

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории функций

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
для студентов механико-математического факультета

МИНСК
БГУ
2012

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент выполняет индивидуальные задания в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради студент указывает свою фамилию, имя, номер учебной группы и вариант индивидуального задания.

Решения задач следует излагать в порядке номеров, указанных в задании.

Решения задач излагать **подробно и аккуратно, выполняя все необходимые теоретические обоснования.**

**ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 10
«ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО
ИНТЕГРАЛА»**

1. Изобразить фигуру, ограниченную кривыми, и найти ее площадь:

1. $y = \frac{x^2}{2}, \quad y = 2 - \frac{3}{2}x.$

2. $y = 2x - x^2, \quad y = x.$

3. $y = x - \frac{\pi}{2}, \quad y = \cos x, \quad x = 0.$

4. $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = b \quad (a > b > 0).$

5. $y = \sin^2 x, \quad y = x \sin x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}).$

6. $y = \frac{x^2}{2}, \quad y = \frac{1}{1+x^2}.$

7. $y = \frac{6}{x+5}, \quad y = |x| \quad (x \geq -2).$

8. $y = 2x^2, \quad y = \frac{x^3}{3}.$

9. $y = \sin x \cos^2 x, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}).$

10. $y^2 + x = 4, \quad y^2 - 3x = 12.$

11. $y = \sqrt{x}, \quad y = x - 2, \quad x = 0.$

12. $y = \sqrt{e^x - 1}, \quad y = 0, \quad x = \ln 2.$

13. $y = x + 1, \quad x = \sin \pi y, \quad y = 0 \quad (0 \leq y \leq 1).$

14. $y = x - x^2, \quad y = x\sqrt{1-x}.$

15. $y = \ln(1+x), \quad y = -xe^{-x}, \quad x = 1.$

16. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}, \quad y = -x^2, \quad x = 1.$

17. $y = \frac{2}{3} \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad x = 0.$

18. $y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0, \quad x = 2.$

19. $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}).$

20. $y = \ln x, \quad y = \ln^2 x.$

21. $y = \ln x, \quad y = \ln a, \quad y = \ln b, \quad x = 0.$

22. $y = x\sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq 3).$

2. Фигура ограничена параболой, касательной к параболе в точке с абсциссой x_k , нормалью к параболе в точке с абсциссой x_n и координатной осью. Изобразить эту фигуру и найти ее площадь.

	парабола	x_k	x_n	ось
1.	$y = x^2 - 4x + 5$	3	1	Ox
2.	$y = x^2 - 8x + 17$	3	5	Ox
3.	$y = x^2 - 4x + 10$	3	1	Oy
4.	$y = x^2 + 4x + 6$	-3	-1	Oy
5.	$y = x^2 - 4x + 8$	4	1	Ox
6.	$y = x^2 + 2x + 5$	0	3	Ox
7.	$4y = x^2 + 4x + 12$	-6	0	Ox
8.	$4y = x^2 - 2x + 25$	-3	3	Ox
9.	$4y = x^2 - 2x + 9$	3	-3	Ox

10.	$4y = x^2 - 4x + 28$	4	-2	Ox
11.	$4y = x^2 + 6x + 7$	-7	-1	Oy
12.	$4y = x^2 - 6x + 13$	7	1	Oy
13.	$y = x^2 + 10x + 29$	-3	-6	Ox
14.	$y = x^2 - 12x + 40$	7	10	Ox
15.	$y = x^2 + 6x - 3$	-4	-2	Oy
16.	$4y = x^2 - 4x + 12$	4	-2	Ox
17.	$y = x^2 - 6x + 2$	4	2	Oy
18.	$4y = x^2 - 6x + 33$	5	-1	Ox
19.	$y = x^2 + 6x + 10$	-4	-2	Ox
20.	$4y = x^2 - 8x + 13$	8	2	Oy
21.	$y = x^2 - 12x + 37$	7	5	Ox
22.	$4y = x^2 + 8x + 1$	-8	-2	Oy

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах:

1. $r = \frac{8}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{3})}$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 2. $r = a \sin 5\varphi$.

3. $r = 2 - \cos \varphi$, $r = \cos \varphi$. 4. $r^2 = 9 \cos 4\varphi$.

5. $r^2 = 2 \sin 2\varphi$, $r = 1$ ($r \geq 1$).

