

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории функций

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
для студентов механико-математического факультета

МИНСК
БГУ
2012

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент выполняет индивидуальные задания в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради студент указывает свою фамилию, имя, номер учебной группы и вариант индивидуального задания.

Решения задач следует излагать в порядке номеров, указанных в задании.

Решения задач излагать **подробно и аккуратно, выполняя все необходимые теоретические обоснования.**

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 8 «НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

1. Найти интегралы, применяя метод подведения под знак дифференциала:

- | | |
|--|---|
| 1. а) $\int \frac{x dx}{5+7x^4};$ | б) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2 \cos x}}.$ |
| 2. а) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}};$ | б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$ |
| 3. а) $\int x^3 \sqrt{2x^4 - 3} dx;$ | б) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx.$ |
| 4. а) $\int \frac{x^2 dx}{5-x^6};$ | б) $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x \cdot \sqrt{1-x^2}}.$ |
| 5. а) $\int x \sqrt{125 - 5x^2} dx;$ | б) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}.$ |
| 6. а) $\int \frac{x dx}{2x^2+3};$ | б) $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\cos^2 x}.$ |
| 7. а) $\int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{2/3}};$ | б) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$ |
| 8. а) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{7-x^6}};$ | б) $\int e^{2 \sin x} \cos x dx.$ |
| 9. а) $\int \frac{(x+\frac{1}{2}) dx}{x^2+x+1};$ | б) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx.$ |
| 10. а) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(3x^3-2)^2}};$ | б) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}.$ |
| 11. а) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+1};$ | б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx.$ |
| 12. а) $\int x^2 \sqrt[5]{x^3 + 2} dx;$ | б) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx.$ |
| 13. а) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}};$ | б) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx.$ |
| 14. а) $\int \frac{(4x-6) dx}{x^2-3x+8};$ | б) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}.$ |
| 15. а) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-2}};$ | б) $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x} dx.$ |

16. а) $\int \frac{2x dx}{3x^4+2}$; б) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$.
17. а) $\int x \cdot \sqrt[3]{x^2+3} dx$; б) $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}} dx$.
18. а) $\int \frac{4x-6}{\sqrt{x^2-3x+8}} dx$; б) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{9+4 \cos x}}$.
19. а) $\int \frac{x dx}{6+5x^4}$; б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+4 \sin x}}$.
20. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}$.
21. а) $\int x^4 \sqrt{3x^5-4} dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx$.
22. а) $\int \frac{x^3 dx}{7-x^8}$; б) $\int \frac{dx}{\arcsin^5 x \cdot \sqrt{1-x^2}}$.

2. Найти интегралы, используя метод разложения подынтегрального выражения:

1. а) $\int \frac{x^2}{(1+x)^8} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)(3-x)}$;
 в) $\int \sin 2x \sin 3x dx$.
2. а) $\int x(2-x)^{10} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)}$;
 в) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$.
3. а) $\int x^3 \sqrt{1-x^2} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+2)(1-x)}$;
 в) $\int \cos x \cos 3x dx$.
4. а) $\int \frac{x^3 dx}{1+x}$; б) $\int \frac{dx}{(3x^2+1)(3x^2-2)}$;
 в) $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx$.
5. а) $\int x \sqrt{1-5x} dx$; б) $\int \frac{dx}{(2x+3)(2x+5)}$;
 в) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

