ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
«АБИТУРИЕНТ ММФ 2017»

15 апреля 2017 г.

Задача 1

На отрицательной ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$ поставлена точка А, а на положительной ветви этой гиперболы – точки В и С. ΔACB– прямоугольный, начало координат O(0; 0) принадлежит катету AC. Найдите длину гипотенузы AB, если площадь ΔACB равна $8\sqrt{3}$.

Задача 2

Найдите все натуральные n и k, при которых число $A = \frac{(nk)!}{(n!)^k k!}$ является целым.

Задача 3

Решите неравенство

$$\operatorname{tg}(x) + \operatorname{ctg}(x) \le a,$$

где a – действительный параметр.

Задача 4

Найдите все натуральные числа удовлетворяющие уравнению:

$$n + s(n) = 2017,$$

где $s(n)$ – сумма цифр числа

Задача 5

Человек идет по шпалам железной дороги. Максимальная длина его шага равна 0,8 м. Шпалы уложены по 200 штук на любом стометровом участке. Допустимо изменение расстояния d между шпалами в пределах: $0,3 \le d \le 0,6$. Определить укладку шпал, при которой человек сделает: 1) максимальное число шагов на 1 км пути; 2) минимальное число шагов на 1 км пути.

Задача 6

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 7 + \sqrt{x + y^2 - 7}} = x, \\ \sqrt{x^2 + 2 + \sqrt{y + x^2 + 2}} = y. \end{cases}$$

~~~~~~

* Решение задач следует сдавать на отдельных листах с указанием номера задачи.

**При выполнении заданий олимпиады запрещено пользоваться калькуляторами и всеми другими электронными устройствами.
~~~~~~