БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории функций

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
для студентов механико-математического факультета

МИНСК
БГУ
2011

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент выполняет индивидуальные задания в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради студент указывает свою фамилию, имя, номер учебной группы и вариант индивидуального задания.

Решения задач следует излагать в порядке номеров, указанных в задании.

Решения задач излагать подробно и аккуратно, выполняя все необходимые теоретические обоснования.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 1 «ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ»

Образец оформления решения

1. Решить неравенство

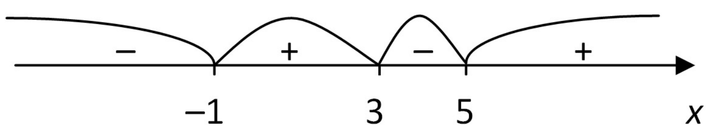
$$\left|\frac{x^2-2x-3}{x-5}\right|+x\geqslant 3.$$

Решение. Модуль, входящий в неравенство, раскрывается по-разному в зависимости от знака выражения, стоящего под модулем. Поэтому исходное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left|\frac{x^2-2x-3}{x-5}\right|+x\geqslant 3 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} \frac{x^2-2x-3}{x-5}\geqslant 0, & (1)\\ \frac{x^2-2x-3}{x-5}+x\geqslant 3, & (2)\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{ll} \frac{x^2-2x-3}{x-5}< 0, & (3)\\ -\frac{x^2-2x-3}{x-5}+x\geqslant 3. & (4)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Найдем решение каждого из неравенств (1)–(4) методом интервалов.

Рассмотрим дробь $\frac{x^2-2x-3}{x-5}=\frac{(x+1)(x-3)}{x-5}$ и нанесем на числовую прямую нули числителя ($x=-1$, $x=3$) и знаменателя ($x=5$):



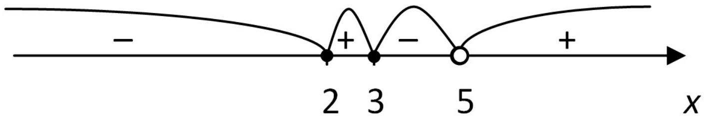
Отсюда находим решение неравенства (1): $x\in[-1;3]\cup(5;+\infty)$и решение неравенства (3): $x\in(-\infty;-1)\cup(3;5)$.

В неравенстве (2) перенесем тройку в левую часть и приведем все к общему знаменателю. Получим:

$$\frac{x^2-2x-3}{x-5}+x-3\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2-2x-3+(x-3)(x-5)}{x-5}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{2x^2-10x+12}{x-5}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2(x-2)(x-3)}{x-5}\geqslant 0.$$

Нанесем на числовую прямую нули числителя ($x=2$, $x=3$) и знаменателя ($x=5$). Находим решение неравенства (2): $x\in[2;3]\cup(5;+\infty)$.

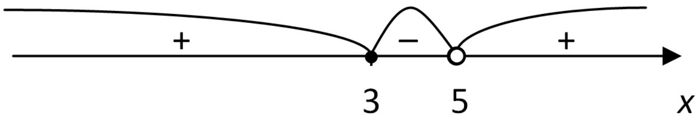


В неравенстве (4) также перенесем тройку в левую часть и приведем все к общему знаменателю. Получим:

$$-\frac{x^2-2x-3}{x-5}+x-3 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+2x+3+(x-3)(x-5)}{x-5} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-6x+18}{x-5} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-6(x-3)}{x-5} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-3}{x-5} \leqslant 0.$$

Нанесем на числовую прямую нули числителя ($x = 3$) и знаменателя ($x = 5$):



Находим решение неравенства (4): $x \in [3;5)$.

Таким образом,

$$\left|\frac{x^2-2x-3}{x-5}\right| + x \geqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in [-1;3] \cup (5;+\infty), \\ x \in [2;3] \cup (5;+\infty), \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \in (-\infty;-1) \cup (3;5), \\ x \in [3;5). \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \in [2;3] \cup (5;+\infty) \\ x \in (3;5) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2;5) \cup (5;+\infty).$$

Ответ: $[2;5) \cup (5;+\infty)$.

2. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\log_{x+3} \frac{2x+5}{x+1}}.$$

Решение. Область определения функции f ограничена входящими в ее аналитическое выражение дробью, логарифмом и квадратным корнем.

Для существования дроби необходимо, чтобы ее знаменатель был отличен от нуля: $x \neq -1$.

Для существования логарифма необходимо, чтобы его основание было положительным и отличным от единицы: $x+3 > 0$, $x+3 \neq 1$. Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным: $\frac{2x+5}{x+1} > 0$.

Для существования квадратного корня необходимо, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным. Если основание логарифма меньше 1, то он принимает неотрицательные значения на промежутке $(0;1]$. Если же основание логарифма больше 1, то он принимает неотрицательные значения на промежутке $[1;+\infty)$:

$$\log_{x+3}\frac{2x+5}{x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x+3 < 1, \\ 0 < \frac{2x+5}{x+1} \leq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 > 1, \\ \frac{2x+5}{x+1} \geqslant 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая полученные неравенства методом интервалов, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-3;-2), \\ \frac{2x+5}{x+1} > 0, \\ \frac{2x+5}{x+1} - 1 \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2;+\infty), \\ \frac{2x+5}{x+1} - 1 \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-3;-2), \\ \frac{2x+5}{x+1} > 0, \\ \frac{x+4}{x+1} \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2;+\infty), \\ \frac{x+4}{x+1} \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-3;-2), \\ x \in (-\infty;-2,5) \cup (-1;+\infty), \\ x \in [-4;-1), \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2;+\infty), \\ x \in (-\infty;-4] \cup (-1;+\infty). \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-3;-2,5) \\ x \in (-1;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in (-3;-2,5) \cup (-1;+\infty).$$

Ответ. $(-3;-2,5) \cup (-1;+\infty)$.

3. Найти точную верхнюю грань множества A, а также указать наибольший элемент (в случае его существования):

$$A = \left\{ (-1)^n \left(7 - \frac{1}{3n}\right) \middle| \, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Решение. Выпишем для наглядности несколько элементов множества A:

$$A = \left\{ -6\frac{2}{3},\ 6\frac{5}{6},\ -6\frac{8}{9},\ 6\frac{11}{12},\ -6\frac{14}{15},\ 6\frac{17}{18},\ \ldots \right\}.$$

Можно сделать предположение, что $\sup A = 7$. Докажем это.

1) $\forall n \in \mathbb{N}:\ (-1)^n \left(7 - \frac{1}{3n}\right) \leqslant \left(7 - \frac{1}{3n}\right) < 7$,
т.е. 7 – верхняя граница множества A.

2) Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и докажем, что существует элемент множества A, больший, чем $7-\varepsilon$. Это должен быть положительный элемент, т.е. получающийся при четном n. Пусть $n = 2k$.

$$(-1)^{2k}\left(7-\frac{1}{6k}\right) = 7-\frac{1}{6k} > 7-\varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{6k} > -\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 6k > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad k > \frac{1}{6\varepsilon}.$$

Последнее неравенство выполняется, например, для натурального числа $k = \left[\frac{1}{6\varepsilon}\right] + 1$. Таким образом,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : a = (-1)^{2k}\left(7-\frac{1}{6k}\right), \; k = \left[\frac{1}{6\varepsilon}\right] + 1 \quad \Bigg| \quad a > 7-\varepsilon.$$

Тем самым доказано, что $\sup A = 7$.

Докажем, что множество A не имеет максимального элемента. От противного: пусть существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\max A = (-1)^m\left(7-\frac{1}{3m}\right)$. Так как во множестве A есть положительные элементы, то и максимальный должен быть положительным. Следовательно, m четно, т.е. $m = 2k$:

$$\max A = 7-\frac{1}{6k}.$$

Рассмотрим теперь элемент множества A, получающийся при $n = 2k+2$:

$$(-1)^{2k+2}\left(7-\frac{1}{3(2k+2)}\right) = 7-\frac{1}{6k+6} > 7-\frac{1}{6k} = \max A.$$

Т.е. во множестве A нашелся элемент больший, чем максимальный – противоречие.

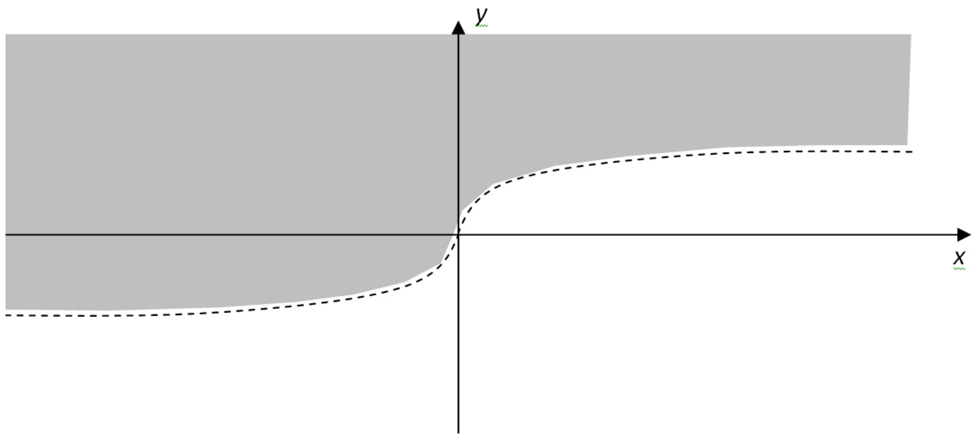
Ответ: $\sup A = 7$; $\nexists \max A$.

4. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность множеств A и B (привести геометрическое решение):

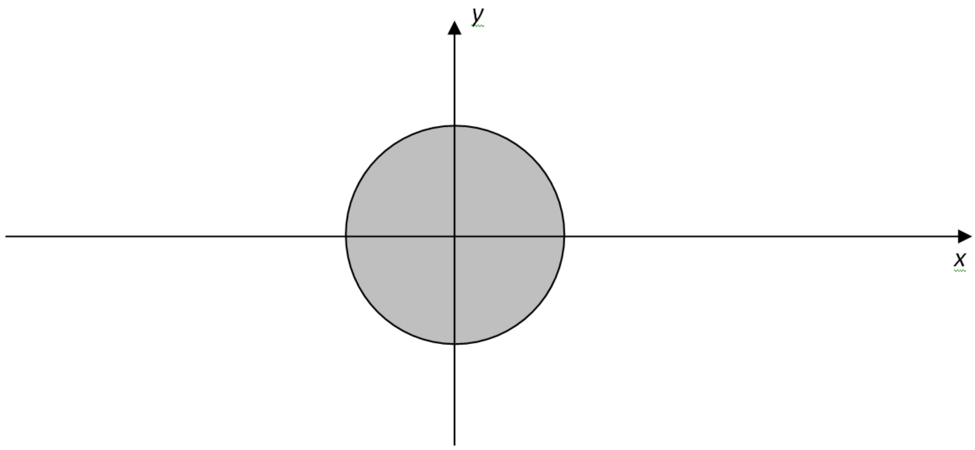
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \operatorname{arctg} x - y < 0\right\}; \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leqslant 4\right\}.$$

Решение.

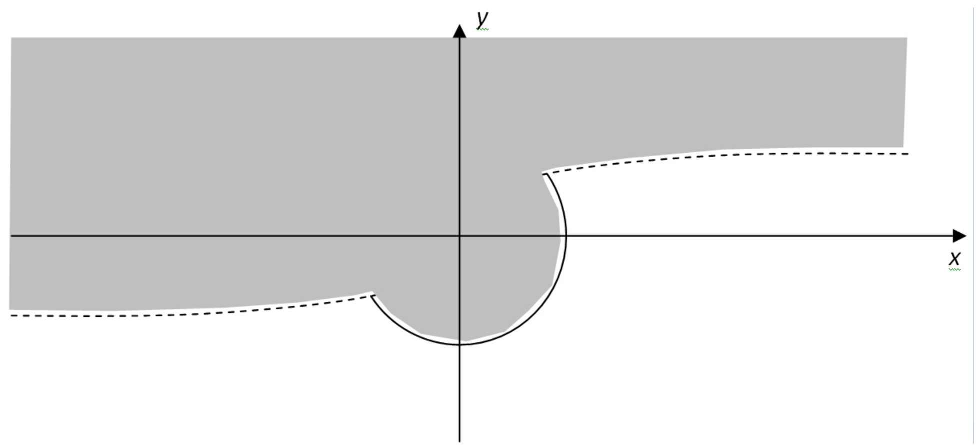
A – это множество точек плоскости, лежащих выше графика функции $y = \operatorname{arctg} x$ (не включая точек графика):