6. $r^2 = 1 - 2 \cos 2\varphi$, $r = 1$ ($r \leq 1$).

7. $r = a \sin 4\varphi$.

8. $r = 5 \sin 10\varphi$.

9. $r^2 = 4 \cos 4\varphi$.

10. $r = 5 \sin 6\varphi$.

11. $r^2 = 7 \cos 4\varphi$.

12. $r = \frac{3}{1 + \frac{1}{2} \cos \varphi}$.

13. $r = \frac{5}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{3})}$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

14. $r^2 = 9(1 - 2 \cos 2\varphi)$, $r = 3$ ($r \leq 3$).

15. $r = \frac{3}{1 - \cos \varphi}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

16. $r = a \cos \varphi$, $r = a \sin \varphi$.

17. $r = \frac{2}{2 + \cos \varphi}$.

18. $r = 4 \cos 5\varphi$.

19. $r = \sin \varphi$, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

20. $r = \frac{4}{3 + \sin \varphi}$.

21. $r = 2 \cos 3\varphi$.

22. $r = \cos \varphi$, $r = \frac{1}{2}$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными неявно:

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $x = 2$ (площадь меньшего из сегментов).

2. $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2$.

3. $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 6x$, $\sqrt{3}y + x = 0$, $y - \sqrt{3}x = 0$.

4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$, $x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ($x \geq \frac{5\sqrt{3}}{2}$).

5. $x = x_0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 < x_0 < a$).

6. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $x = 1$ (площадь меньшего из сегментов).

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($a > b$) (область, содержащая

начало координат).

8. $x^2 + 4y^2 = 5a^2, \quad xy = a^2, \quad x \geq 0.$

9. Найти отношение площадей, на которые круг $x^2 + y^2 \leq 2ax$ делится параболой $y^2 = 2ax - a^2$.

10. Круг $x^2 + y^2 \leq 75$ разделен гиперболой $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{100} = 1$ на три части; найти площадь средней части.

11. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad x = a, \quad x = -a.$

12. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = 0, \quad \frac{x-x_0}{x_0} = \frac{y-y_0}{y_0} \quad (x_0 > 0, \quad y_0 > 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1).$

13. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = -b, \quad y = b.$

14. $y^2 - x^2 = a^2, \quad x = 0, \quad \frac{x-x_0}{x_0} = \frac{y-y_0}{y_0} \quad (y_0^2 - x_0^2 = a^2).$

15. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 2a.$

16. $x^2 + y^2 = 4y, \quad x^2 + y^2 = 8y, \quad y = x, \quad y = -x.$

17. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b) \quad (\text{одна из четырех областей, не содержащих начало координат}).$

18. $x^2 + y^2 = 4x, \quad 4x - y^2 = 4 \quad (\text{площадь большего из сегментов}).$

19. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad y - 2b = 0.$

20. $x^2 = -y^2 - 2y, \quad x^2 = -y^2 - 6y, \quad y - 2x = 0, \quad y + 2x = 0.$

21. $y^2 = -x^2 - 6x, \quad y^2 = -6x - 9 \quad (\text{площадь меньшего из сегментов}).$

22. $x^2 + 3y^2 = 4, \quad xy = 1.$

5. Вычислить длины дуг кривых:

1. $y = \arcsin e^x, \quad -\ln 7 \leq x \leq -\ln 2.$

2. $y = \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq a.$

3. $y = \operatorname{sh}^2 x, \quad |x| \leq a.$

4. $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}), \quad 1 < a \leq x \leq b.$

5. $y = \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}, \quad 0 < a \leq x \leq b.$

6. $y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}, \quad 1 \leq x \leq 3.$

7. $y = \ln x, \quad 2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{6}.$

8. $y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leq x \leq 5.$

9. $y = 2\sqrt{1 + e^{x/2}}, \quad \ln 9 \leq x \leq \ln 64.$

10. $y = \frac{x}{4}\sqrt{2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$

11. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{9}{16}.$

12. $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{1 - x}, \quad \frac{11}{36} \leq x \leq \frac{15}{16}.$

13. $y = 2(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1}), \quad 0 \leq x \leq x_0.$

14. $y = \sqrt{1 - x^2} - \arccos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{9}{16}.$

15. $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{1 - x}, \quad \frac{11}{36} \leq x \leq \frac{15}{16}.$