6. а) $\int \frac{x^2 dx}{(1-x)^{50}}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+5x-6}$;
 в) $\int \frac{7+3 \cos^4 x}{\cos^2 x} dx$.
7. а) $\int x^3 \sqrt{x^2+1} dx$; б) $\int \frac{dx}{(\sqrt{5+x})(\sqrt{5+x+1})}$;
 в) $\int \sin 2x \cos 4x dx$.
8. а) $\int \frac{x^2 dx}{(2-x)^{30}}$; б) $\int \frac{dx}{(1-x)(3-x)}$;
 в) $\int \operatorname{sh}^3 x dx$.
9. а) $\int x^3 \sqrt[5]{x^2+2} dx$; б) $\int \frac{x dx}{(x^2-2)(x^2-1)}$;
 в) $\int \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 dx$.
10. а) $\int x \sqrt{8-2x} dx$; б) $\int \frac{dx}{(2+x)(4-x)}$;
 в) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$.
11. а) $\int \frac{2+x}{2-x} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;
 в) $\int \frac{5-4 \sin^4 x}{\sin^2 x} dx$.
12. а) $\int \frac{x dx}{\sqrt[5]{1-2x}}$; б) $\int \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$;
 в) $\int \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx$.
13. а) $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx$; б) $\int \frac{dx}{(4x-3)(1-4x)}$;
 в) $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx$.
14. а) $\int x \sqrt{2-3x} dx$; б) $\int \frac{x dx}{(x^2+2)(x^2+3)}$;
 в) $\int \left(2 + \sin \frac{x}{2}\right)^2 dx$.
15. а) $\int \frac{3+x}{3-x} dx$; б) $\int \frac{dx}{(3x-5)(-3x+1)}$;
 в) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$.

16. а) $\int \frac{x+2}{2x-1} dx$; б) $\int \frac{x dx}{x^4-3x^2+2}$;
 в) $\int \cos x \cos 2x \cos 5x dx$.
17. а) $\int x \cdot \sqrt[3]{3-x} dx$; б) $\int \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+3)}$;
 в) $\int \left(3 + \cos \frac{x}{3}\right)^2 dx$.
18. а) $\int 2x \cdot \sqrt[3]{3+5x} dx$; б) $\int \frac{x dx}{(x^2-1)(x^2+1)}$;
 в) $\int (\cos 2x - \sin x)^2 dx$.
19. а) $\int x \sqrt{2-3x} dx$; б) $\int \frac{dx}{(2x-3)(2x-5)}$;
 в) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.
20. а) $\int \frac{x^2 dx}{(1-x)^{40}}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+5x-14}$;
 в) $\int \frac{5+7 \sin^4 x}{\sin^2 x} dx$.
21. а) $\int x^3 \sqrt{x^2+3} dx$; б) $\int \frac{dx}{(\pi+x)(\pi+x-1)}$;
 в) $\int \sin 3x \cos 6x dx$.
22. а) $\int \frac{x^2 dx}{(7-x)^{70}}$; б) $\int \frac{dx}{(5-x)(9-x)}$;
 в) $\int \operatorname{ch}^3 x dx$.

3. Найти интегралы, применяя метод интегрирования по частям:

1. а) $\int (x^2 - 3x + 4) \cos 3x dx$; б) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$;
 в) $\int \sqrt{1+x^2} dx$; г) $\int \frac{2x^2+1}{x^2+1} \operatorname{arctg} x dx$.
2. а) $\int (x^2 + 1)e^{-2x} dx$; б) $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$;

- В) $\int e^x \cos^2 x dx$;
3. а) $\int (x^2 + 2x + 5) \sin 4x dx$;
- В) $\int \sin \ln x dx$;
4. а) $\int (x^2 - 5) \operatorname{sh} 5x dx$;
- В) $\int e^{\arccos x} dx$;
5. а) $\int (3x^2 - 7x + 8) \operatorname{ch} 2x dx$;
- В) $\int \cos \ln x dx$;
6. а) $\int (x - 2)(x - 3)5^{4x} dx$;
- В) $\int 2^x \sin 2x dx$;
7. а) $\int (2x^2 + 5x - 3) \cos x dx$;
- В) $\int \sqrt{x^2 + 5} dx$;
8. а) $\int (x^2 + 4x - 1)e^{3x} dx$;
- В) $\int e^{\arcsin x} dx$;
9. а) $\int (-x^2 + 4x + 3) \sin 2x dx$;
- В) $\int 3^x \sin^2 x dx$;
10. а) $\int (-x^2 + 2x + 1) \operatorname{sh} 2x dx$;
- В) $\int \sqrt{4 - x^2} dx$;
11. а) $\int (x^2 + 5x) \operatorname{ch} 3x dx$;
- В) $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$;
- Г) $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
- б) $\int (x^3 - 3x + 4) \ln x dx$;
- Г) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
- б) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$;
- Г) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx$;
- б) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$;
- Г) $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;
- б) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$;
- Г) $\int \frac{x^2}{(1-x^2)^3} dx$;
- б) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} dx$;
- Г) $\int \frac{1+4x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x dx$;
- б) $\int (x^2 + 1) \ln(1+x) dx$;
- Г) $\int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
- б) $\int x^2 \arccos x dx$;
- Г) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1+x^2}{x^2} dx$;
- б) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}} dx$;
- Г) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$;
- б) $\int (x^2 - 1) \arccos x dx$;
- Г) $\int \sin \sqrt[3]{x} dx$;