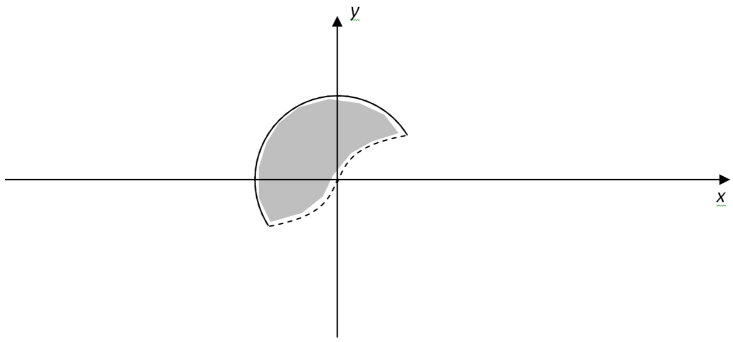
B – это множество точек плоскости, ограниченных окружностью радиуса 2 с центром в начале координат (включая точки окружности):



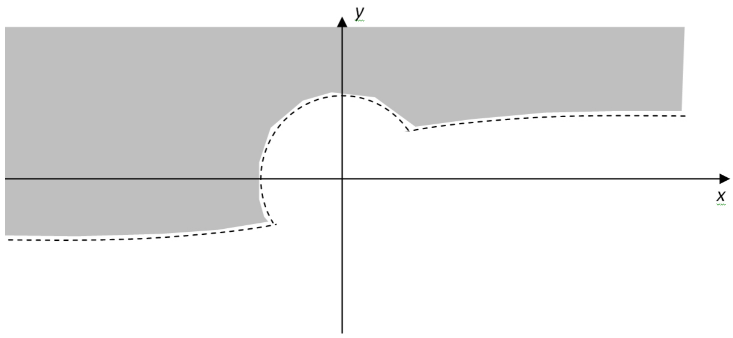
Объединение множеств $A \cup B$:



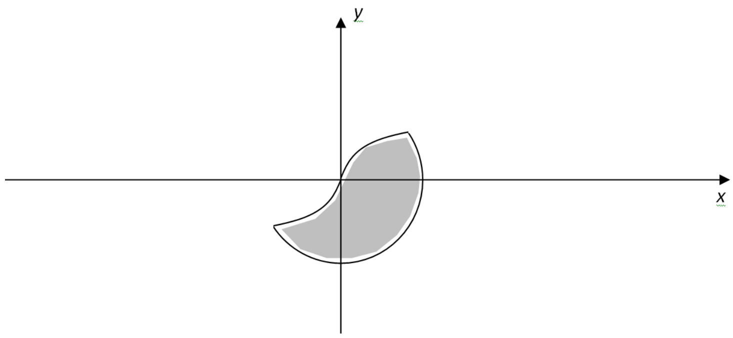
Пересечение множеств $A \cap B$:



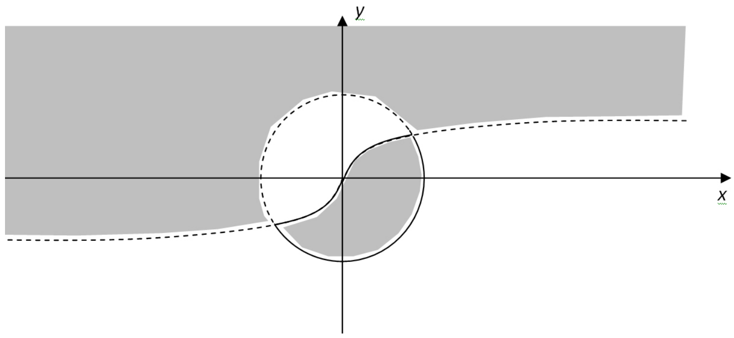
Разность $A \setminus B$:



Разность $B \setminus A$:



Симметрическая разность $A \Delta B$:



5. Пусть A, B и C – произвольные множества, такие, что $A \subset C$ и $B \subset C$. Доказать равенство:

$$(C \setminus A)\Delta(C \setminus B) = A\Delta B.$$

Доказательство.

Возьмем произвольный элемент $x \in (C \setminus A)\Delta(C \setminus B)$. По определению симметрической разности,

$$(x \in (C \setminus A) \wedge x \notin (C \setminus B)) \vee (x \notin (C \setminus A) \wedge x \in (C \setminus B))\,.$$

По определению разности множеств,

$$\Big(x \in C \wedge x \notin A \wedge (\overline{x \in C \wedge x \notin B})\Big) \vee \Big((\overline{x \in C \wedge x \notin A}) \wedge x \in C \wedge x \notin B\Big)\,.$$

Раскрывая отрицание, получим

$$(x \in C \wedge x \notin A \wedge (x \notin C \vee x \in B)) \vee ((x \notin C \vee x \in A) \wedge x \in C \wedge x \notin B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \in C \wedge x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \in C) \wedge ((x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \in C) \wedge (x \in A\Delta B) \Rightarrow x \in A\Delta B.$$

Тем самым доказано включение $(C \setminus A)\Delta(C \setminus B) \subset A\Delta B$.

Обратно, возьмем произвольный элемент $y \in A\Delta B$. По определению симметрической разности,

$$(y \in A \wedge y \notin B) \vee (y \notin A \wedge y \in B).$$

Так как, по условию, $A \subset C$ и $B \subset C$, то $(y \in A) \Rightarrow (y \in C)$ и $(y \in B) \Rightarrow (y \in C)$. Следовательно,

$$(y \in A \wedge y \in C \wedge y \notin B) \vee (y \in C \wedge y \notin A \wedge y \in B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y \in A \wedge (y \in C \setminus B)) \vee ((y \in C \setminus A) \wedge y \in B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((y \notin C \setminus A) \wedge (y \in C \setminus B)) \vee ((y \in C \setminus A) \wedge (y \notin C \setminus B)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y \in (C \setminus A)\Delta(C \setminus B).$$

Таким образом, доказано включение $A\Delta B \subset (C \setminus A)\Delta(C \setminus B)$.

Следовательно, $(C \setminus A)\Delta(C \setminus B) = A\Delta B$, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить неравенство

