

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории функций

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
для студентов механико-математического факультета

МИНСК
БГУ
2012

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент выполняет индивидуальные задания в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради студент указывает свою фамилию, имя, номер учебной группы и вариант индивидуального задания.

Решения задач следует излагать в порядке номеров, указанных в задании.

Решения задач излагать **подробно и аккуратно, выполняя все необходимые теоретические обоснования.**

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 11

«ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

1. Найти повторные пределы $\lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right)$ и $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right)$:

№	$f(x, y)$	a	b	№	$f(x, y)$	a	b
1.	$\cos \frac{x^2+2y^2}{y^2+x^6}$	∞	∞	2.	$\sin \frac{x+\pi y}{x^2+2y}$	∞	∞
3.	$\frac{1}{xy} \sin \frac{2xy}{1+xy}$	0	∞	4.	$\cos \frac{\pi+x^2y}{1+xy}$	0	∞
5.	$e^{\frac{xy}{x+y^2}}$	∞	∞	6.	$\operatorname{tg} \frac{x^4+\pi y}{3y+x^5}$	∞	∞
7.	$\frac{e^{xy^2}-1}{xy^2}$	$-\infty$	0	8.	$\left(2 + \frac{1}{xy}\right)^{\frac{x}{x+y}}$	∞	∞
9.	$\operatorname{tg} \frac{\pi+x^2y}{4+xy}$	0	∞	10.	$\sin \frac{x^2+2y^2}{y^2+x^6}$	∞	∞
11.	$\cos \frac{x+\frac{\pi}{4}y^2}{y^2+x^2}$	∞	∞	12.	$e^{\frac{2xy}{1+xy}}$	0	∞
13.	$3^{\frac{1+2x^2y}{1+xy}}$	0	∞	14.	$\lg \frac{x^4+3y}{y+x^5}$	∞	∞
15.	$\sin \frac{\pi+y^2x}{2+xy}$	∞	0	16.	$2^{\frac{x^4+3y}{y+x^5}}$	∞	∞
17.	$7^{\frac{xy}{x+y^2}}$	∞	$-\infty$	18.	$\operatorname{ctg} \frac{x^4+\pi y}{3y+x^5}$	$+\infty$	∞
19.	$\frac{2x^2y-1}{x^2y}$	0	$-\infty$	20.	$\left(e + \frac{1}{xy}\right)^{\frac{y}{x+y}}$	∞	∞
21.	$\pi^{\frac{1+3xy^2}{1+xy}}$	∞	0	22.	$\log_2 \frac{x^4+4y}{y+x^5}$	$+\infty$	∞

2. Найти двойной предел $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$:

№	$f(x,y)$	a	b	№	$f(x,y)$	a	b
1.	$\frac{2x+3y}{4x^2+6xy+9y^2}$	∞	∞	2.	$\frac{4x^2+y}{x^4+y^4}$	∞	∞
3.	$(1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}}$	0	2	4.	$\frac{x^3+y^3}{e^{x+y}}$	$+\infty$	$+\infty$
5.	$\frac{y+xy}{x^3+y^3}$	$+\infty$	$+\infty$	6.	$\frac{\ln(1+y^2x)}{y^2}$	1	0
7.	$\frac{2x-y}{4x^2+2xy+y^2}$	∞	0	8.	$\frac{1}{y} \left(3^{x^2y} - 1 \right)$	2	0
9.	$(1+xy)^{\frac{1}{x^2y^3+xy}}$	0	2	10.	$\left(1 + \frac{1}{y} \right)^{\frac{y^2}{x+y}}$	1	∞
11.	$\frac{\ln(1+xy^2)}{x}$	0	2	12.	$\frac{x+2y}{x^2+2xy+4y^2}$	∞	∞
13.	$x \left(2^{\frac{1}{xy}} - 1 \right)$	∞	1	14.	$(1+y)^{\frac{1}{y^2x+y}}$	1	0
15.	$\frac{e^{x+y}}{x^2+y^2}$	$+\infty$	$+\infty$	16.	$y^2 \ln \left(1 + \frac{x}{y^2} \right)$	2	∞
17.	$\frac{3x-4y}{9x^2-12xy+16y^2}$	∞	∞	18.	$\frac{3x^3+2y^2}{6x^6+6y^6}$	∞	∞
19.	$(1+y)^{\frac{2}{y+xy^2}}$	3	0	20.	$\frac{x^3-y^3}{e^{x-y}}$	$+\infty$	$-\infty$
21.	$\frac{\ln(1+x^2y)}{y}$	7	0	22.	$\frac{3x+y}{9x^2+3xy+y^2}$	∞	∞