16. $y = \sqrt{x^2 - 32} + 8 \ln(x + \sqrt{x^2 - 32}), \quad 6 \leq x \leq 9.$

17. $y = -\ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$

18. $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad \frac{1}{4} \leq x \leq 1.$

19. $y = e^x + 13, \quad \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$

20. $y = 1 - \ln \sin x, \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

21. $y = 1 - \ln(x^2 - 1), \quad 3 \leq x \leq 4.$

22. $y = e^x + e^{-x} + 3, \quad 0 \leq x \leq 2.$

6. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрически:

1. $x = \int_0^t \cos \varphi^2 d\varphi, \quad y = \int_0^t \sin \varphi^2 d\varphi, \quad 0 \leq t \leq t_0.$

2. $x = \frac{t}{\sqrt{a^2+1}} \cos(a \ln t), \quad y = \frac{t}{\sqrt{a^2+1}} \sin(a \ln t), \quad t_1 \leq t \leq t_2.$

3. $x = t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t, \quad y = 2 \operatorname{ch} t, \quad 0 \leq t \leq t_0.$

4. $x = a(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}), \quad y = a \sin t, \quad 0 < t_0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

5. $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \quad y = (t^2 - 2) \cos t - 2t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$

6. $x = a(2 \cos 2t \cos t + \sin 2t \sin t), \quad y = a(\sin 2t \cos t - 2 \cos 2t \sin t),$
 $0 \leq t \leq \pi.$

7. $x = r(a \cos bt - b \cos at), \quad y = r(a \sin bt + b \sin at), \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{a+b},$
 $a > 0, \quad b > 0, \quad r > 0.$

8. $x = \int_1^t \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi, \quad y = \int_1^t \frac{\cos \varphi}{\varphi} d\varphi, \quad 1 \leq t \leq t_0.$

9. $x = e^t(\cos t + \sin t), \quad y = e^t(\cos t - \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

10. $x = 8 \cos^3 t, \quad y = 8 \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}.$

11. $x = 4(t - \sin t), \quad y = 4(1 - \cos t), \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}.$

12. $x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \quad y = 2(2 \sin t - \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$

13. $x = 8(\cos t + t \sin t), \quad y = 8(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$

14. $x = a(\operatorname{sh} t - t), \quad y = a(\operatorname{ch} t - 1), \quad 0 \leq t \leq t_0.$

15. $x = 2t \sin t + (2 - t^2) \cos t, \quad y = 2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t,$
 $0 \leq t \leq \pi.$

16. $x = \sin^4 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

17. $x = e^t(\sin t - \cos t), \quad y = e^t(\sin t + \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$

18. $x = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad y = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}.$

19. $x = \int_0^t \sin \sqrt{\varphi} d\varphi, \quad y = \int_0^t \cos \sqrt{\varphi} d\varphi, \quad 0 \leq t \leq t_0.$

20. $x = 4 \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} 2t - 2t, \quad 0 \leq t \leq t_0.$

21. $x = \int_1^t \frac{\cos \varphi^2}{\sqrt{\varphi}} d\varphi, \quad y = \int_1^t \frac{\sin \varphi^2}{\sqrt{\varphi}} d\varphi, \quad 1 \leq t \leq t_0.$

22. $x = t \sin(2 \ln t), \quad y = t \cos(2 \ln t), \quad t_1 \leq t \leq t_2.$

7. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах:

1. $r = a(1 - \sin \varphi), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}.$ 2. $r = a\varphi^2, \quad 0 \leq \varphi \leq 4.$

3. $r = a\varphi^4, \quad 0 \leq \varphi \leq 3.$ 4. $r = a\varphi^3, \quad 0 \leq \varphi \leq 4.$

5. $r = a\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0.$ 6. $r = 2(1 - \cos \varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}.$

7. $r = 3(1 + \sin \varphi), \quad -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq 0.$ 8. $r = 8 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$

9. $r = 2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$ 10. $r = 6 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$

11. $r = 8 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$ 12. $r = 3e^{3\varphi/4}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$
 13. $r = 2e^{4\varphi/3}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$ 14. $r = 5e^{5\varphi/12}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$
 15. $r = 12e^{12\varphi/5}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$ 16. $r = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}.$
 17. $r = 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}.$ 18. $r = 5\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{12}{5}.$
 19. $r = 4\varphi^4, \quad 0 \leq \varphi \leq 3.$ 20. $r = 7(1 - \cos \varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}.$
 21. $r = 5 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$ 22. $r = 3e^{3\varphi/5}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

1. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \quad z = y, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$
 2. $z = x^2 + 4y^2, \quad z = 2.$
 3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$
 4. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, \quad z = 12.$
 5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z = 1, \quad z = 0.$
 6. $x^2 + y^2 = 9, \quad z = y, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$
 7. $z = x^2 + 9y^2, \quad z = 3.$
 8. $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$
 9. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1, \quad z = 16.$
 10. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad z = 2, \quad z = 0.$

$$11. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y\sqrt{3}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$12. z = 2x^2 + 8y^2, \quad z = 4.$$

$$13. \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 2.$$

$$14. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, \quad z = 12.$$

$$15. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, \quad z = 3, \quad z = 0.$$

$$16. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad z = y\sqrt{3}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$17. z = x^2 + 5y^2, \quad z = 5.$$

$$18. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 4.$$

$$19. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, \quad z = 20.$$

$$20. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, \quad z = 4, \quad z = 0.$$

$$21. \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad z = \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$22. x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$$

9. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми:

$$1. xy = a^2, \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = 2a.$$

$$2. y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{4}, \quad x = 1.$$

$$3. \frac{y}{b} = \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}, \quad y = 0, \quad x = a \quad (x \geq 0).$$

$$4. y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = b.$$

5. $y = \sqrt{x}e^{-x}$, $y = 0$, $x = a$.
6. $y = \frac{\ln x}{x}$, $y = 0$, $x = e$.
7. $y = \sin \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = \pi^2$.
8. $y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$.
9. $y = (a^2 + x^2)^{-1}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = a$.
10. $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$.
11. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
12. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$ ($x > 0$).
13. $y = \sin x$, $y = \frac{2}{\pi}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$).
14. $y^2(2a - x) = x^3$, $x = a$ ($0 \leq x \leq a$).
15. $y^2(x - a) + x^2(x + a) = 0$, $x = \frac{a}{2}$ ($0 \leq x \leq \frac{a}{2}$).
16. $y^2(x - a)^2 = x^3(2a - x)$, $x = \frac{a}{2}$ ($0 \leq x \leq \frac{a}{2}$).
17. $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$.
18. $x = \sqrt[3]{y - 2}$, $x = 1$, $y = 1$.
19. $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$.
20. $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.
21. $x^2 + (y - 2)^2 = 1$.
22. $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

10. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси:

1. $4x + 2 \ln y = y^2, \quad e^{-1} \leq y \leq e, \quad \text{ось } Oy.$

2. $x = \operatorname{ch} y, \quad \ln 2 \leq y \leq \ln 3, \quad \text{ось } Oy.$

3. $3x = 4 \cos y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0, \quad \text{ось } Oy.$

4. $y^2 = 2(x - 1), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \text{ось } Oy.$

5. $x = a(3 \cos t - \cos 3t), \quad y = a(3 \sin t - \sin 3t) \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}), \quad \text{ось } Ox.$

6. $x = a \sin^2 t, \quad y = a(t + \sin t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{ось } Oy.$

7. $x = \sqrt{2} \sin t, \quad y = \frac{1}{4} \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad \text{ось } Ox.$

8. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \text{ось } Oy.$

9. $y = a \sin^2 t, \quad x = a(t + \sin t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{ось } Oy.$

10. $x = a(t \sin t + \cos t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad \text{ось } Ox.$

11. $x = t^2, \quad y = \frac{t}{3}(t^2 - 3), \quad |t| \leq \sqrt{6}, \quad \text{ось } Ox.$

12. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \text{ось } Ox.$

13. $y^2 - z^2 = 1, \quad -2 \leq z \leq 2, \quad \text{ось } Oz.$

14. $x = \frac{t^3}{3} - t, \quad y = t^2, \quad |t| \leq \sqrt{6}, \quad \text{ось } Ox.$

15. Найти площадь поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (a > b).$

16. $y = \cos x - a, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad \text{ось } Ox.$ Определить, при каком a площадь наименьшая.

17. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, ось Ox .

18. $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x$, $0 \leq x \leq 3$, ось Ox .

19. $4x^2 + y^2 = 4$, ось Ox .