1. $\left|\frac{x^2+5x+8}{x+6}\right| + x < 3$

2. $|x^2 + x - 4| - |x - 3| < 1$

3. $\left|\frac{3-x}{4+5x}\right| - x < 1$

4. $|4 - 5x| - |1 - x^2| \leqslant x$

5. $\left|\frac{7x^2-2x+1}{x+3}\right| - 2 \leqslant x$

6. $\frac{|4-x|}{x+2} - |x| \leqslant 1$

7. $\left|\frac{3x^2-4}{3+2x}\right| - x \leqslant 2$

8. $\frac{|3x+5|}{x-2} - |x| \geqslant 3$

9. $\left|\frac{x^2-5x+8}{x+6}\right| + x \geqslant 3$

10. $\left|\frac{3+x}{4+5x}\right| - x \geqslant 3$

11. $\left|\frac{7x^2-2x+1}{x-3}\right| - 2 > x$

12. $\left|\frac{3x^2+4}{3-2x}\right| - x \geqslant 2$

13. $|x^2 + x - 12| - |x - 3| \geq 1$

14. $|4 + 5x| - |1 - x^2| > x$

15. $\frac{|4-x|}{x+2} + |x| \geqslant 1$

16. $\left|\frac{x^2-4}{3-2x}\right| - x < 2$

17. $\left|\frac{x^2-5x+8}{x-6}\right| + x > 3$

18. $\left|\frac{3+x}{4-5x}\right| - x < 1$

19. $\left|\frac{7x^2+2x+6}{x-3}\right| - 2 \leqslant x$

20. $\frac{|4-x|}{x+2} + |x| < 2$

21. $|x^2 + x - 4| - |x - 3| < 2$

22. $|4 + 5x| - |1 - x^2| < 3x$

2. Найти область определения функции

1. $\sqrt{\log_{(x-1)} \frac{3x-2}{x+4}} + \frac{3-x}{x^2+4x}$

2. $\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{\log_x(3-x)}$

3. $\sqrt{3x - 1} + \frac{1}{\log_2(2x+1)}$

4. $\sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \frac{1}{\log_2(3x+5)}$

5. $\sqrt{\sin^2 x - 0,5} + \frac{1}{\log_3(2x-1)}$

6. $\sqrt{\log_x \frac{5x}{2-x}} + \frac{1}{x^2-2x+5}$

7. $\sqrt{\log_{3x+2}\frac{6x-1}{4-x}}+\frac{1}{x+2}$

8. $\sqrt[4]{\log_{1/2}\frac{7x+5}{x^2-4x}}+\frac{1}{3x-1}$

9. $\log_{1/e}(3-\log_6(x-2))$

10. $\frac{1}{4-\log_{1/2}\frac{x-3}{5-x}}+\sqrt{x-0,5}$

11. $\frac{1}{3^x-3^{-x}+2}+\sqrt{\log_{1/2}(x-2)}$

12. $\frac{1}{6^{2x}-6^x+27}+\sqrt{\log_{1/3}(4-x)}$

13. $\frac{x-2}{4^x-2^x+6}+\sqrt{\log_2(4-3x)}$

14. $\lg\frac{x^2-6x+8}{x^2-9x+20}$

15. $\sqrt{\log_{0,3}(1-x^2)}$

16. $\sqrt{x^2-5x+6}+\ln\sin x$

17. $\sqrt{\log_{x-2}\frac{3x-5}{x+3}}+\frac{4-x}{x^2+2x-3}$

18. $\sqrt{\sin^2 x-\frac{3}{4}}+\frac{1}{\log_{x-1}(4-x)}$

19. $\sqrt{3x+2}+\frac{1}{\log_2(2x+3)}$

20. $\sqrt{\log_{x+1}\frac{5x+5}{1-x}}+\frac{1}{x^2-6x+10}$

21. $\sqrt{\log_{3x+5}\frac{6x+5}{3-x}}+\frac{1}{x+3}$

22. $\sqrt[4]{\log_{1/2}\frac{7x-2}{x^2-6x+5}}+\frac{1}{3x-4}$

3. Найти точные грани множества, а также указать наибольший и наименьший элемент (в случае их существования)

1. $\left\{(-1)^{n-1}\left(2+\frac{1}{n}\right)\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

2. $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

3. $\left\{3-\frac{1}{n}\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

4. $\left\{\frac{n}{n+3}\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

5. $\left\{(-1)^{n}\left(4+\frac{1}{2n}\right)\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

6. $\left\{\frac{n}{6-n}\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

7. $\{3-2^{-n}|\, n\in\mathbb{N}\}$

8. $\left\{\frac{2n}{n+4}\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

9. $\left\{(-1)^{n-1}(2+2^{-n})\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

10. $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}2^{-k}\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

11. $\left\{\frac{3n}{n+5}\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

12. $\left\{(-1)^{n-1}\left(3-\frac{1}{n}\right)\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

13. $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{3^k}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

14. $\left\{2+\frac{1}{n}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

15. $\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

16. $\left\{(-1)^n\left(5-\frac{1}{2n}\right)\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

17. $\left\{\frac{n^2}{8-n^2}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

18. $\{2+2^{-n}| n\in\mathbb{N}\}$

19. $\left\{\frac{2n^2}{n^2+5}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

20. $\left\{(-1)^{n-1}(3-2^{-n})\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

21. $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(-2)^{-k}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

22. $\left\{\frac{3n^2}{n^2+6}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

4. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность множеств A и B (привести геометрическое решение)

	Множество A	Множество B
1.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| x^2+y^2\leqslant 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| \|x\|<\frac{1}{2}\}$
2.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| x^2+y^2\geqslant 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| x^2+y^2\leqslant 4\}$
3.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| \|x\|+\|y\|\leqslant 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| x^2+y^2\leqslant 1\}$
4.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| \max(\|x\|,\|y\|)\leqslant 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| x^2+y^2\leqslant 1\}$
5.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| 2xy\leqslant 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| x^2+y^2\leqslant 1\}$
6.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| \sin x-y>0\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| x>0;\ y>0\}$
7.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| \sin x-y>0\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| x>0;\ y<0\}$
8.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| \sin x<y\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| x<0;\ y>0\}$
9.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| x^2+y^2+2x\leqslant 0\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| x^2+y^2+2y\leqslant 0\}$
10.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| x-y=1\}$

11.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 9x^2-4y\leqslant 36\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \lvert x\rvert\leqslant 2;\ 0<y<1\}$
12.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<\sin x<1\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \lvert x\rvert\leqslant 2;\ \lvert y\rvert<2\}$
13.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<\cos x<1\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \lvert x\rvert\leqslant \frac{\pi}{2};\ \lvert y\rvert<2\pi\}$
14.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy<\frac{1}{4};\ x>0\}$
15.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant x^2+y^2<4\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \lvert x-3\rvert<2;\ 0<y<1\}$
16.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \lvert x+1\rvert+\lvert y\rvert<1\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$
17.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2<2x\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \lvert x\rvert+\lvert y\rvert<3\}$
18.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 25\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \lvert x\rvert<1;\ 4<y<5\}$
19.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<xy<1;\ x>0\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<x^2+x+1\}$
20.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<\operatorname{arctg} x\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \operatorname{tg} x<y;\ \lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}\}$
21.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \cos x-y>0\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0;\ y>0\}$
22.	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \cos x-y>0\}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0;\ y<0\}$

5. Доказать (по определению), что для произвольных множеств A, B, C выполняется соотношение

