|F_1M|+q\cdot|F_1F_2|+q\cdot|F_2C| = p\cdot|F_2M|+q\cdot|F_2C| \qquad (*)$$

означает, что суммарные транспортные расходы при использовании станций A и B равны. (*) равносильно равенству $-|F_1M|+|F_2C| = \dfrac{q}{p}\cdot|F_1F_2|$. Полагая в полученном равенстве $2a=\dfrac{q}{p}\cdot|F_1F_2|$, получим уравнение $-|F_1M|+|F_2C| = 2a$ левой ветви гиперболы, фокус F_1 которой находится в точке расположения станции A на плане местности.

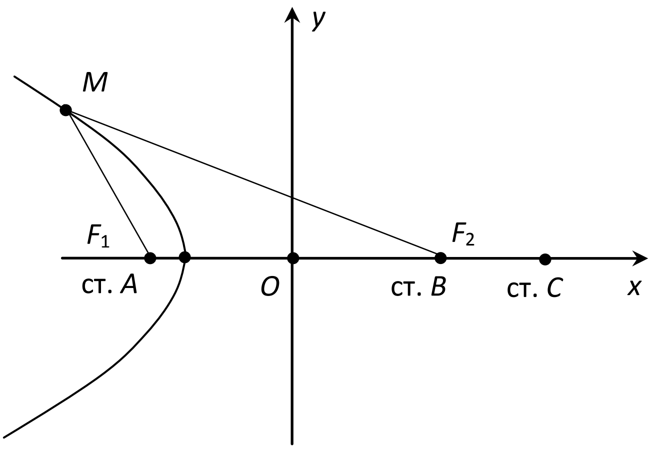

Рис. 1.

б) При перевозке грузов из M в C использование станции A более выгодно, чем B, если транспортные расходы удовлетворяют неравенству

$$p\cdot|F_1M|+q\cdot|F_1F_2|+q\cdot|F_2C| < p\cdot|F_2M|+q\cdot|F_2C|,$$

которое равносильно неравенству $-|F_1M|+|F_2C| > 2a$. Выбрав, например, точку O – начало координат, получим что $0 = |F_1O|+|F_2O| < 2a$. Следовательно, указанное неравенство описывает ту часть плоскости, которой не принадлежит начало координат, т. е. выпуклую область, ограниченную ветвью гиперболы с F_1 и F_2.

Ответ: а) суммарные транспортные расходы равны при использовании станций A и B, если пункты грузоотправителей на плане местности расположены в точках левой ветви гиперболы (см. рис. 1); б) использование станции A более выгодно при доставке грузов из M в C для грузоотправителей, пункты которых на плане местности расположены в точках, принадлежащих выпуклой области, ограниченной ветвью гиперболы с фокусами F_1 и F_2.

В случае $p=q$ левая ветвь гиперболы вырождается в луч и для ответа достаточно воспользоваться неравенством треугольника.

Решение задачи 4.

$$\begin{cases}[\vec{a},\vec{x}]+[\vec{b},\vec{y}]=\vec{c}, & (1)\\ [\vec{b},\vec{x}]-[\vec{a},\vec{y}]=\vec{d}, & (2)\end{cases}$$

Умножим (1) скалярно на $\vec{a}$, умножим (2) скалярно на $\vec{b}$, и вычтем из полученного первого уравнения полученное второе: $\vec{a},\vec{c}\ \ -(\vec{b},\vec{d}) =< \vec{a}\vec{b}\vec{y} > + < \vec{b}\vec{a}\vec{y} >= 0$.

Умножим (1) скалярно на $\vec{b}$, умножим (2) скалярно на $\vec{a}$, сложим полученные пер уравнения: $(\vec{b},\vec{c})+(\vec{a},\vec{d})=<\vec{b}\vec{a}\vec{x}>+<\vec{a}\vec{b}\vec{x}>=0.$ Условия $\begin{cases} \vec{a},\vec{c}\ \ -(\vec{b},\vec{d})=0, \\ (\vec{b},\vec{c})+(\vec{a},\vec{d})=0, \end{cases}$

являются необходимыми условиями совместности исходной системы. (Они же являются и достаточными). Обозначим

$$\lambda_1\ \ \vec{a}^2+\vec{b}^2\ \ =(\vec{a},\vec{x})-(\vec{b},\vec{y}),\quad \lambda_2\ \ \vec{a}^2+\vec{b}^2\ \ =(\vec{b},\vec{x})+(\vec{a},\vec{y})$$

Ответ: $\vec{x}=-\dfrac{[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{d}]}{\vec{a}^2+\vec{b}^2}+\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b},\quad \vec{y}=\dfrac{[\vec{a},\vec{d}]+[\vec{b},\vec{c}]}{\vec{a}^2+\vec{b}^2}+\lambda_2\vec{a}-\lambda_1\vec{b}$, где λ_1, λ_2 – произвольные постоянные.

Решение задачи 5.

а) Пусть событие А = {наугад выбранный нарушитель страдает дальтонизмом}. При этом возможны следующие гипотезы:

H_1 = {выбранный нарушитель является мужчиной};

H_2 = {выбранный нарушитель является женщиной}.

По условию задачи гипотезы равновозможны, поэтому $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$.

Даны условные вероятности события А: $P_{H_1}(A) = 0,05$, $P_{H_2}(A) = 0,0025$.

H_1 и H_2 образуют полную группу событий. По формуле полной вероятности вычисляем вероятность того, что наугад выбранный нарушитель страдает дальтонизмом:

$$P(\mathrm{A})=\sum_{k=1}^{2}P(\mathrm{H}_k)P_{H_k}(\mathrm{A})=P\ \ \mathrm{H}_1\ \ P_{H_1}\ \ \mathrm{A}\ \ +P\ \ \mathrm{H}_2\ \ P_{H_2}\ \ \mathrm{A}\ \ =$$

$$=0,5\cdot 0,05+0,5\cdot\ \ 0,0025\ \ =0,02625=\frac{21}{800}.$$

б) Условная вероятность произошедшего события А при осуществлении данной гипотезы H_1 вычисляем по формуле Байеса:

$$P_A\ \ \mathrm{H}_1\ \ =\frac{P\ \ \mathrm{H}_1\ \ P_{\mathrm{H}_1}\ \ \mathrm{A}}{P\ \ \mathrm{A}}=\frac{0,5\cdot 0,05}{0,02625}=\frac{20}{21}.$$

Ответ: а) $P\ \ \mathrm{A}\ \ =\dfrac{21}{800}$; б) $P_A\ \ \mathrm{H}_1\ \ =\dfrac{20}{21}$.

Определите количество действительных нулей функции:

$$f(x)=2e^{2-x^2}\cdot(x^6-3x^4+5x^2-1)-2e-5.$$

Решение задачи 6.

Обозначим $y=x^2\geq 0$, тогда $g(y)=2e^{2-y}\cdot(y^3-3y^2+5y-1)-2e-5.$

Исследуем функцию $g(y)$, $D(g)=(-\infty;+\infty)$, на экстремум:

y	[0; 1)	1	(1; 2)	2	(2; 3)	3	$(3;+\infty)$
g'	+	**0**	–	**0**	+	**0**	–
g	↑	max	↓	min	↑	max	↓

$D(g')=(-\infty;+\infty)$.

Функция g имеет два нуля

Функция f имеет 4 нуля.

Ответ: 4 нуля.