12. а) $\int (x^2 + 3x - 4)3^{2x} dx$; б) $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$;
 в) $\int 5^x \cos^2 x dx$; г) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.
13. а) $\int (x + 1)xe^{-x} dx$; б) $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx$;
 в) $\int e^{ax} \cos nx dx$; г) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$.
14. а) $\int (x + 3)(x + 2) \cos 2x dx$; б) $\int (x^4 + 5x) \ln x dx$;
 в) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$; г) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$.
15. а) $\int (x - 1)(x + 1) \sin 3x dx$; б) $\int \ln(x^2 + 1) dx$;
 в) $\int 3^{\arcsin x} dx$; г) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.
16. а) $\int (x + 2)(x - 1) \operatorname{ch} 5x dx$; б) $\int \arcsin x dx$;
 в) $\int \cos \lg x dx$; г) $\int \frac{x^3 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.
17. а) $\int (x^2 + 3) \sin 2x dx$; б) $\int (x^3 + 2x) \ln x dx$;
 в) $\int e^{\arcsin x} dx$; г) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.
18. а) $\int (x - 3)2^{3x} dx$; б) $\int x^2 \ln x dx$;
 в) $\int e^x \sin^2 x dx$; г) $\int \frac{x^3 \operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$.
19. а) $\int (x^2 - 4x + 2) \sin 3x dx$; б) $\int x^2 \arcsin x dx$;
 в) $\int 5^x \sin^2 x dx$; г) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x^2+1}{x^2} dx$.
20. а) $\int (x^2 - 5x + 2) \operatorname{sh} 3x dx$; б) $\int \frac{\lg^2 x}{\sqrt{x^7}} dx$;
 в) $\int \sqrt{9 - x^2} dx$; г) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$.
21. а) $\int (3x^2 + 7x - 1) \operatorname{ch} 5x dx$; б) $\int (x^2 - 1) \arcsin x dx$;

$$\begin{array}{ll} \text{в)} \int \sqrt{16+x^2} dx; & \text{г)} \int \cos \sqrt[3]{x} dx. \\ 22. \text{ а)} \int (x^2-4x+3)4^{2x} dx; & \text{б)} \int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx; \\ \text{в)} \int 7^x \sin^2 x dx; & \text{г)} \int \frac{dx}{(25+x^2)^2}. \end{array}$$

4. Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти интегралы от рациональных функций:

$$\begin{array}{ll} 1. \text{ а)} \int \frac{6x^2-4x-4}{x(x^2-1)(x-2)} dx; & \text{б)} \int \frac{-6x^2-15x-7}{(x-1)(x^2+x+2)} dx; \\ \text{в)} \int \frac{2x^3+4x^2+3x}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx. & \\ 2. \text{ а)} \int \frac{6x^2-8x-2}{x(x^2-1)(x-2)} dx; & \text{б)} \int \frac{-4x^2-14x-6}{(x-1)(x^2+x+2)} dx; \\ \text{в)} \int \frac{x^4+3x^3+4x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx. & \\ 3. \text{ а)} \int \frac{-6x^2+4x+4}{x(x^2-1)(x-2)} dx; & \text{б)} \int \frac{-2x^2-13x-5}{(x-1)(x^2+x+2)} dx; \\ \text{в)} \int \frac{-2x^3-2x^2-x-4}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx. & \\ 4. \text{ а)} \int \frac{-6x^2+8x+2}{x(x^2-1)(x-2)} dx; & \text{б)} \int \frac{-12x-4}{(x-1)(x^2+x+2)} dx; \\ \text{в)} \int \frac{3x^3+4x^2+6x-4}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx. & \\ 5. \text{ а)} \int \frac{6x^3-8x^2-4x+4}{x(x^2-1)(x-2)} dx; & \text{б)} \int \frac{2x^2-11x-3}{(x-1)(x^2+x+2)} dx; \\ \text{в)} \int \frac{2x^4+6x^3+7x^2+8x-5}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx. & \\ 6. \text{ а)} \int \frac{6x^3-9x^2-x+2}{x(x^2-1)(x-2)} dx; & \text{б)} \int \frac{4x^2-10x-2}{(x-1)(x^2+x+2)} dx; \\ \text{в)} \int \frac{2x^4+3x^3+4x^2+6x-6}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx. & \\ 7. \text{ а)} \int \frac{6x^3-9x^2-5x+4}{x(x^2-1)(x-2)} dx; & \text{б)} \int \frac{6x^2-9x-1}{(x-1)(x^2+x+2)} dx; \\ \text{в)} \int \frac{2x^3+4x^2+9x-6}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx. & \end{array}$$