1. $(A\Delta B)\cap C=(A\cap C)\Delta(B\cap C)$

2. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

3. $A\Delta(B\cup C)\subset(A\Delta B)\cup(A\Delta C)$

4. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

5. $(A\cap B)\Delta C\supset(A\Delta C)\cap(B\Delta C)$

6. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$

7. $(A\Delta B)\setminus C=(A\setminus C)\Delta(B\setminus C)$

8. $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

9. $A\cup B=(A\cap B)\Delta(A\Delta B)$

10. $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$

11. $A\Delta B\supset(C\setminus A)\Delta(C\setminus B)$

12. $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$

13. $A\Delta(B\setminus C)\supset(A\Delta B)\setminus(A\Delta C)$

14. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

15. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$

16. $A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

17. $A\cup(B\setminus C)\supset(A\cup B)\setminus C$

18. $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$

19. $(A\cup C)\setminus B\subset(A\setminus B)\cup C$

20. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

21. $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$

22. $A\cup(B\Delta C)\supset(A\cup B)\Delta(A\cup C)$

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 2 «ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ»

1. Используя определение предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$.

	x_n	a	y_n	z_n
1.	$\frac{2-n^2}{4n^2-3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2^n}{3^n+5\cdot 2^n}$	$n-\sqrt{n}$
2.	$\frac{2n-1}{4n+9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{n-1}{2n^2+3}$	$\frac{7^n+2^n}{3\cdot 2^n}$
3.	$\frac{9n^2-2}{3n^2+5}$	3	$\frac{2n+0{,}5}{\sqrt{n^3+n^2}}$	$\frac{(-1)^n\cdot n^2}{n+1}$
4.	$\frac{1+n^4}{5n^4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{n^2}{(n+1)!}$	$\frac{n^5+n^2+1}{3n^2-n}$
5.	$\frac{5n-3}{3n}$	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}$	$\frac{4n^2+n}{\sqrt{n^2-0{,}5}}$
6.	$\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}$	1	$\frac{\sqrt{2n+1}}{n}$	$\frac{n^2+n}{3n-1}$
7.	$\frac{2^n+3^n}{3^n+1}$	1	$\frac{\sin n}{\sqrt{n^3+4}}$	$\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^2}{3n-10}$

8.	$\frac{n^2+\sin^2\frac{1}{n}}{n^2}$	1	$\frac{(2+(-1)^n)\cdot n}{n^2+1}$	$\frac{n^2\sqrt{n}}{n^2+1}$
9.	$\frac{n+(-1)^n}{2n+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{n^3-2}{(3+n^3)\cdot 5^n}$	$\frac{2^n\cdot n}{n+3}$
10.	$\frac{\sqrt{n^2+3}}{4n}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7^n(n-1)}{2n\cdot 9^n}$	$\frac{(-1)^n n^3}{2n^2-\sqrt{n}}$
11.	$\frac{4n^2-5}{3+8n^2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$	$\frac{5\cdot 3^n+2^n}{2^n-1}$
12.	$\frac{3\cdot 5^n-2^n}{2^n+5^n}$	3	$\frac{3\sin n^2}{\sqrt{n+1}}$	$\frac{3n^3+2}{5n-3}$
13.	$\frac{4n^2+\cos\frac{1}{n}}{n^2}$	4	$\frac{1+2\cdot(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$	$\frac{2\cdot 5^n+7}{3^n-5}$
14.	$\frac{-7n^3+3}{2+7n^3}$	-1	$\frac{3-n^2}{4n^3+n^2+1}$	$\frac{\sqrt{n^3}}{7-3\sqrt{n}}$
15.	$\frac{2n^2}{\sin\frac{1}{n}+n^2}$	2	$\frac{\sin(n+n^2)}{1+\sqrt{n}}$	$\frac{\sqrt{n^4+n}}{2n-1}$
16.	$\frac{1+3^n}{1-3^n}$	-1	$\frac{\cos\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}}$	$n^2+\sqrt{n}$
17.	$\frac{3+n^2}{5n^2-7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3^n}{4\cdot 3^n+5^n}$	$\frac{\sqrt{n^5}}{n^2-9}$
18.	$\frac{n}{\sqrt{4n^2+2}}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{n+7}-\sqrt{n-7}$	n^2-n
19.	$\frac{3n-(-1)^n}{5n+8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\cos n}{\sqrt{n^4+4}}$	$\frac{2\cdot 7^n+5^n}{5^n-1}$
20.	$\frac{2\cdot 7^n-3^n}{3^n+7^n}$	2	$\frac{n-5}{n^2+5}$	$\frac{3n^2+5}{n+4}$
21.	$\frac{n^2}{5n^2-\cos\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{\sqrt{n-1}}{2n}$	$\frac{n^7+n^3+1}{n^6-n^2}$
22.	$\frac{\sqrt{n^2+7}}{8n}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5\sin n!}{\sqrt{n^5+11}}$	$\frac{\sqrt{n^5+n^2}}{3n-1}$

2. Доказать, что последовательность расходится

1. $x_n = 3-\sin\frac{\pi n}{4}$ **2.** $x_n = \frac{(-1)^{n-1}n+2}{n}$

3. $x_n = (-1)^n\cdot 10-2$ **4.** $x_n = (-1)^{n+1}\left(3+\frac{2}{n}\right)$

5. $x_n = 2 + 3 \cdot (-1)^n$

6. $x_n = \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot n^2 + 2}{n^2}$

7. $x_n = \frac{(-1)^n \cdot n^3 + 1}{n^3}$

8. $x_n = 3^{(-1)^{n+1} \cdot n}$

9. $x_n = \cos \frac{2\pi n}{3}$

10. $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{3} + \frac{1}{n}$

11. $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{2}{n}\right)$

12. $x_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{5}{n+1} + 2\right)$

13. $x_n = 2 \sin \frac{\pi n}{2} + 1$

14. $x_n = \frac{3}{n} + \cos \frac{\pi n}{2}$

15. $x_n = 2(-1)^n + 1$

16. $x_n = 1 - \cos \frac{\pi n}{4}$

17. $x_n = \frac{1 - 2 \cdot (-1)^n}{2} - \frac{1}{n}$

18. $x_n = \sin \frac{3\pi n}{4}$

19. $x_n = \frac{(-1)^n \cdot n + 4}{n}$

20. $x_n = \cos \frac{\pi n}{3} + 1$

21. $x_n = 2^{(-1)^n}$

22. $x_n = 5 - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$

3. С помощью критерия Коши доказать, что последовательность сходится

1. $x_n = \frac{n}{2n-1}$

2. $x_n = 0,22\underbrace{33\ldots3}_{n-2}$

3. $x_n = \frac{2n+1}{n}$

4. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{arctg}(k^2+1)}{(k+1)(k+2)}$

