БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории функций

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
для студентов механико-математического факультета

МИНСК
БГУ
2011

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент выполняет индивидуальные задания в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради студент указывает свою фамилию, имя, номер учебной группы и вариант индивидуального задания.

Решения задач следует излагать в порядке номеров, указанных в задании.

Решения задач излагать подробно и аккуратно, выполняя все необходимые теоретические обоснования.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 5 «ПРОИЗВОДНАЯ»

1. Пользуясь определением, вычислить указанные производные:

1. а) $f(x) = 2\sin 3x, \qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right);$

б) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^3 + x^2 \sin\frac{2}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad f'(0);$

в) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|, \qquad f'_+(2),\ f'_-(2).$

2. а) $f(x) = 1 + \ln 2x, \qquad f'(1);$

б) $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(x^2 \cos\frac{1}{9x}\right) + \frac{2}{3}x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad f'(0);$

в) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ \sqrt[3]{x^4}\ln x, & x > 0, \end{cases} \qquad f'_+(0),\ f'_-(0).$

3. а) $f(x) = \sqrt{x+4}, \qquad f'(5);$

б) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x \cos\frac{1}{5x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad f'(0);$

в) $f(x) = |2^x - 2|, \qquad f'_+(1),\ f'_-(1).$

4. а) $f(x) = 2x + \ln 2x, \qquad f'(1);$

б) $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(x^3 \sin\frac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad f'(0);$

в) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0, \\ \ln(1 + \sqrt[5]{x^7}), & x \geqslant 0, \end{cases} \qquad f'_+(0),\ f'_-(0).$

5. а) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad f'(1);$

б) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x \sin\frac{3}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad f'(0);$

в) $f(x) = (1 - x^2)\operatorname{sgn}x, \qquad f'_+(0),\ f'_-(0).$

6. а) $f(x) = x\sqrt[3]{x} + 5, \qquad f'(8);$

б) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln\left(1 + x^2 \sin\frac{1}{x}\right)} - 1, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0);$

в) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}(1 - x^2), \ x \neq 0, \\ 1, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'_+(0), \ f'_-(0).$

7. а) $f(x) = 7x^2 - 3x + 15, \qquad f'(2);$

б) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\exp\left(x^2 \sin\frac{5}{x}\right) - 1\right) + x, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0);$

в) $f(x) = |x| \sin x, \qquad f'_+(0), \ f'_-(0).$

8. а) $f(x) = 2^{x+1}, \qquad f'(0);$

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{4}{3x} + \frac{x^2}{2}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0);$

в) $f(x) = \left|x - \frac{\pi}{2}\right| \cos x; \qquad f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right), \ f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right).$

9. а) $f(x) = x^3 - 3x + 4, \qquad f'(2);$

б) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x^3 - x^{3/2} \sin\frac{1}{3x}\right), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0);$

в) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'_+(0), \ f'_-(0).$

10. а) $f(x) = \frac{1}{2x+3}, \qquad f'(5);$

б) $f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \cos\frac{5}{x}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0);$

в) $f(x) = \begin{cases} x^2, \ x < 0, \\ \sin x, \ x \geqslant 0, \end{cases} \qquad f'_+(0), \ f'_-(0).$

11. а) $f(x) = \arccos 3x, \qquad f'(0);$

б) $f(x) = \begin{cases} x + \arcsin\left(x^2 \sin\frac{6}{x}\right), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0);$

в) $f(x) = |x - 2| \cos x; \qquad f'_+(2), \ f'_-(2).$

12. а) $f(x) = 3\cos(4x+1)$, $\qquad f'(0)$;

б) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(2^{x^2\cos(1/8x)} - 1 + x\right), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0)$;

в) $f(x) = x^2|x-4|$, $\qquad f'_+(4), \ f'_-(4)$.

13. а) $f(x) = \ln(2x+1)$, $\qquad f'(1)$;

б) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \cdot \sin\frac{7}{x}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0)$.

в) $f(x) = \begin{cases} 2x, \ x < 0, \\ \ln(1+\sqrt{x^3}), \ x \geqslant 0, \end{cases} \qquad f'_+(0), \ f'_-(0)$.

14. а) $f(x) = x + \operatorname{ctg} x$, $\qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2\cos\frac{1}{9x}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0)$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{\sin \pi x}$, $\qquad f'_+(2), \ f'_-(2)$.

15. а) $f(x) = x^3 + 3\sqrt{x+1}$, $\qquad f'(3)$;

б) $f(x) = \begin{cases} x^2\cos^2\frac{11}{x}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0)$.

в) $f(x) = \begin{cases} x, \ x \leqslant 0, \\ \sqrt[5]{x^6}\ln x, \ x > 0, \end{cases} \qquad f'_+(0), \ f'_-(0)$.

16. а) $f(x) = \frac{2}{x+1} + \sqrt[3]{x+5}$, $\qquad f'(3)$;

б) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2\cos\frac{1}{x}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0)$.

в) $f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}$, $\qquad f'_+(0), \ f'_-(0)$.

17. а) $f(x) = 3\sin 4x$, $\qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln\cos x}{x}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0)$.

в) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}(3-x^2), \ x \neq 0, \\ 1, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'_+(0), \ f'_-(0)$.

18. а) $f(x) = 1 + \ln 7x, \qquad f'(1);$

б) $f(x) = \begin{cases} 6x + x\sin\frac{1}{x}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0).$

в) $f(x) = |x| \operatorname{tg} x, \qquad f'_+(0), \ f'_-(0).$

19. а) $f(x) = \sqrt{x+8}, \qquad f'(8);$

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(e^{x^2} - \cos x\right), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0).$

в) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \ x \leq 0, \\ x^3, \ x > 0, \end{cases} \qquad f'_+(0), \ f'_-(0).$

20. а) $f(x) = 5x^2 - 2x + 17, \qquad f'(2);$

б) $f(x) = \begin{cases} e^{x\sin\frac{5}{x}} - 1, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0).$

в) $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + \sqrt[3]{x^4}), \ x < 0, \\ 9x, \ x \geq 0, \end{cases} \qquad f'_+(0), \ f'_-(0).$

21. а) $f(x) = 3^{x+1}, \qquad f'(0);$

б) $f(x) = \begin{cases} 3^{x^2\sin\frac{2}{x}} - 1 + 2x, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0).$

в) $f(x) = |x-5|\sin x; \qquad f'_+(5), \ f'_-(5).$

22. а) $f(x) = \arccos 7x, \qquad f'(0);$

б) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln\left(1 + 3x^2\cos\frac{2}{x}\right)} - 1, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases} \qquad f'(0).$

в) $f(x) = x^3|x+8|, \qquad f'_+(-8), \ f'_-(-8).$

2. Найти производные функций:

1. а) $f(x)=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\left(\operatorname{ctg} x^2+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3(2x)\right)$;

б) $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x\left(\ln\frac{1-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{3}}\right)$.