- | | |
|---|---|
| <p>8. а) $\int \frac{6x^3-10x^2-2x+2}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{9x^2-6x+1}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+9x-8}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> | <p>8. а) $\int \frac{6x^3-10x^2-2x+2}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{9x^2-6x+1}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+9x-8}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> |
| <p>9. а) $\int \frac{4x^3-6x^2-2x+2}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+5x+2}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{-2x^3-2x^2+5x-10}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> | <p>9. а) $\int \frac{4x^3-6x^2-2x+2}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+5x+2}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{-2x^3-2x^2+5x-10}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> |
| <p>10. а) $\int \frac{5x^3-6x^2-3x+2}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+8x+3}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{x^4+5x^3+7x^2+14x-9}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> | <p>10. а) $\int \frac{5x^3-6x^2-3x+2}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+8x+3}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{x^4+5x^3+7x^2+14x-9}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> |
| <p>11. а) $\int \frac{6x^3-7x^2-5x+2}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+11x+4}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{x^4+4x^3+4x^2+12x-12}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> | <p>11. а) $\int \frac{6x^3-7x^2-5x+2}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+11x+4}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{x^4+4x^3+4x^2+12x-12}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> |
| <p>12. а) $\int \frac{7x^3-9x^2-6x+4}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+14x+5}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{-x^3-2x^2+8x-14}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> | <p>12. а) $\int \frac{7x^3-9x^2-6x+4}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+14x+5}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{-x^3-2x^2+8x-14}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> |
| <p>13. а) $\int \frac{8x^3-12x^2-4x+4}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+7x+6}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{2x^3+4x^2+15x-12}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> | <p>13. а) $\int \frac{8x^3-12x^2-4x+4}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+7x+6}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{2x^3+4x^2+15x-12}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> |
| <p>14. а) $\int \frac{5x^3-9x^2+2}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+20x+7}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+15x-14}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> | <p>14. а) $\int \frac{5x^3-9x^2+2}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+20x+7}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+15x-14}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> |
| <p>15. а) $\int \frac{6x^3-11x^2-x+4}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+23x+8}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{-2x^3-2x^2+11x-16}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> | <p>15. а) $\int \frac{6x^3-11x^2-x+4}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{x^2+23x+8}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{-2x^3-2x^2+11x-16}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> |
| <p>16. а) $\int \frac{x^3+6x^2-5x-4}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{22x+6}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{2x^4+2x^3+4x^2+15x-14}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> | <p>16. а) $\int \frac{x^3+6x^2-5x-4}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{22x+6}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> <p>в) $\int \frac{2x^4+2x^3+4x^2+15x-14}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$</p> |
| <p>17. а) $\int \frac{2x^3+6x^2-6x-4}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{-x^2+21x+4}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> | <p>17. а) $\int \frac{2x^3+6x^2-6x-4}{x(x^2-1)(x-2)} dx;$</p> <p>б) $\int \frac{-x^2+21x+4}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$</p> |

$$B) \int \frac{3x^4+4x^3+7x^2+17x-13}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$$

$$18. \text{ а) } \int \frac{3x^3+6x^2-7x-4}{x(x^2-1)(x-2)} dx; \quad \text{б) } \int \frac{-2x^2+20x+2}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$$

$$B) \int \frac{4x^4+6x^3+10x^2+19x-12}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$$