5. $x_n = \frac{n+1}{2n+3}$

6. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx^3)}{3^{k-1}}$

7. $x_n = \frac{5+2n}{n}$

8. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(k^2 x)}{k^3}$

9. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{arctg} k}{2^k}$

10. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{arctg}(2kx^2+1)}{10^{k-1}}$

11. $x_n = 0,\underbrace{66\ldots6}_{n}$

12. $x_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\sin(kx)}{k(k-1)}$

13. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k(k+1)}$

14. $x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$

15. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$

16. $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n!},\ \ x_1 = 2$

17. $x_n = \frac{n+2}{2n+1}$

18. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(k^3 x)}{k^3}$

19. $x_n = \frac{n+5}{2n+3}$

20. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{arctg}(7k)}{4^{k+1}}$

21. $x_n = 0,\underbrace{55\dots5}_{2n}$

22. $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n^3},\ \ x_1 = 1$

4. Найти пределы последовательностей

1.

а) $\frac{(n+2)^3 - n(n-2)^2}{n^2+n}$

б) $\sqrt{4n^2+5n} - 2n$

в) $\frac{\sqrt[n]{8n^3} - 1}{\sqrt[n]{2n} - 1}$

г) $\frac{n\sin(n!)}{\sqrt{n^3+1}}$

д) $\left(\frac{2n^2+3n+4}{2n^2-5n+7}\right)^n$

е) $\frac{n+2^n+\lg^4 n}{n+2^n+n!}$

ж) $\frac{\log_2 n + n + 5}{\sqrt[24]{n} + \sqrt{n^3} + 3}$

з) $x_1 = 0{,}5\ ,\ \ x_{n+1} = \frac{x_n+1}{x_n+2}$

и) $\frac{n\sqrt[3]{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$

к) $n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$

л) $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$

м) $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$

2.

а) $\frac{n^2-8}{(n+1)^3 - n(n-3)^2}$

б) $\frac{n^2+n+3}{\sqrt{n^4+2n^3-1}}$

в) $\frac{\sqrt[n]{16} - 1}{\sqrt[n]{2} - 1}$

г) $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})\sin\ln(n+\sqrt{n}+2)$

д) $\left(\frac{3^n+1}{3^n-1}\right)^{3^n}$

е) $\frac{2n^2+3n^{10}+5}{2^n+3^n+4^n}$

ж) $\frac{n^3+5^n}{n!+5}$

з) $x_1=0{,}5\ ,\ \ x_{n+1}=\frac{x_n}{2+x_n}$

и) $\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$

к) $n(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3})$

л) $\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$

м) $\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$

3.

а) $\frac{(n+4)^3-n^2(n+1)}{n^2+6}$

б) $\sqrt[3]{n^3-2}-n$

в) $\frac{\sqrt[n]{4}+2\sqrt[n]{2}-3}{\sqrt[n]{2}-1}$

г) $\frac{2^n+3^n}{4^n}(\cos n+\sin n)$

д) $\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$

е) $\frac{2n^{12}+12^n}{n!+n}$

ж) $\frac{\log_8 n+14}{14^n+n}$

з) $x_1=2,\ \ x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{3}{x_n}\right)$

и) $\frac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$

к) $(n-\sqrt[3]{n^3-5})n\sqrt{n}$

л) $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$

м) $\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}$

4.

а) $\frac{2+n^2}{n^2(n+3)-(n-6)^2}$

б) $\frac{\sqrt[3]{2n^2+5n}}{n+7}$

в) $\frac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{81}-1}$

г) $\frac{3(n-3)}{(n-1)(n+2)}\sin(n+\sqrt{n})$

д) $\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n+1}$

е) $\frac{10^n+n^{10}}{(n+10)!}$

ж) $\frac{\log_5 n+n^2+24}{\sqrt[12]{n}+\sqrt{n^5}+14}$

з) $x_1=12,\ \ x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{125}{x_n^2}\right)$

и) $\frac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$

к) $\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}$

л) $\left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$

м) $\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

5.

а) $\frac{n^2+1}{5n+1} - \frac{3n^2+1}{15n+1}$

б) $\frac{n^2-3}{\sqrt{n+4n^2}}$

в) $\frac{\sqrt[n]{n^2}+2\sqrt[n]{n}-3}{\sqrt[n]{n}-1}$

г) $\frac{2^n-1}{2^n+1} \cdot \frac{\cos(\sin n^2)}{n}$

д) $\left(\frac{n-5}{n-3}\right)^{n-4}$

е) $\frac{n^2+2^n}{n^3+3^n}$

ж) $\frac{2\ln n^2+n^3-7}{\sqrt[3]{n}+n^{3/2}+4n^5}$

з) $x_1 = 0{,}7\ ,\ \ x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$

и) $\frac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n}-n}$

к) $\frac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$

л) $\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$

м) $\frac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$

6.

а) $2n + 1 - \frac{6n^3-7}{3n^2+4}$

б) $\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+n}$

в) $\frac{\sqrt[n]{16n^4}-1}{\sqrt[n]{2n}-1}$

г) $\frac{2^n+4}{4^n+n!}\cos(\sin n!)$

д) $\left(\frac{3n-1}{4n+5}\right)^{n^2}$

е) $\frac{n^2+n}{n!+2}$

ж) $\frac{\log_3 n+5}{3^n}$

з) $x_1 = 2,2\ ,\ \ x_{n+1} = \frac{x_n}{4-x_n}$

и) $\frac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt{9+n^2}}$

к) $\sqrt{n^2-3n+2} - n$

л) $\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$

м) $\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}$

7.

а) $\left(\frac{2n^2+3n-1}{4n^2-2n+1}\right)^3$

б) $\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n-1}$

в) $\frac{1}{1-\sqrt[n]{2}} - \frac{2\sqrt[n]{2}}{1-\sqrt[n]{4}}$

г) $\frac{n^2+1}{2^n+3^n+5}\cos(\sin 5^n)$

д) $\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n+5}\right)^{\frac{n^3}{1+n}}$

е) $\frac{\ln n}{\sqrt{\sqrt{n}}}$

ж) $\frac{32^n+n^{32}}{(2n+1)!}$

з) $x_1 = \frac{7}{13},\ x_{n+1} = \frac{3x_n+1}{2x_n+2}$

и) $\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}$

к) $n + \sqrt[3]{4-n^3}$

л) $\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$

м) $\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+3} - n$

8.