20. $y = \frac{1}{6} \sqrt{x}(x - 12)$, $0 \leq x \leq 12$, ось Ox .

21. $y = \frac{1}{3}x^3$, $-1 \leq x \leq 1$, ось Ox .

22. $4x^2 + y^2 = 4$, ось Oy .

11. Найти координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной кривыми:

1. $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $a > b$.

2. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x = 0$, $x \geq 0$, $y = 0$, $y \geq 0$.

3. $y^2 = ax^3 - x^4$.

4. $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$.

5. $y^2 = 2x$, $x + y = 4$.

6. $y = \frac{2}{\pi}x$, $y = \sin x$, $y = 0$.

7. $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$.

8. $x^2 + y^2 = R^2$, $y = 0$, $y \geq 0$.

9. $y = \cos x$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 0$, $|x| \leq \frac{\pi}{2}$.

10. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $y = 0$, $|x| = b$, $a > 0$.

11. $y^2 = \frac{x^3}{a}$, $x = a$, $y = 0$, $a > 0$, $y \geq 0$.

12. $y = \sin x, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

13. $y = h \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad y = 0, \quad h > 0, \quad a > 0.$

14. $y^2 = 4x, \quad y = 2, \quad x = 0.$

15. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0, \quad x \geq 0, \quad y = 0, \quad y \geq 0.$

16. $r = a(1 + \cos \varphi).$

17. $y = h \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad y = 0, \quad a > r.$

18. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x = 0, \quad y = 0.$

19. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad y = 0.$

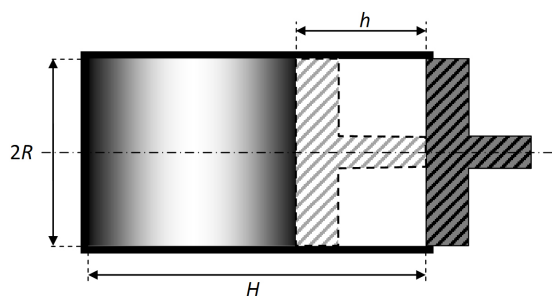
20. $r = a \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

21. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (правая петля).

22. $y = ax^n, \quad x = b, \quad 0 \leq x \leq b, \quad y = 0, \quad n > 0.$

12. Решить задачу:

I. Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением (103,3 кПа). Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на h м. (Указание: уравнение состояния газа $pV = const.$)

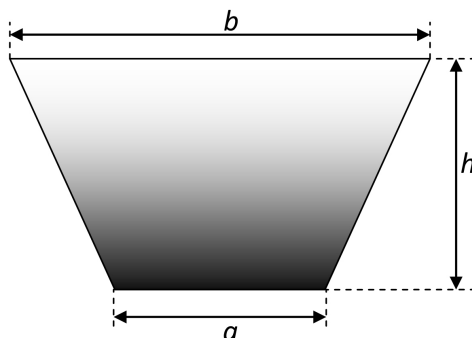


вариант	H	h	R
1.	0,4 м	0,35 м	0,1 м
4.	0,4 м	0,3 м	0,1 м
7.	0,4 м	0,2 м	0,1 м
10.	0,8 м	0,7 м	0,2 м
13.	0,8 м	0,6 м	0,2 м
16.	0,8 м	0,4 м	0,2 м
19.	1,6 м	1,4 м	0,3 м
22.	1,6 м	1,2 м	0,3 м

II. Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли $R = 6380$ км. Ускорение свободного падения у поверхности Земли положить равным $g = 10\text{м}/\text{с}^2$.

вариант	m	H
2.	7,0 т	200 км
5.	7,0 т	250 км
8.	6,0 т	300 км
11.	6,0 т	350 км
14.	5,0 т	400 км
17.	5,0 т	450 км
20.	4,0 т	500 км

III. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобокой трапеции. Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения g положить равным 10 м/с^2 . (Указание: давление на глубине x равно $\rho g x$).



вариант	a	b	h
3.	4,5 м	6,6 м	3,0 м
6.	4,8 м	7,2 м	3,0 м
9.	5,1 м	7,8 м	3,0 м
12.	5,4 м	8,4 м	3,0 м
15.	5,7 м	9,0 м	4,0 м
18.	6,0 м	9,6 м	4,0 м
21.	6,3 м	10,2 м	4,0 м