2. а) $f(x)=\log_2\log_3\log_5 x\cdot\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)$;

б) $f(x)=(\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{2}x}}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4+1}}\right)$.

3. а) $f(x)=\arcsin(\sin x^4-\cos x^4)\cdot\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$;

б) $f(x)=x^{2^x}\left(x+\operatorname{ctg} x\cdot\ln(1+\sin x)-\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

4. а) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right)$;

б) $f(x)=2^{x^x}\left(\ln\frac{2x^2+4x+4}{2x^2+2x+1}+4\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}(2x+1)\right)$.

5. а) $f(x)=\left(\frac{x}{2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(2x\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})-\sqrt{4x^2+1}\right)$;

б) $f(x)=x^{\sin x}\left(\frac{3-\sin x}{2}\sqrt{\cos^2 x-2\sin x}+2\arcsin\frac{1+\sin x}{\sqrt{2}}\right)$.

6. а) $f(x)=3^{\cos^2 x^5}\left(\operatorname{th} x+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}\right)$;

б) $f(x)=(\ln x)^{x^3}\left(e^x\arcsin\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}\right)$.

7. а) $f(x)=\left(x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2}\right)\left(\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\ln\operatorname{tg} x\right)$;

б) $f(x)=5^{\frac{x}{\log_9\sqrt{x}}}(\sin^2 x)^{\operatorname{arctg} x}$.

8. а) $f(x)=\left(\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}-\ln\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}\right)\cdot\sin\cos^2 x\cdot\cos\sin^2 x$;

б) $f(x)=(\operatorname{ch} x)^{x^4}\cdot\sqrt{\sin x+\sqrt{x+\operatorname{ch} x}}$.

9. а) $f(x)=e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}\left(\operatorname{arctg} 2^x+x^5\ln 5\right)$;

б) $f(x)=x^{\sin^2 x}\left(\sin x-\ln\sqrt{1+\sin^2 x}+\operatorname{arcctg}(\sin x)\right).$

10. а) $f(x)=3^{\cos^2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)-\frac{1}{2(1+x^2)}\right);$

б) $f(x)=(\operatorname{ch}x)^{\operatorname{arctg}x^2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right)^2.$

11. а) $f(x)=\frac{2}{3}\ln(\sqrt{x^3}+\sqrt{1+x^3})\left(x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}+e^{-x}\operatorname{arctg}e^x\right);$

б) $f(x)=(\sin^4 x+\cos^4 x)^{x^2}\cdot\left(\operatorname{ctg}x^2-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 2x\right).$

12. а) $f(x)=\left(\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x\right)\arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1};$

б) $f(x)=(\operatorname{arctg}x)^{\operatorname{tg}x}\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{\sin^4 x}}+\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{\sin^2 x})\right).$

13. а) $f(x)=\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\cos\ln^3 x}}\left(\ln\frac{x^2+a}{\sqrt{x^4+b^4}}+\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{b}\right);$

б) $f(x)=x^{\frac{\sin x}{\ln x}}\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{2}x}}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4+1}}\right).$

14. а) $f(x)=\frac{2}{7}\ln(\sqrt{x^7}+\sqrt[7]{1+x^2})+\frac{1}{\sin^4 x+1}+\ln\frac{\sin^4 x}{2^{\sin 5x}+1};$

б) $f(x)=(\sin^2 x)^{\cos\frac{3}{x}}\left(\operatorname{arctg}(\sin 3x)-\ln\sqrt{1+e^{x^2}}\right).$

15. а) $f(x)=10^{\frac{x}{\log_3 x}}\left(\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1}+\ln\sqrt{x^2-2x\cos\alpha+1}\right);$

б) $f(x)=x^{x^2}\sqrt{\cos x^2+\sqrt{\ln x+\operatorname{ch}5^{x^2}}}.$

16. а) $f(x)=\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})\arccos(\sin^4 x+\cos x^4)+\frac{\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{arctg}e^{\frac{x^2}{4}}};$

б) $f(x)=x^{2^x}\left(\sqrt[3]{\sin^3 x+1-\sqrt[3]{x}}+\ln\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}}}\right).$

17. а) $f(x)=7^{\sin^3 x^4}\left(\operatorname{tg}x+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{tg}x}\right);$

б) $f(x)=2^{\frac{x}{\log_5\sqrt[3]{x}}}(\sin^2 x)^{\operatorname{arctg}x}.$

18. а) $f(x)=\left(x+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(3x\ln(3x+\sqrt{9x^2+1})-\sqrt{9x^2+1}\right)$;

б) $f(x) = (\cos x)^{x^4}\cdot\sqrt{\operatorname{sh}x+\sqrt{x+\cos x}}$.

19. а) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cos x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right)$;

б) $f(x) = x^{\cos^2 x}\left(\cos x-\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+\operatorname{arcctg}(\cos x)\right)$.

20. а) $f(x) = \arccos(\sin x^2+\cos x^2)\cdot\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$;

б) $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{arctg}x^2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}\right)^2$.

21. а) $f(x) = \log_3\log_5\log_7 x\cdot\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{5}\right)$;

б) $f(x) = (\sin^4 x+\cos^4 x)^{x^3}\cdot\left(\operatorname{tg}x^2-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 2x\right)$.

22. а) $f(x) = e^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\left(\operatorname{ctg}x^2+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3(2x)\right)$;

б) $f(x) = (\operatorname{arcctg}x)^{\operatorname{ctg}x}\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{\cos^4 x}}+\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{\cos^2 x})\right)$.

3. Найти дифференциал dy:

1. $y = x\arcsin\frac{1}{x}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$, $\qquad x>0$.

2. $y = \operatorname{tg}\left(2\arccos\sqrt{1-2x^2}\right)$, $\qquad x>0$.

3. $y = \sqrt{1+2x}-\ln\left|x+\sqrt{1+2x}\right|$.