а) $\frac{n^3}{n^2+1} - \frac{n^2}{n+2}$

б) $\frac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}}-1\right)$

в) $\frac{1-\sqrt[n]{8}}{1-\sqrt[n]{2}}$

г) $\frac{n^5}{2^n}(2+\sin^7 n)$

д) $\left(\frac{3n+4}{3n+5}\right)^{2n+1}$

е) $\frac{2^{n/2}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$

ж) $\frac{n^{12}+5}{2^n}$

з) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = \frac{x_n+1}{x_n+3}$

и) $\frac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}+\sqrt{n-2}}$

к) $\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2-2n+3}$

л) $\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$

м) $\frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$

9.

а) $\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}} - n$

б) $\frac{n}{2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}-1\right)$

в) $\frac{\sqrt[n]{9}+\sqrt[n]{3}-2}{\sqrt[n]{3}-1}$

г) $\frac{n^3}{3^n}(\sin^3 n + \cos^3 n)$

д) $\left(1+\frac{2n+1}{2n^2+1}\right)^{n-3}$

е) $\frac{8^n+4}{n!}$

ж) $\frac{n^4+4^n}{n^5+4^{n+1}}$

з) $x_1 = 5,\ x_{n+1} = 4 - \frac{3}{x_n}$

и) $\frac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$

к) $\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)}$

л) $\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$

м) $\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$

10.

а) $\frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2}$

б) $\frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)}$

в) $\frac{1-\sqrt[n]{3n}}{1-\sqrt[n]{81n^4}}$

г) $\frac{2^n}{3^n+4^n}\left(\sin^5(n!)+\cos^3(3n^2)\right)$

д) $\left(1+\frac{n^2}{2^n}\right)^{\frac{2^n+3n^2}{n^2}}$

е) $\frac{\log_3(n+3)}{1+\sqrt{n}}$

ж) $\frac{n^9+2}{1+(1{,}1)^n}$

з) $x_1=2,5\ ,\ \ x_{n+1}=-\frac{2}{x_n}+3$

и) $\frac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$

к) $n^2(\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8})$

л) $\left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$

м) $\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$

11.

а) $\frac{(n^2+2)^2-(n^2-2)^2}{(n+1)^3-(n-1)^3}$

б) $\sqrt{n^2+n}-n-1$

в) $\frac{2\sqrt[n]{n^2}-\sqrt[n]{n}-1}{1-\sqrt[n]{n}}$

г) $\frac{\lg n}{n}\sin^{17}(\pi\sqrt{n})$

д) $\left(\frac{n^2+4}{n^2+5}\right)^{\frac{n^3}{2n+1}}$

е) $\frac{\ln n+15}{\sqrt{\sqrt{n}}}$

ж) $\frac{(n+3)(n+4)}{(2^n+3)(2^n+4)}$

з) $x_1=2,\ \ x_{n+1}=\frac{x_n+1}{x_n+2}$

и) $\frac{n\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{81n^4-n^2+1}}{(n+\sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}$

к) $n(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n)$

л) $\left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$

м) $\frac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$

12.

а) $\left(\frac{1+10n^3}{n+5n^3+1}\right)^2$

б) $\frac{n+8}{\sqrt[3]{n^2+8n^3}}$

в) $\frac{1-\sqrt[n]{27}}{1-\sqrt[n]{3}}$

г) $\frac{(n+1)^4}{2^n}(5-\cos 6n)$

д) $\left(\frac{7n-1}{7n+1}\right)^{5n+7}$

е) $\frac{5n+\log_3 n}{n^2+2n}$

ж) $\frac{n^4+2^n}{n!+3}$

з) $x_1 = -0{,}5\ ,\ \ x_{n+1} = \frac{x_n}{2+x_n}$

и) $\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$

к) $n^2(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3})$

л) $\left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^n$

м) $\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{5^n}}$

13.

а) $n-\frac{1}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}}$

б) $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$

в) $\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}$

г) $\frac{n\lg n}{n^2+1}(\cos n+\sin n)$

д) $\left(2+\frac{1-n}{n}\right)^{2n+5}$

е) $\frac{2n+\log_2\sqrt{n}}{2n+\log_3\sqrt[3]{n}}$

ж) $\frac{n-\lg n}{n^2+\lg^2 n}$

з) $x_1 = 10,\ \ x_{n+1} = 5-\frac{4}{x_n}$

и) $\frac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}+\sqrt{n-3}}$

к) $\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}$

л) $\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^2}$

м) $\frac{1-3+5-7+\cdots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}$

14.

а) $\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{n^4}{n^3+n^2}$

б) $\frac{\sqrt{n^5+1}-n^2}{n^2+1}$

в) $\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{4}-3\sqrt[n]{2}+2}$

г) $\frac{n^{10}+5}{3^n+4}(\operatorname{arctg} n!+\sin 2^n)$

д) $\left(\frac{n^2+3n+4}{n^2+5}\right)^{\frac{n^2+4}{2n}}$

е) $\frac{5^n+n}{(n+5)!}$

ж) $\frac{4+\log_4(n+6)}{\sqrt{n}+3}$

з) $x_1 = 3,\ \ x_{n+1} = \sqrt{12+x_n}$

и) $\frac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$

к) $\frac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$

л) $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$

м) $\frac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{9n^4+1}}$

15.

а) $\frac{(2+n)^4-n^4}{1+16n^4}$

б) $\frac{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}$

в) $\frac{1}{2(1-\sqrt[n]{3})} - \frac{\sqrt[n]{3}}{1-\sqrt[n]{9}}$

г) $\frac{\sin(n!+5)}{(0{,}2)^n \cdot n!}$

д) $\left(\frac{n^2+n+4}{n^2+4}\right)^{\frac{n^3+5}{n^2-8}}$

е) $\frac{n^2+5}{4+2^n}$

ж) $\frac{\log_8(n+5)}{12+\sqrt{n}}$

з) $x_1 = -1, \ x_{n+1} = \frac{x_n}{4-x_n}$

и) $\frac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}$

к) $\sqrt{n^2+3n-2} - \sqrt{n^2-3}$

л) $\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$

м) $\frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$

16.

а) $\frac{n^3+4}{2n^2+3} - \frac{n^2}{1+2n}$

б) $\frac{n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$

в) $\frac{1-\sqrt[n]{27n^3}}{1-\sqrt[n]{3n}}$

г) $\frac{(-2)^n}{(n+2)!}(\sin^2 n + \cos^4 n)$

д) $\left(\frac{1-2n}{5-2n}\right)^{12n+5}$

е) $\frac{\sqrt{n}+2^n+\lg^4 n}{n+3^n+n!}$

ж) $\frac{\log_5(n+8)}{5+\sqrt{n}}$

з) $x_1 = 1{,}5 \ , \ x_{n+1} = \frac{x_n}{5-x_n}$

и) $\frac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}$

к) $\sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3})$

л) $\left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^2}$

м) $\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$

17.

