Лабораторная работа №7. Обобщенные результанты.

Срок выполнения лабораторной работы: 14 дней. Отчет предоставляется преподавателю в электронном виде.

Задание. Для системы нелинейных колебаний $\dot{x} = y\,(1 + d\,x + p\,x^2),\ \dot{y} = -x + a\,x^2 + k\,x^3 + m\,x\,y^2$ найти условия, при которых центр O(0,0) является изохронным.

Указания. Решение этой задачи аналогично заданию из Лабораторной работы 6, но есть некоторые отличия. Здесь необходимо:

1) показать, что особая точка O(0,0) является центром, т.е. все фокусные величины ***изначально*** равны нулю;

2) вычислить изохронные величины, составить из них систему уравнений и найти решение этой системы.

(Алгоритм для вычисления фокусных и изохронных величин прилагается к заданию - файл "algorithm". Система имеет 5 параметров - a, d, k, m, p, и в данном случае для решения системы достаточно 5 изохронных величин. Все данные уже занесены в алгоритм, поэтому можно сразу воспользоваться командой "Evaluate Notebook".)

Решение системы состоит из нескольких этапов, поскольку исключать переменные нужно последовательно (порядок исключения: p, m, k, d, a). Изучите внимательно предложенный ниже алгоритм и реализуйте его в Математике.

1) из 1-й изохронной величины выразите переменную p и подставьте ее в остальные;

2) из полученных полиномов с помощью результантов исключите переменную m - возьмите попарно вторую величину с третьей, вторую с четвертой и вторую с пятой (имеются в виду преобразованные, а не первоначальные величины);

3) у полученных полиномов найдите НОД - если это полином или произведение полиномов, то нужно будет рассмотреть эти случаи, потому что они дают условия изохронности центра (аналогичным образом все происходило в Лабораторной работе 6). Если же НОД - число, то для полученных трех полиномов вычислите обобщенные результанты. Их отличие состоит в том, что для нахождения обычного результанта нужно брать два полинома, а для нахождения обобщенных можно взять несколько полиномов - три, четыре или даже больше (в

зависимости от ситуации).Точнее говоря, в качестве первого параметра функции Resultant указывается один из полиномов (чаще всего имеющий наименьшую длину и наименьшие среди всех степени по переменным), а в качестве второго - линейная комбинация остальных полиномов с произвольными коэффициентами $(\sum s_i f_i)$. Третий параметр - исключаемая переменная (в нашем случае это k);

4) вычисленный полином содержит оставшиеся переменные системы и коэффициенты s_i. Этот полином должен быть равен нулю ***при любых*** значениях s_i, поэтому следующим шагом будет выборка коэффициентов при всех s_i и приравнивание их к нулю (эти коэффициенты и есть обобщенные результанты). Получившиеся на данном этапе полиномы будут иметь только две переменные - a и d, поэтому здесь снова находим НОД и раскладываем его на множители;

5) переходим к непосредственному получению условий центра для нашей системы.Здесь можно подключить базисы Грёбнера - брать поочередно каждый множитель из НОД и добавлять его в идеал фокусных величин (случай с разными множителями можно не рассматривать, т.к. он даст лишь тривиальное решение). В каждом случае базис будет распадаться на несколько идеалов - получить их можно, выбирая наиболее простые элементы из базиса и действуя так же, как в Лабораторной работе 5;

6) все полученные случаи центра обязательно нужно проверить на подмножества и убрать лишние;

7) вывести окончательный результат - условия изохронности центра для заданной системы.

Примечание. Полученные идеалы лучше всего записывать так, чтобы каждый их элемент начинался не с "минуса", а с "плюса" - это позволит убрать лишние идеалы при составлении набора решений и избежать потерь при выявлении подмножеств. Например, идеалы {2a+3c, **a-d**, $\boldsymbol{-a^2+2k}$, m, $3a^2-2l$} и {2a+3c, **-a+d**, $\boldsymbol{a^2-2k}$, m, $3a^2-2l$} абсолютно идентичны и отличаются лишь знаками своих элементов. Фактически они представляют один и тот же идеал, поэтому один из них является лишним, но при объединении он не пропадет, а при делении их друг на друга в остатках получатся нули, и при удалении их из набора решений некоторой системы вышла бы ошибка.