4. $y = x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}$.

5. $y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$, $\qquad x>0$.

6. $y = x\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|-\sqrt{x^2+3}$.

7. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + \operatorname{sh} x \cdot \ln \operatorname{ch} x$.

8. $y = \arccos \frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}$.

9. $y = \ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}\right)$.

10. $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x$.

11. $y = \frac{\ln|x|}{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}$.

12. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right) + \arcsin e^x$.

13. $y = x\sqrt{4-x^2} + a \arcsin\frac{x}{2}$.

14. $y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$.

15. $y = 2x + \ln|\sin x + 2\cos x|$.

16. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \frac{1}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$.

17. $y = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}\right|$.

18. $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}$.

19. $y = \operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x}$.

20. $y = \ln|x^2-1| - \frac{1}{x^2-1}$.

21. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)$.

22. $y = \ln\left|2x + 2\sqrt{x^2+x} + 1\right|$.

4. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

1. а) $\sqrt[3]{65}$; б) $\arcsin 0{,}08$.

2. а) $\operatorname{ctg} 45^\circ 10'$; б) $\sqrt[3]{7{,}76}$.

3. а) $e^{0{,}2}$; б) $\frac{0{,}98+\sqrt{5-0{,}98^2}}{2}$.

4. а) $\arcsin 0{,}5011$; б) $\sqrt[3]{1,012^3+7\cdot 1,012}$.

5. а) $\sqrt[3]{27{,}0081}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1{,}58+1}}$.

6. а) $\sin 359^\circ$; б) $\sqrt[3]{0,97^2+2\cdot 0,97+5}$.

7. а) $\operatorname{tg} 46^\circ$; б) $1,021^{11}$.

8. а) $\operatorname{arctg} 0{,}9$; б) $0,998^{21}$.

9. а) $\sqrt[4]{15{,}8}$; б) $\sqrt{4\cdot 2,56-1}$.

10. а) $\cos 151^\circ$; б) $\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1{,}016^2+1{,}016+1}}$.

11. а) $\lg 11$; б) $\sqrt[3]{8,36}$.

12. а) $\operatorname{arctg} 1{,}05$; б) $2,002^7$.

13. а) $\sqrt[4]{90}$; б) $2,997^5$.

14. а) $\operatorname{arctg} 1{,}002$; б) $\sqrt{0,98^3}$.

15. а) $\sin 29^\circ 30'$; б) $\sqrt[5]{1,03^2}$.

16. а) $\operatorname{ctg} 44^\circ 50'$; б) $3,998^4$.

17. а) $\sqrt[3]{123}$; б) $\sqrt{1,97^2+5}$.

18. а) $e^{0{,}15}$; б) $\sqrt[4]{2\cdot 1,02-\sin\frac{1{,}02\pi}{2}}$.

19. а) $\arcsin 0{,}95$; б) $\sqrt[3]{27,54}$.

20. а) $\lg 9$; б) $\sqrt{1,97^2 + 1,97 + 3}$.

21. а) $\operatorname{ctg} 44^\circ 44'$; б) $\sqrt[3]{1,03^2}$.

22. а) $\sqrt[4]{16,4}$; б) $\sqrt{1 + 0{,}01 + \sin 0{,}01}$.

5. Исследовать функцию:

1. При каких α и β функция $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x \leqslant 1, \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$
а) всюду непрерывна; б) всюду дифференцируема?

2. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x) = |x(x+1)|$.

3. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x) = |\sin x|$.

4. При каких α и β функция $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 0, \\ \alpha \cos x + \beta \sin x, & x \geqslant 0 \end{cases}$
а) всюду непрерывна; б) всюду дифференцируема?

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x) = x|x|$.

6. При каких α и β функция $f(x) = \begin{cases} \alpha \sin x + \beta \cos x, & x < 0, \\ \alpha + \beta x, & x \geqslant 0 \end{cases}$
а) всюду непрерывна; б) всюду дифференцируема?

7. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x) = |\pi - x| \sin x$.

8. Исследовать f' на непрерывность, если $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

9. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$

10. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x) = |x-1|e^{-x}$.

11. Исследовать на непрерывность и дифференцируемость функцию $f(x) = \begin{cases} x+1, \ x \leqslant 0, \\ x, \ 0 < x < 1, \\ 2-x, \ 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3x - x^2, \ x > 2. \end{cases}$

12. Определить значения α и β, при которых функция $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \alpha x, \ |x| \leqslant 1, \\ \beta \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, \ |x| > 1 \end{cases}$ имеет производную в точке $x = 1$.

13. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x) = |\cos x|$.

14. При каких α и β функция $f(x) = \begin{cases} (x+\alpha)e^{-\beta x}, \ x < 0, \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, \ x \geqslant 0 \end{cases}$ а) всюду непрерывна; б) всюду дифференцируема?

15. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x) = |x-1|e^{x}$.

16. При каких α и β функция $f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, \ |x| < 1, \\ \frac{1}{|x|}, \ |x| \geqslant 1 \end{cases}$ а) всюду непрерывна; б) всюду дифференцируема?

17. Исследовать на непрерывность и дифференцируемость функцию $f(x)=\begin{cases} x,\ x\leqslant 1, \\ x-1,\ 1<x<2, \\ 3-x,\ 2\leqslant x\leqslant 3, \\ 5x-x^2-4,\ x>3. \end{cases}$

18. Определить значения α и β, при которых функция $f(x)=\begin{cases} \alpha \operatorname{sgn} x+\frac{x-1}{2},\ |x|\leqslant 1, \\ \operatorname{arctg}\beta x,\ |x|>1 \end{cases}$ имеет производную в точке $x=-1$.

19. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x)=|\operatorname{tg} x|$.

20. При каких α и β функция $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+\beta x+1,\ x<0, \\ (x+\alpha)e^{-\beta x},\ x\geqslant 0 \end{cases}$

а) всюду непрерывна; б) всюду дифференцируема?

21. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x)=|x-2|\ln|x|$.

22. При каких α и β функция $f(x)=\begin{cases} \alpha x^4+\beta,\ |x|<2, \\ \frac{1}{|x|},\ |x|\geqslant 2 \end{cases}$

а) всюду непрерывна; б) всюду дифференцируема?

6. Решить задачу:

1. В какой точке параболы $y = x^2 - 2x - 1$ касательная к ней параллельна прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы? Составить уравнение касательной и нормали к параболе в этой точке.