а) $\frac{(n+1)^3-n(n-3)^2}{n^2+2n}$

б) $\frac{n^2+2n+8}{\sqrt{4n^4+5n^3-1}}$

в) $\frac{\sqrt[n]{9}+5\sqrt[n]{3}-6}{\sqrt[n]{3}-1}$

г) $\frac{n^5}{5^n}(\sin^3 n + \sin^5 n)$

д) $\left(\frac{3n^2+4n+5}{3n^2-6n+7}\right)^n$

е) $\frac{\ln n+11}{\sqrt[7]{n}}$

ж) $\frac{(n+7)(n+9)}{(3^n+7)(3^n+9)}$

з) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{x_n+2}{x_n+3}$

и) $\frac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5}+\sqrt{n}}$

к) $\frac{\sqrt{n(n^5+9)}-\sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}$

л) $\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$

м) $\frac{n+2}{1+2+3+\cdots+n} - \frac{2}{3}$

18.

а) $\frac{n^2+11}{(n+2)^3-n(n+1)^2}$

б) $\sqrt[3]{8n^3-11} - 2n$

в) $\frac{\sqrt[n]{25}-1}{\sqrt[n]{5}-1}$

г) $\frac{3^n}{4^n+5^n}(\operatorname{arctg} n! + \operatorname{arcctg} n!)$

д) $\left(\frac{2^n+3}{2^n-3}\right)^{2^n}$

е) $\frac{6n+\log_2 n}{n^3+8n}$

ж) $\frac{n^{17}+17}{2^n+3}$

з) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n+3}$

и) $\frac{\sqrt{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6}-\sqrt{n-6}}$

к) $\sqrt{n(n+5)} - n$

л) $\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$

м) $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \cdots + \frac{3^n+2^n}{6^n}$

19.

а) $\frac{(n+5)^3-n^2(n+11)}{n^2+9}$

б) $\frac{\sqrt[3]{4n^2+5n}}{n+9}$

в) $\frac{\sqrt[n]{11}-1}{2\sqrt[n]{121}+3\sqrt[n]{11}-5}$

г) $\frac{\ln n}{2n}\sin^2 n$

д) $\left(\frac{3n+5}{3n+9}\right)^{n}$

е) $\frac{2^{n/3}+(n+1)!}{n(5^n+n!)}$

ж) $\frac{\log_3 n+2n+9}{\sqrt[15]{n}+\sqrt[5]{n^6}+11}$

з) $x_1 = 5,\ x_{n+1} = 4 - \frac{2}{x_n}$

и) $\frac{4n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}-5n}$

к) $\sqrt{n^3+8}(\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3-1})$

л) $\left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$

м) $\frac{2-5+4-7+\cdots+2n-(2n+3)}{n+3}$

20.

а) $\frac{n^2+1}{3n+1}-\frac{4n^2+1}{12n+1}$

б) $\sqrt{n^2+6n}-\sqrt{n^2+6}$

в) $\frac{2\sqrt[n]{3}}{1-\sqrt[n]{9}}-\frac{1}{1-\sqrt[n]{3}}$

г) $\frac{(n+1)^{18}}{2^n}(2-\cos n)$

д) $\left(1+\frac{3n+1}{3n^2+1}\right)^{n-2}$

е) $\frac{7^n+n^7}{(7+n)!}$

ж) $\frac{\log_9 n+19}{9n+9^n}$

з) $x_1=0{,}4\ ,\ x_{n+1}=x_n(2-x_n)$

и) $\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}$

к) $\frac{\sqrt{(n^3+1)(n^3+3)}-\sqrt{n(n^4+2)}}{2\sqrt{n}}$

л) $\left(\frac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$

м) $\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$

21.

а) $\frac{4+n^2}{n^2(n+5)-(n-7)^2}$

б) $\sqrt[3]{n+17}-\sqrt[3]{n-19}$

в) $\frac{1-\sqrt[n]{n^3}}{1-\sqrt[n]{n}}$

г) $\frac{n^2+2\log_3 n}{n^3+2n^4}$

д) $\left(1+\frac{n^3}{3^n}\right)^{\frac{3^n+2n^3}{n^3}}$

е) $\frac{\sqrt[3]{n}+3^n+\ln^3 n}{n+4^n+n!}$

ж) $\frac{n^{18}+2^n}{(n+2)!}$

з) $x_1=4,\ x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{27}{x_n^2}\right)$

и) $\frac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}$

к) $\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}$

л) $\left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$

м) $\frac{1+2+3+\cdots+n}{n-n^2+3}$

22.

а) $3n+4-\frac{6n^3+1}{2n^2-9}$

б) $\frac{5n^{90}+60^n}{n!+3n}$

в) $\frac{\sqrt[n]{16}+\sqrt[n]{4}-2}{\sqrt[n]{4}-1}$

г) $\frac{n^9+1}{10^n+4}\operatorname{arctg} n^2$

д) $\left(\frac{n^2+6}{n^2+7}\right)^{\frac{n^3}{3n+5}}$

е) $\frac{n^8+1}{3+7^n}$

ж) $\frac{n-\ln n}{n^3+\ln^3 n}$

з) $x_1 = 2,\ \ x_{n+1} = \frac{x_n}{5-x_n}$

и) $\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{x^7}-\sqrt{n+1}}$

к) $\frac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)}-n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$

л) $\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$

м) $\frac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+\dots+(5n-3)}$

5. При каких значениях параметра x существует предел последовательности? Найти этот предел

1. $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^k$

2. $\sum\limits_{k=0}^{n}(2x+3)^k$

3. $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin^k x$

4. $\sum\limits_{k=1}^{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^k$

5. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{(1+x^2)^k}$

6. $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k x^k}$

7. $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^k$

8. $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cos^k x$

9. $x^2+\frac{x^3}{1-x}+\dots+\frac{x^n}{1-x}$

10. $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1+x}{x^2}\right)^{2k-1}$

11. $(1+x)(1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n)$

12. $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin^{2k} x$

13. $\frac{1+x+x^2+\ldots+x^n}{1-x+x^2+\dots+(-1)^n x^n}$

14. $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\cos^k x}{2^k}$

15. $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(1-x)^k}$

16. $\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{x^k}{(2x+1)^k}$

17. $\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{tg}^k x$

18. $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3^k}{x^k}$

19. $\sum\limits_{k=1}^{n}(3x^2-1)^k$

20. $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^k(x+2)$

21. $\sum\limits_{k=1}^{n}2^k\sin^k x$

22. $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\cos^{2k} x$