3. Найти повторные пределы $\lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right)$,
 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right)$ и двойной предел $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$:

№	$f(x, y)$	a	b	№	$f(x, y)$	a	b
1.	$\frac{y}{x} \operatorname{tg} \frac{x}{x+2y}$	0	0	2.	$x^2 + y \sin \frac{1}{x}$	0	0
3.	$\frac{1}{x+y} \ln(1 + xy)$	0	0	4.	$\sqrt[3]{y+2} - x \cos \frac{1}{y}$	0	0
5.	$\frac{1+y}{x} \ln(1 + xy^2 + x^2y)$	0	0	6.	$(x+1)^3 + y \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$	0	0
7.	$\frac{x^2}{y} \operatorname{tg} \frac{y}{x^2+y}$	0	0	8.	$y + x \left(1 + \sin \frac{1}{y}\right)$	0	0
9.	$\sqrt{x^2 + y^2} e^{-(x^2+y^2)}$	∞	∞	10.	$\frac{(x^4+y^4)^2}{e^{x^4+y^4}}$	∞	∞
11.	$\frac{y-x^2}{x^2+y} + \frac{\sin y}{2x}$	∞	∞	12.	$\frac{\cos x}{y+1} + \frac{x+xy}{xy}$	∞	∞
13.	$(x+y)^2 \ln \frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}$	∞	∞	14.	$\frac{x \sqrt[3]{1+2y}}{y+x} + \frac{\sin x}{y}$	∞	∞
15.	$\frac{\cos y}{x+1} + \frac{yx^2}{y+x^3}$	∞	∞	16.	$(x+y)^2 \ln \left(\frac{1}{x^4+y^2} + 1 \right)$	∞	∞
17.	$\frac{x}{y} \operatorname{tg} \frac{y}{3x+y}$	0	0	18.	$\sqrt{(x^2 + y^2)^3} e^{-2(x^2+y^2)}$	∞	∞
19.	$y^2 + x \sin \frac{\pi}{y}$	0	0	20.	$\frac{(x^4+2y^4)^2}{2x^4+2y^4}$	∞	∞
21.	$\sqrt[3]{x-8} + x \cos \frac{1}{y}$	0	0	22.	$\frac{\cos y}{x+1} + \frac{y+xy}{xy}$	∞	∞

4. Исследовать функцию на непрерывность:

$$1. f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 2, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$2. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2y^2)}{y^2}, & y \neq 0; \\ x^2, & y = 0. \end{cases}$$

$$3. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$4. f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 2, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$5. f(x, y) = \begin{cases} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2+x^4y}}, & x^2 + x^4y \neq 0; \\ e, & x^2 + x^4y = 0. \end{cases}$$

$$6. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 2, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$7. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+(y+x)^2)}{y+x}, & y + x \neq 0; \\ 0, & y + x = 0. \end{cases}$$

$$8. f(x, y) = \begin{cases} \frac{2+xy}{y^2}, & y \neq 0; \\ 1, & y = 0. \end{cases}$$

$$9. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & x + y \neq 0; \\ 1, & x + y = 0. \end{cases}$$

$$10. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{4x^2+y^2}, & 4x^2 + y^2 \neq 0; \\ 1, & 4x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$11. f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x-y}{xy}, & xy \neq 0; \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$$

$$12. f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x+y}}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 2, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$13. f(x, y) = \begin{cases} \frac{1+2yx}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$14. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2}, & x \neq 0; \\ y^2, & x = 0. \end{cases}$$

$$15. f(x, y) = \begin{cases} \frac{y+xy}{x+y}, & x + y \neq 0; \\ 1, & x + y = 0. \end{cases}$$

$$16. f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2y}-1}{y}, & y \neq 0; \\ 4, & y = 0. \end{cases}$$

$$17. f(x, y) = \begin{cases} (1 + y^2)^{\frac{1}{y^2+xy^6}}, & y^2 + xy^6 \neq 0; \\ e, & y^2 + xy^6 = 0. \end{cases}$$

$$18. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\lg(1+(x+y)^3)}{x+y}, & x + y \neq 0; \\ 0, & x + y = 0. \end{cases}$$

$$19. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\pi+xy}{x^2}, & x \neq 0; \\ \pi, & x = 0. \end{cases}$$

$$20. f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{4x^2+3y^2}, & 4x^2 + 3y^2 \neq 0; \\ 3, & 4x^2 + 3y^2 = 0. \end{cases}$$

$$21. f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x-2y}{xy}, & xy \neq 0; \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$$

$$22. f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x}, & x \neq 0; \\ 16, & x = 0. \end{cases}$$