2. В каких точках кривой $x^2+y^2+4x+2y+3 = 0$ касательная к ней параллельна прямой $2x+y+3 = 0$? Составить уравнение касательной и нормали к кривой в одной из этих точек.

3. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые $y = x^2 - 4x + 4$ и $y = -x^2 + 6x - 4$.

4. В какой точке параболы $y = x^2 - 2x + 2$ касательная к ней перпендикулярна прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы? Составить уравнение касательной и нормали к параболе в этой точке.

5. В каких точках кривой $2x^2-y^2+4x+2y+2 = 0$ касательная к ней параллельна прямой $2x-y+1 = 0$? Составить уравнение касательной и нормали к кривой в одной из этих точек.

6. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые $y = 4x^2 + 2x - 8$ и $y = x^2 - x + 10$.

7. В какой точке параболы $y = x^2 + 2x - 1$ касательная к ней параллельна прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы? Составить уравнение касательной и нормали к параболе в этой точке.

8. В каких точках кривой $x^2+y^2+4x+2y+1 = 0$ касательная к ней параллельна прямой $x-2y+1 = 0$? Составить уравнение касательной и нормали к кривой в одной из этих точек.

9. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые $y = x - x^3$ и $y = 5x$.

10. В какой точке параболы $y = x^2 + 2x + 2$ касательная к ней перпендикулярна прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы? Составить уравнение касательной и нормали к параболе в этой точке.

11. В каких точках кривой $x^2+y^2+4x+2y+3 = 0$ касательная к ней перпендикулярна прямой $2x + y + 3 = 0$? Составить уравнение касательной и нормали к кривой в одной из этих точек.

12. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые $y = x^2 + 4x + 4$ и $y = 2 - (x + 2)^2$.

13. В какой точке параболы $y = 2x^2 + 8x + 7$ касательная к ней параллельна прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы? Составить уравнение касательной и нормали к параболе в этой точке.

14. В каких точках кривой $x^2-y^2+4x+2y+1 = 0$ касательная к ней перпендикулярна прямой $x - 2y + 1 = 0$? Составить уравнение касательной и нормали к кривой в одной из этих точек.

15. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые $y = (x + 3)^2$ и $y = x^2 - 6x + 9$.

16. В какой точке параболы $y = 2x^2 + 8x + 9$ касательная к ней перпендикулярна прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы? Составить уравнение касательной и нормали к параболе в этой точке.

17. В каких точках кривой $2x^2 - y^2 + 4x + 2y + 2 = 0$ касательная к ней перпендикулярна прямой $2x - y + 1 = 0$? Составить уравнение касательной и нормали к кривой в одной из этих точек.

18. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые $y = x^2 + x + 10$ и $y = 4x^2 - 2x - 8$.

19. В какой точке параболы $y = 2x^2 - 8x + 7$ касательная к ней параллельна прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы? Составить уравнение касательной и нормали к параболе в этой точке.

20. В каких точках кривой $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 3 = 0$ касательная к ней параллельна прямой $x + 2y + 3 = 0$? Составить уравнение касательной и нормали к кривой в одной из этих точек.

21. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые $y = -x^2 - 6x - 4$ и $y = x^2 + 4x + 4$.

22. В какой точке параболы $y = 2x^2 - 8x + 9$ касательная к ней перпендикулярна прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы? Составить уравнение касательной и нормали к параболе в этой точке.

7. Найти производные указанного порядка следующих функций:

1. а) $f(x) = (2x^2 + x + 1)e^{2x}$, $\quad f^{(100)}(x) = ?$
б) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2x + 3}$, $\quad f^{(50)}(x) = ?$

2. а) $f(x) = \sin^2 x \cdot \sin 2x$, $\quad f^{(50)}(x) = ?$
б) $f(x) = (x^2 + 7) \cdot 3^{2x}$, $\quad f^{(70)}(x) = ?$

3. а) $f(x) = \ln \frac{2x - 3}{2x + 3}$, $\quad f^{(15)}(x) = ?$
б) $f(x) = (x^3 + 2) \cdot \cos 3x$, $\quad f^{(50)}(x) = ?$

4. а) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1 - x}$, $\quad f^{(100)}(x) = ?$
б) $f(x) = (2x^2 - 5) \sin 3x$, $\quad f^{(15)}(x) = ?$

5. а) $f(x) = (x^2 + 1) \ln x$, $\quad f^{(30)}(x) = ?$
б) $f(x) = \sin^3 5x$, $\quad f^{(17)}(x) = ?$

6. а) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x + 5}}$, $\quad f^{(35)}(x) = ?$
б) $f(x) = \cos^4 x$, $\quad f^{(15)}(x) = ?$

7. а) $f(x) = x^2 \sqrt{x + 1}$, $\quad f^{(20)}(x) = ?$
б) $f(x) = \sin 5x \cdot \cos 8x$, $\quad f^{(15)}(x) = ?$

8. а) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x - 12}$, $\quad f^{(15)}(x) = ?$
б) $f(x) = (1 - x^2) \cos^2 3x$, $\quad f^{(12)}(x) = ?$

9. а) $f(x) = (x^2 + 2) \sin^2 3x$, $\quad f^{(40)}(x) = ?$
б) $f(x) = \ln(4 + 4x + x^2)$, $\quad f^{(15)}(x) = ?$

10. а) $f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 3}{x + 4}$, $\quad f^{(20)}(x) = ?$
б) $f(x) = (x^4 - x^2) \cos^2 3x$, $\quad f^{(15)}(x) = ?$

11. а) $f(x) = (x^2 + 5x - 7) \cos^2 2x$, $\quad f^{(17)}(x) = ?$

б) $f(x) = \frac{3x+4}{4x+3}, \qquad f^{(40)}(x) = ?$

12. а) $f(x) = \frac{15x^2+3x+4}{x+4}, \qquad f^{(15)}(x) = ?$
б) $f(x) = (x^3 - 7x + 8)e^{2x}, \qquad f^{(20)}(x) = ?$

13. а) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}, \qquad f^{(30)}(x) = ?$
б) $f(x) = (x^3 - x^2 + 3)\operatorname{ch} 3x, \qquad f^{(15)}(x) = ?$

14. а) $f(x) = \frac{2x+8}{3-x}, \qquad f^{(16)}(x) = ?$
б) $f(x) = (x^5 - 3x)\cos^2 5x, \qquad f^{(20)}(x) = ?$