$$19. \text{ а) } \int \frac{4x^3+6x^2-8x-4}{x(x^2-1)(x-2)} dx; \quad \text{б) } \int \frac{-3x^2+19x}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$$

$$B) \int \frac{5x^4+8x^3+13x^2+21x-11}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$$

$$20. \text{ а) } \int \frac{5x^3+6x^2-9x-4}{x(x^2-1)(x-2)} dx; \quad \text{б) } \int \frac{-4x^2+18x-2}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$$

$$B) \int \frac{6x^4+10x^3+16x^2+23x-10}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$$

$$21. \text{ а) } \int \frac{6x^3+6x^2-10x-4}{x(x^2-1)(x-2)} dx; \quad \text{б) } \int \frac{-5x^2+17x-4}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$$

$$B) \int \frac{7x^4+12x^3+19x^2+25x-9}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$$

$$22. \text{ а) } \int \frac{7x^3+6x^2-11x-4}{x(x^2-1)(x-2)} dx; \quad \text{б) } \int \frac{-6x^2+16x-6}{(x-1)(x^2+x+2)} dx;$$

$$B) \int \frac{2x^4+2x^3+4x^2+7x-6}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$$

5. С помощью приведения подынтегральной функции к рациональной функции найти интеграл:

$$1. \int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}.$$

$$3. \int \frac{x dx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/3}}.$$

$$4. \int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}.$$

$$5. \int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx.$$

$$6. \int \frac{x \cdot \sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx.$$

$$7. \int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx.$$

$$8. \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x}.$$

$$9. \int \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$10. \int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}} \frac{dx}{x}.$$

$$11. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}.$$

$$12. \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3(x+1)}}.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-4\sqrt{x}}.$$

$$18. \int \frac{(x-1)\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}} dx.$$

$$19. \int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}} \frac{dx}{x+1}.$$

$$20. \int \sqrt{\frac{2-x}{x}} \frac{dx}{x-1}.$$

$$21. \int \frac{1-\sqrt{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}} dx.$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}.$$

6. Вычислить интеграл от биномиального дифференциала:

$$1. \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}}.$$

$$2. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x} dx.$$

$$3. \int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} dx.$$

$$4. \int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}.$$

$$6. \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{1+x^5}}.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

$$8. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^{11} \cdot \sqrt{1+x^4}}.$$

$$10. \int \sqrt[3]{x-x^3} dx.$$

$$11. \int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^3} dx.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$$

$$13. \int x^5(1-x^2)^{-1/2} dx.$$

$$14. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-2x^3}}.$$

$$15. \int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt{(1+x)^3}}.$$

$$16. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$17. \int \sqrt{\frac{1}{x^4}-1} \frac{dx}{x}.$$

$$18. \int \frac{dx}{x^{2/3} \sqrt[3]{1-x}}.$$

$$19. \int x^4(x^{-2} - 1)^{-1/2} dx.$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x^5}}.$$

$$21. \int \frac{dx}{x^{9/2} \cdot \sqrt{(1+x^{-1})^3}}.$$

$$22. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^{-2} + 1}}.$$

7. Применяя подстановки Эйлера, найти интеграл:

$$1. \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

$$2. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

$$3. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 4}}$$

$$4. \int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}.$$

$$5. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 1}}.$$

$$6. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$7. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$8. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

$$9. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$10. \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$11. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

$$12. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$13. \int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$$

$$14. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

$$15. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$16. \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx.$$

$$17. \int \frac{dx}{1 - x + \sqrt{x^2 - 3x + 3}}.$$

$$18. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$$

$$19. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 + 2x - 7}}.$$

$$20. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{-x^2 - x + 2}}.$$

$$21. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 4x + 2}}.$$

$$22. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 3x + 3}}.$$

8. Применяя подходящие методы, найти интегралы:

$$1. \text{ а) } \int (4 - 3x)e^{-3x} dx;$$

$$\text{ б) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}};$$

В) $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx;$

Г) $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[4]{x^3}} dx.$

2. а) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} dx;$

б) $\int \frac{1+\ln x}{x} dx;$

В) $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1} dx;$

Г) $\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} dx.$

3. а) $\int (3x+4)e^{3x} dx;$

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$

В) $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx;$

Г) $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt{x}} dx.$

4. а) $\int (4x-2) \cos 2x dx;$

б) $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x} dx;$

В) $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2} dx;$

Г) $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[9]{x^4}} dx.$

5. а) $\int (4-16x) \sin 4x dx;$

б) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}};$

В) $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6} dx;$

Г) $\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x \cdot \sqrt[9]{x^8}} dx.$