5. Исследовать функцию на непрерывность:

$$1. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{xy}, & xy \neq 0; \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$$

$$2. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}, & x^4 + y^4 \neq 0; \\ 0, & x^4 + y^4 = 0. \end{cases}$$

$$3. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x + \sin y}{x + y}, & x + y \neq 0; \\ 1, & x + y = 0. \end{cases}$$

$$4. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos y}{x - y}, & x - y \neq 0; \\ 0, & x - y = 0. \end{cases}$$

$$5. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x + y}, & x + y \neq 0; \\ 0, & x + y = 0. \end{cases}$$

$$6. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{x - y}, & x - y \neq 0; \\ A, & x - y = 0. \end{cases}$$

$$7. f(x, y) = \begin{cases} \frac{ax^2 + by^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$8. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{xy}, & xy \neq 0; \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$$

$$9. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$10. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ A, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$11. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln x - \ln y}{x - y}, & x - y \neq 0; \\ A, & x - y = 0. \end{cases}$$

$$12. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ A, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$13. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2y}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ A, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$14. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ A, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$15. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{x-y}, & x - y \neq 0; \\ 0, & x - y = 0. \end{cases}$$

$$16. f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x+y} e^{-\frac{1}{x+y}}, & x + y \neq 0; \\ A, & x + y = 0. \end{cases}$$

$$17. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos y}{x+y}, & x + y \neq 0; \\ 0, & x + y = 0. \end{cases}$$

$$18. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{x+y}, & x + y \neq 0; \\ A, & x + y = 0. \end{cases}$$

$$19. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}{x-y}, & x - y \neq 0; \\ A, & x - y = 0. \end{cases}$$

$$20. f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x-y} e^{-\frac{1}{x-y}}, & x - y \neq 0; \\ A, & x - y = 0. \end{cases}$$

$$21. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\lg x - \lg y}{x-y}, & x - y \neq 0; \\ A, & x - y = 0. \end{cases}$$

$$22. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x - \sin y}{x-y}, & x - y \neq 0; \\ 1, & x - y = 0. \end{cases}$$

6. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x, y, z) = ax^\alpha + by^\beta + cz^\gamma + d$ в области E :

№	a	b	c	d	α	β	γ	E
1.	0	2	1	1		3	1	$ y < 1, z < 1$
2.	2	1	3	1	2	1	1	$x^2 + y^2 < 1$
3.	1	0	2	2	3		1	$ x < 2$
4.	5	1	1	3	1	2	1	$ x < 1, y < 1, z < 1$
5.	2	2	1	1	2	2	1	$x^2 + y^2 + z^2 < 4$
6.	2	1	0	3	1	3		$ y < 1$
7.	3	1	1	3	2	1	2	$x^2 + y^2 < 1$
8.	1	1	0	4	2	3		$ x < 1, y < 2$
9.	1	2	0	3	3	1		$ x < 2$
10.	1	2	3	1	1	1	2	$x^2 + y^2 + z^2 < 1$
11.	1	0	1	3	3		2	$ x < 2, z < 2$
12.	1	2	1	2	1	2	2	$y^2 + z^2 < 4$
13.	0	1	1	2		2	3	$y^2 + z^2 < 1$
14.	2	0	1	3	1		3	$ x < 2, z < 2$
15.	0	1	1	2		3	2	$ y < 1, z < 1$

16.	0	1	1	4		1	3	$y^2 + z^2 < 4$
17.	1	2	3	1	1	3	3	$ x < 1, y < 1$
18.	1	2	5	1	2	1	2	$x^2 + y^2 < 1$
19.	1	2	0	2	3	1		$ x < 2$
20.	1	5	1	7	1	2	1	$ x < 1, y < 1, z < 1$
21.	1	1	2	2	1	2	2	$x^2 + y^2 + z^2 < 4$
22.	2	3	0	3	2	3		$ y < 2$