15. а) $f(x) = \frac{3x^2+4x-5}{x+2}, \qquad f^{(15)}(x) = ?$
б) $f(x) = (x^2 + 3x + 1)\sin 7x, \qquad f^{(40)}(x) = ?$

16. а) $f(x) = (x^3 + 8)\sqrt[7]{2x+1}, \qquad f^{(20)}(x) = ?$
б) $f(x) = \frac{5x-8}{8x-5}, \qquad f^{(15)}(x) = ?$

17. а) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[5]{1+x}}, \qquad f^{(20)}(x) = ?$
б) $f(x) = (3x^2 + 2x + 5)e^{3x}, \qquad f^{(90)}(x) = ?$

18. а) $f(x) = \frac{4x+7}{2-x}, \qquad f^{(19)}(x) = ?$
б) $f(x) = (2x^2 + 11) \cdot 2^{3x}, \qquad f^{(50)}(x) = ?$

19. а) $f(x) = \frac{2x^2+3x-4}{x+2}, \qquad f^{(17)}(x) = ?$
б) $f(x) = (x^3 + x^2 + 1) \cdot \cos 5x, \qquad f^{(40)}(x) = ?$

20. а) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x+7}}, \qquad f^{(55)}(x) = ?$
б) $f(x) = (3x^2 + 2)\sin 5x, \qquad f^{(19)}(x) = ?$

21. а) $f(x) = \sin^3 7x, \qquad f^{(27)}(x) = ?$
б) $f(x) = (x^4 - 5x)\cos^2 3x, \qquad f^{(40)}(x) = ?$

22. а) $f(x) = \ln\frac{3x-5}{3x+5}, \qquad f^{(25)}(x) = ?$
б) $f(x) = (x^3 + 27)\sqrt[9]{2x+3}, \qquad f^{(30)}(x) = ?$

8. Найти указанные производные параметрически заданных функций: а) y'_x; б) y''_{xx}.

1. а) $\begin{cases} x = \frac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y = \sin\left(\frac{t^3}{3} + t\right); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2\sec^2 t. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \operatorname{tg}\sqrt{1+t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-t)^2}}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right), \\ y = t\sqrt{t^2+1}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \arcsin(t-1); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln(\operatorname{tg} e^t); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} x = \ln(\operatorname{ctg} t), \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{t/2}, \\ y = \sqrt{e^t+1}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1-t^2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} x = \ln\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}, \\ y = \arcsin\frac{1-t^2}{1+t^2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \frac{\cos t}{1+2\cos t}, \\ y = \frac{\sin t}{1+2\cos t}. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{1-t^2}, \\ y = \arccos^2 t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sqrt{t^3-1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y = \ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} x = (1+\cos^2 t)^2, \\ y = \frac{\cos t}{\sin^2 t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} x = \ln\frac{1-t}{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} x = \arccos\frac{1}{t}, \\ y = \sqrt{t^2-1} + \arcsin\frac{1}{t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} x = \frac{1}{\ln t}, \\ y = \ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln\cos t. \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} x = \arcsin^2 t, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} x = t\sqrt{t^2+1}, \\ y = \ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$

22. а) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln\frac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

9. Составить уравнения касательной и нормали к параметрически заданной кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$:

1. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t; \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{3};$

2. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t; \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{3};$

3. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{3};$

4. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3; \end{cases} \quad t_0 = 1;$

5. $\begin{cases} x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}, \\ y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}; \end{cases} \quad t_0 = 1;$

6. $\begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases} \quad t_0 = -1;$

7. $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t), \\ y = t(t\sin t + 2\cos t); \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4};$

8. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}; \end{cases} \quad t_0 = 2;$

9. $\begin{cases} x = 2\ln \operatorname{ctg} t + \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t; \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4};$

10. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3; \end{cases} \quad t_0 = 0;$

11. $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t; \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{2};$

12. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t; \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{6};$

13. $\begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$ $t_0 = 1;$

14. $\begin{cases} x = \frac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \frac{3+2\ln t}{t}; \end{cases}$ $t_0 = 1;$

15. $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^2}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}; \end{cases}$ $t_0 = 2;$

16. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t; \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{6};$

17. $\begin{cases} x = a(t\sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t\cos t); \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{4};$

18. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}; \end{cases}$ $t_0 = -1;$

19. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3; \end{cases}$ $t_0 = 2;$

20. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t; \end{cases}$ $t_0 = 1;$

21. $\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t\cos t; \end{cases}$ $t_0 = 0;$

22. $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1}; \end{cases}$ $t_0 = 2;$

10. Показать, что функция y удовлетворяет уравнению:

1. $y = xe^{-x^2/2}; \qquad xy' = (1-x^2)y.$

2. $y = \frac{\sin x}{x}; \qquad xy' + y = \cos x.$

3. $y = 5e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x; \qquad y' + 2y = e^x.$

4. $y = 2 + C\sqrt{1-x^2}; \qquad (1-x^2)y' + xy = 2x.$

5. $y = x\sqrt{1-x^2}; \qquad yy' = x - 2x^3.$

6. $y = \frac{C}{\cos x}; \qquad y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0.$

7. $y = -\frac{1}{3x+C}; \qquad y' = 3y^2.$

8. $y = \ln(C + e^x); \qquad y' = e^{x-y}.$

9. $y = \sqrt{x^2 - Cx}; \qquad (x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0.$

10. $y = x(C - \ln x); \qquad (x-y)dx + xdy = 0.$

11. $y = e^{\operatorname{tg}(x/2)}; \qquad y' \sin x = y \ln y.$

12. $y = \frac{1+x}{1-x}; \qquad y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}.$

13. $y = \frac{b+x}{1+bx}; \qquad y - xy' = b(1 + x^2 y').$

14. $y = \sqrt[3]{2 + 3x - 3x^2}; \qquad yy' = \frac{1-2x}{y}.$

15. $y = \sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2 + 1}; \qquad (1+e^x)yy' = e^x.$

16. $y = \operatorname{tg} \ln 3x; \qquad (1+y^2)dx = xdy.$

17. $y = -\sqrt{\frac{2}{x^2} - 1}; \qquad 1 + y^2 + xyy' = 0.$

18. $y = \sqrt[3]{x - \ln x - 1}; \qquad \ln x + y^3 - 3xy^2y' = 0.$

19. $y = a + \frac{7x}{ax+1}; \qquad y - xy' = a(1 + x^2y').$

20. $y = a\,\mathrm{tg}\sqrt{\frac{a}{x} - 1}; \qquad a^2 + y^2 + 2xy'\sqrt{ax - x^2} = 0.$

21. $y = \sqrt[4]{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}; \qquad 8xy' - y = -\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}.$

22. $y = (x+1)e^{x^2}; \qquad y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 6 «ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ»

1. Пользуясь правилом Лопиталя, найти:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{\ln \operatorname{sh} x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{\arcsin x-\ln(1+x)}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{x^2\arcsin x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{\ln^3(1+x)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\ln(1+x)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} 2x-1}{\sin x\ln(1+x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg} 3x-6\operatorname{tg} x}{3\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} 3x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\operatorname{arctg} x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x^2+3^x)^{\frac{1}{x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

16. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$.

17. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{2}{\ln\sin x}}$.

18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+\sqrt{11x^2+12}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x\arcsin^2 x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{arctg} x\ln(1+x)}$.

21. $\lim\limits_{x\to +\infty}(9x^5+7^x)^{\frac{2}{x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{\operatorname{arctg}^2 x}$.

2. Разложить функцию по формуле Маклорена:

1. $f(x) = \frac{2+x}{3-x}$.

2. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

3. $f(x) = (2x+1)\sqrt{1-x}$.

4. $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$.

5. $f(x) = x\sqrt[3]{4-4x+x^2}$.

6. $f(x) = \frac{x^2+3e^x}{e^{2x}}$.

7. $f(x) = \sin x \cos 2x$.

8. $f(x) = x \operatorname{ch}^2 x$.

9. $f(x) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} 2x$.

10. $f(x) = \frac{x}{3} \ln \frac{x^2-1}{x^2-e}$.

11. $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+4}$.

12. $f(x) = \frac{1}{x^4-8x^2+15}$.

13. $f(x) = (2x+3)e^{\frac{x}{2}}$.

14. $f(x) = \frac{x+4}{x^2-5x+6}$.

15. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-x-2}$.

16. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{9-6x+x^2}}$.

17. $f(x) = \ln(x^2+5x+6)$.

18. $f(x) = \cos^3 x$.

19. $f(x) = 3x \cos x \cos 5x$.

20. $f(x) = x\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$.

21. $f(x) = \frac{1}{x^4-8x^2+15}$.

22. $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$.

3. Используя формулу Маклорена, найти:

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e\sqrt[3]{1-4x^2}}{\frac{1}{x}\arcsin 2x-2\operatorname{ch}x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\log_2\left(\frac{3-4x}{1-2x}-\frac{1+4x}{1+2x}\right)\right)^{2\operatorname{sh}x/(x-\sin x)}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sqrt{1+2x}-\operatorname{tg}x)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2}{xe^{x^2}-\sin x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{th}x\ln\frac{1+x}{1-x}-2x^2\cos x^2\right)^{1/x^4}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x}-e^{-x}+x^2\sqrt[3]{1+x}}{\sin^2 x-\ln\operatorname{ch}^2 x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}x\operatorname{arctg}x-x^2\operatorname{ch}^2 x\right)^{1/(1-\cos x)^2}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\frac{1}{2}\operatorname{sh}x^2-x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\arcsin x-x^2e^{x^2}\right)^{1/\sin^2 x^2}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{\operatorname{tg}x}-e^{-\operatorname{sh}x}-\frac{x^2(x+5)}{x+6}}{\frac{\ln(2e^{x^2}-1)}{\sin x}-\operatorname{arctg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}\operatorname{sh}x}{\sin x}\right)^{1/\sin^4 x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sqrt{\cos 2x+\operatorname{sh}2x}-e^x}{x}+\frac{2x(2-x)}{2+x}}{\frac{\ln\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}-\frac{1}{2}\arcsin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin(x\cos x)}{\operatorname{arctg}x}\right)^{1/\sin x^4}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}-\operatorname{sh}x-\cos x}{\sqrt[6]{1+x}+\sqrt[6]{1-x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+\cos 2x}-e^{\operatorname{tg}x}+2x^2}{2\sin x-2\ln(1+x)-x^2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{1+x^3}-\sin 1}{\sqrt[5]{1-2x\ln\cos x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1+\cos x}-e^{2+x^2}+\frac{3}{2}e^2\sin x^2}{\ln(1+x^2)-\operatorname{arctg}^2 x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{1}{8}x^2-1}{e^x-\sqrt{1+2x}-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}\sin x^3+\sin\operatorname{sh}x^3}{\frac{1}{2}x^2\sqrt{1-x}+\ln(1+x)-x\cos x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x\ln\cos x}-(1+4x)^{1/4}+x-\frac{3}{2}x^2}{x\sin x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)}{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x-\frac{1}{6}x^2)-\operatorname{sh}x+\frac{2}{3}x^2}{\sin 2x-2x\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-e^{\sin x}+\frac{3}{2}x^2}{\arcsin x-\operatorname{tg}x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\sin x+\ln\cos x-x}{\sqrt[3]{1-x^3}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{arctg}\sin x-\operatorname{tg}\operatorname{sh}3x}{\sqrt{1+x}\sin x^3-x^2\ln\left(1-\frac{16}{9}x\right)}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-6x^2+e^{\sin x\ln\cos x}-(1+8x)^{1/4}}{x\sin x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\ln(e+x)}-e^{\frac{x}{3e}}+\frac{x^2}{3e^2}}{x\operatorname{ch}x-\sin x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1+\sin x}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-x}{x\operatorname{tg}^2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-x}{\sqrt{1+x^2-\ln(1+x^2)}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)-2\sin x+2x\cos x^2}{\operatorname{arctg}x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{ch}x+2\cos x}{3}+\dfrac{x^2}{6(1+x^2)}\right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}x^4}}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x-x^2}-x\sqrt[3]{1-\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-\arcsin x}{\operatorname{sh}(x-x^2)-\ln\sqrt{1+2x}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x^2}{e^{\arcsin x}-e^{\sin x}-\frac{1}{2}x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sin x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2\right)^{\frac{1}{\sin x^4}}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x^2}{2}}-e^{\frac{x^2}{6}}}{x^2\ln(1+x)-\operatorname{tg}x^3\cos\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+x^2\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^{\frac{x+e}{\arcsin x^2}}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}x^2-1}{e^x-\sqrt{1+2x}-x^2+\frac{1}{3}x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{ch}x+2\cos x}{3}+\dfrac{x^2}{6(1+x^2)}\right)^{\frac{1}{\arcsin x^4}}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos(2x+x^2)+2\arcsin(xe^x)-2x\right)^{\operatorname{ctg}^2x+\frac{1}{3x^3}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1+\operatorname{ch}x}-e^{2-x^2}-\frac{3}{2}e^2\sin x^2}{\ln(1+x^2)-\operatorname{arctg}^2x}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x+\ln\cos x+\sqrt{1+x}\sin x}{\sqrt[3]{1-x^3}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\ln(1+x)}{x^2}-\dfrac{2}{(x+1)\operatorname{sh}x}\right)^{\operatorname{ctg}x}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-\cos x\ln(1+x)}{\ln\sin x-\ln x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}+\frac{x^2}{2}-\sin x\right)^{\frac{1}{\operatorname{sh}x-\operatorname{arctg}x}}$.

