ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ «АБИТУРИЕНТ ММФ 2017»

Условия задач 1-го (заочного) тура

Задача 1. На одной стороне угла с вершиной O, величина которого меньше 180^0, расположены последовательно, считая от вершины, точки A, B, C так, что $OA:AB:BC = 1:2:3$. На другой стороне угла последовательно расположены точки A_1, B_1, C_1 так, что $OA_1:A_1B_1:B_1C_1 = 3:3:2$. Исследуйте: могут ли прямые AA_1, BB_1, CC_1 иметь общую точку.

Задача 2. При каких значениях параметра a система уравнений:

$$\begin{cases} 3y - a\sqrt{x^2+1} = 1, \\ x + y + \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = a^2, \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Задача 3. Найдите количество всех корней уравнения:

$x \cdot 10^{-1000} = \{x^{10}\}$, где $\{s\}$ – дробная часть числа s.

Задача 4. Решите уравнение: $\sin^{2017}(5x) + \cos^{2017}(5x) = 1$.

Задача 5. В девятиугольной пирамиде боковые ребра и диагонали основания окрашены в красный и синий цвет. Докажите, что среди этих отрезков можно указать три отрезка, которые образуют треугольник и окрашены в один цвет.

Задача 6. Сравните число способов появления 10 очков при трехкратном бросании игрального кубика с коэффициентом при x^{10} в многочлене $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$.