6. а) $\int (5x-2)e^{3x} dx;$

б) $\int \frac{\arccos^3 x-1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

В) $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2} dx;$

Г) $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x \cdot \sqrt[9]{x^5}} dx.$

7. а) $\int (1-6x)e^{2x} dx;$

б) $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx;$

В) $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx;$

Г) $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \cdot \sqrt[9]{x}} dx.$

8. а) $\int \ln(x^2 + 4)dx;$

б) $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx;$

В) $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx;$

Г) $\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x \cdot \sqrt[6]{x^5}} dx.$

9. а) $\int \ln(4x^2 + 1)dx;$

б) $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2};$

В) $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx;$

Г) $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx.$

10. а) $\int (2 - 4x) \sin 2x dx;$

б) $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx;$

В) $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx;$

Г) $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \cdot \sqrt{x}} dx.$

11. а) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{6x - 1} dx;$

б) $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^5} dx;$

В) $\int \frac{x^3-3x^2-12}{x(x-3)(x-4)} dx;$

Г) $\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x \cdot \sqrt[8]{x^7}} dx.$

12. а) $\int e^{-2x}(4x - 3)dx;$

б) $\int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx;$

В) $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)} dx;$

Г) $\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x \cdot \sqrt[12]{x^7}} dx.$

13. а) $\int e^{-3x}(2 - 9x)dx;$

б) $\int \frac{x^3+x}{x^4+1} dx;$

В) $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x} dx;$

Г) $\int \frac{2x^2-x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \cdot \sqrt[6]{x}} dx.$

14. а) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx;$

б) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4-x^2-1}};$

В) $\int \frac{x^3-3x^2-12}{x(x-2)(x-4)} dx;$

Г) $\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \cdot \sqrt[8]{x}} dx.$

15. а) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx;$

б) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}};$

В) $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x} dx;$

Г) $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx.$

16. а) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx;$

б) $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx;$

В) $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x} dx;$

Г) $\int \frac{2x^3+2x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}} dx.$

17. а) $\int (5x+6) \cos 2x dx;$

б) $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^5} dx;$

В) $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x} dx;$

Г) $\int \frac{3x^3+7x^2+12x+6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x \cdot \sqrt[10]{x^9}} dx.$

18. а) $\int (3x-2) \cos 5x dx;$

б) $\int \frac{4 \operatorname{arctg} \frac{x-x}{1+x^2}}{1+x^2} dx;$

В) $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x} dx;$

Г) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3} dx;$

Д) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x \cdot \sqrt[5]{x^3}} dx.$

19. а) $\int (x\sqrt{2}-3) \cos 2x dx;$

б) $\int \frac{x^3}{x^2+4} dx;$

$$\text{В)} \int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x} dx;$$

$$\text{Г)} \int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3} dx;$$

$$\text{Д)} \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}} dx.$$

$$20. \text{ а)} \int (4x + 7) \cos 3x dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{x+\cos x}{x^2+2 \sin x} dx;$$

$$\text{В)} \int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x} dx;$$

$$\text{Г)} \int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3} dx;$$

$$\text{Д)} \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2 \cdot \sqrt[20]{x^7}} dx.$$

$$21. \text{ а)} \int (2x - 5) \cos 4x dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{2 \cos x+3 \sin x}{(2 \sin x-3 \cos x)^3} dx;$$

$$\text{В)} \int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx;$$

$$\text{Г)} \int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3} dx;$$

$$\text{Д)} \int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \cdot \sqrt[25]{x^{11}}} dx.$$

$$22. \text{ а)} \int (8 - 3x) \cos 5x dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx;$$

$$\text{В)} \int \frac{x^5+2x^4-2x^3+5x^2-7x+9}{x(x-1)(x+3)} dx;$$

$$\text{Г)} \int \frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3} dx;$$

$$\text{Д)} \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}} dx.$$