4. Вычислить с указанной точностью:

1. $\sqrt[3]{127}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

2. $\sqrt[4]{83}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

3. $\sin 85^\circ, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

4. $\ln 1{,}3\ , \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

5. $e, \quad \varepsilon = 10^{-7}$.

6. $\sin 1^\circ, \quad \varepsilon = 10^{-6}$.

7. $\sqrt[3]{30}, \quad \varepsilon = 10^{-4}$.

8. $\sqrt{e}, \quad \varepsilon = 10^{-5}$.

9. $\sqrt[3]{250}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

10. $\sqrt[3]{e}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

11. $\cos 72^\circ, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

12. $\operatorname{arctg} 0,8, \quad \varepsilon = 10^{-4}$.

13. $\sqrt{10}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

14. $\cos 5^\circ, \quad \varepsilon = 10^{-5}$.

15. $\lg 11, \quad \varepsilon = 10^{-4}$.

16. $\sqrt[4]{e}, \quad \varepsilon = 10^{-6}$.

17. $\sqrt[3]{66}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

18. $\cos 80^\circ, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

19. $\ln 1{,}2\ , \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

20. $\cos 2^\circ, \quad \varepsilon = 10^{-6}$.

21. $\sqrt[5]{e}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

22. $\sqrt[4]{250}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

5. Найти $\inf\limits_{x\in E} f(x)$ и $\sup\limits_{x\in E} f(x)$:

1. а) $f(x) = x^2 + \frac{16}{x} - 16, \quad E = [1;4]$;
б) $f(x) = \frac{2x+1}{x} e^{\frac{1}{x}}, \quad E = (-2;0)$.

2. а) $f(x) = 4 - x - \frac{4}{x^2}, \quad E = [1;4]$;
б) $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x^2+3}}, \quad E = (-1;+\infty)$.

3. а) $f(x) = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1, \quad E = [0;6]$;
б) $f(x) = \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}, \quad E = (0;+\infty)$.

4. а) $f(x)=\frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}, \quad E=[-3;3];$
б) $f(x)=\ln\left(2-\frac{1}{x^2+1}\right), \quad E=(-1;+\infty).$

5. а) $f(x)=2\sqrt{x}-x, \quad E=[0;4];$
б) $f(x)=(x^2+2x-2)e^{-x}, \quad E=(0;+\infty).$

6. а) $f(x)=1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}, \quad E=[-1;5];$
б) $f(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{-\frac{1}{x}}, \quad E=(0;3).$

7. а) $f(x)=x-4\sqrt{x}+5, \quad E=[1;9];$
б) $f(x)=\ln\left(\frac{2}{1+x^2}+1\right), \quad E=(-\infty;1).$

8. а) $f(x)=\frac{10x}{1+x^2}, \quad E=[0;3];$
б) $f(x)=\left(\frac{1}{5}x^3+x^2+2x+2\right)e^{1-x}, \quad E=(-1;+\infty).$

9. а) $f(x)=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}-2, \quad E=[-3;3];$
б) $f(x)=e^{\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}}, \quad E=(0;+\infty).$

10. а) $f(x)=2x^2+\frac{108}{x}-59, \quad E=[2;4];$
б) $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}, \quad E=(-2;0).$

11. а) $f(x)=3-x-\frac{4}{(x+2)^2}, \quad E=[-1;2];$
б) $f(x)=\ln\frac{x^2+1}{x^2+5}, \quad E=(-\infty;1).$

12. а) $f(x)=\sqrt[3]{2x^2(x-3)}, \quad E=[-1;6];$
б) $f(x)=\frac{x^2}{1+x^4}-\operatorname{arctg}x^2, \quad E=(-1;+\infty).$

13. а) $f(x)=\frac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2}, \quad E=[1;4];$
б) $f(x)=(x^2-5x+5)e^{x-1}, \quad E=(-\infty;1).$

14. а) $f(x)=x-4\sqrt{x+2}+8, \quad E=[-1;7];$
б) $f(x)=\frac{x-2}{x}e^{-\frac{2}{x}}, \quad E=(0;4).$

15. а) $f(x)=\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, $\quad E=[1;5]$;
б) $f(x)=\ln\frac{1+x^2}{1+x+x^2}$, $\quad E=(0;+\infty)$.

16. а) $f(x)=\frac{4x}{4+x^2}$, $\quad E=[-4;2]$;
б) $f(x)=(x^3-3x^2+6x-14)e^{x-3}$, $\quad E=(-\infty;3)$.

17. а) $f(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8$, $\quad E=[-4;-1]$;
б) $f(x)=\frac{4x^2}{1+16x^4}-\operatorname{arctg}(4x^2)$, $\quad E=(-1;+\infty)$.

18. а) $f(x)=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$, $\quad E=[-2;4]$;
б) $f(x)=(x^2+7x-7)e^{x-1}$, $\quad E=(-\infty;1)$.

19. а) $f(x)=\frac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$, $\quad E=[1;4]$;
б) $f(x)=\left(1-\frac{3}{x}\right)e^{-\frac{3}{x}}$, $\quad E=(0;4)$.

20. а) $f(x)=-\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$, $\quad E=[-5;1]$;
б) $f(x)=\ln\frac{1+x^2}{1+2x+x^2}$, $\quad E=(0;+\infty)$.

21. а) $f(x)=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$, $\quad E=[0;4]$;
б) $f(x)=\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{x^2+1}$, $\quad E=(0;+\infty)$.

22. а) $f(x)=x^2-2x+\frac{16}{x-1}-13$, $\quad E=[2;5]$;
б) $f(x)=e^{\frac{2+2x-x^2}{2-2x+x^2}}$, $\quad E=(0;+\infty)$.

6. Решить задачу:

1. Найти наибольший объем конуса с образующей l.

2. Определить отношение радиуса основания к высоте цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

3. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определить радиус полукруга, при котором площадь сечения будет наибольшей, если периметр сечения равен p.

4. Вычислить наибольший объем цилиндра, полная поверхность которого равна S.

5. Найти наибольший объем цилиндра, периметр осевого сечения которого равен a.

6. Лист картона имеет форму прямоугольника со сторонами a и b. Вырезая по углам этого прямоугольника квадраты и сгибая выступающие части крестообразной фигуры, получим открытую сверху коробку, высота которой равна стороне квадрата. Какой должна быть сторона квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

7. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ так, что стороны прямоугольника параллельны осям эллипса.

8. Через точку $A\left(2;\frac{1}{4}\right)$ проводятся прямые, пересекающие положительные полуоси в точках B и C. Найти уравнение той прямой, для которой отрезок BC имеет наименьшую длину.

9. Консервная банка имеет цилиндрическую форму. Найти наиболее выгодные размеры банки, т.е. определить отношение диаметра основания к высоте цилиндра, имеющего при заданной полной поверхности наибольший объем.

10. Вычислить наибольшую площадь трапеции, вписанной в полукруг радиуса R так, что нижним основанием трапеции служит диаметр полукруга.

11. Найти длину боковой стороны трапеции, имеющей наименьший периметр среди всех равнобедренных трапеций с заданной площадью S и углом α между боковой стороной и нижним основанием.

12. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точку $A(1;2)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник наименьшей площади.

13. Найти на параболе $y = x^2$ точку, ближайшую к точке $A\left(2; \frac{1}{2}\right)$

14. Найти на гиперболе $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ точку, ближайшую к точке $(3;0)$.

15. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса R.

16. Среди всех прямоугольников, имеющих данную площадь S, найти прямоугольник с наименьшей диагональю.

17. При подготовке к экзамену по математическому анализу студент за t дней изучает $\frac{t}{t+\frac{1}{2}}$ часть курса, а забывает $\frac{2t}{49}$ части курса. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

18. Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты $H = 500$ м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k = 100$ кг$/c^2$. Считая, что начальная скорость $v_0 = 0$, ускорение $g = 10$ м$/c^2$, и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.

19. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точку $A(1;-2)$ и отсекающей от четвертого координатного угла треугольник наименьшей площади.

20. Найти на гиперболе $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ точку, ближайшую к точке $(0;3)$.

21. При подготовке к экзамену по математическому анализу студент за t дней изучает $\frac{t}{t+2}$ часть курса, а забывает $\frac{t}{18}$ часть курса. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

22. Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты $H = 2000$ м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k = 100$ кг$/c^2$. Считая, что начальная скорость $v_0 = 0$, ускорение $g = 10$ м$/c^2$, и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.

7. Доказать неравенство:

1. $\ln(1+x^2) \geqslant \frac{x^2}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

2. $1 - 2\ln|x| \leqslant \frac{1}{x^2} \qquad \forall x \neq 0.$

3. $\operatorname{arctg} x > x - \frac{x^3}{3} \qquad \forall x \in (0;1].$

4. $\operatorname{arctg} x < x - \frac{x^3}{6} \qquad \forall x \in (0;1].$

5. $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1} \qquad \forall x > 0.$

6. $e^{x^2} \geqslant 1 + \ln(1+x^2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

7. $e^x \geqslant 1 + \ln(1+x) \qquad \forall x \geqslant 0.$

8. $\frac{\ln x}{x-1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \forall x > 1.$

9. $\sin x > x - \frac{x^3}{6} \qquad \forall x > 0.$

10. $\operatorname{arctg} x^2 \leqslant x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

11. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x \qquad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

12. $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} \qquad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

13. $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \qquad \forall x > 0.$

14. $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1 \qquad \forall x \in [0; 1],\ p > 1.$

15. $\frac{x-y}{x} < \ln \frac{x}{y} \qquad \forall\ 0 < y < x.$

16. $\ln \frac{x}{y} < \frac{x-y}{y} \qquad \forall\ 0 < y < x.$

17. $e^{(x+y)/2} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

18. $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

19. $\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi} \qquad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

20. $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

21. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \geqslant \cos x \qquad \forall\ 0 < |x| \leqslant \frac{\pi}{2}.$

22. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leqslant \frac{x^n + y^n}{2} \qquad \forall x, y \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}.$

8. Решить задачу:

1. При каких p и q уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет один действительный корень?

2. При каких p и q уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет три действительных корня?

3. Сколько действительных корней имеет уравнение $|x^2 - 3x + 4| = a$?

4. Доказать, что при $a^2 - 3b < 0$ уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет один действительный корень.

5. Определить число действительных корней уравнения $2^x = ax^2$.

6. Определить число действительных корней уравнения $x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0$.

7. Определить число действительных корней уравнения $x^5 - 5x = a$.

8. При каком a уравнение $e^x = a + x - x^2$ имеет два действительных корня?

9. Определить число действительных корней уравнения $\ln x = kx$.

10. Определить число действительных корней уравнения $\ln x = kx^2$.

11. При каких a уравнение $2x^3 + 13x^2 - 20x + a = 0$ имеет один действительный корень?

12. Определить число действительных корней уравнения $x \ln x = a$.

13. При каких a уравнение $3x^4+8x^3+a=0$ имеет два простых корня?

14. Определить число действительных корней уравнения $x^2 = a \ln x$.

15. Определить число действительных корней уравнения $a^x = bx$.

16. Определить число действительных корней уравнения $3x^3 + 1,5x^2 - 12x + a = 0$.

17. Определить число действительных корней уравнения $x^7 - 7x = a$.

18. Определить число действительных корней уравнения $x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$.

19. Определить число действительных корней уравнения $e^x = ax^2$.

20. Определить число корней уравнения $\sin^3 x \cdot \cos x = a$ на отрезке $[0, \pi]$.

21. При каком a уравнение $x^2 - x = a - e^{2x+1}$ имеет два действительных корня?

22. Сколько действительных корней имеет уравнение $|x^4 - 4x + 4| = a$?