БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории функций

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
для студентов механико-математического факультета

МИНСК
БГУ
2012

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент выполняет индивидуальные задания в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради студент указывает свою фамилию, имя, номер учебной группы и вариант индивидуального задания.

Решения задач следует излагать в порядке номеров, указанных в задании.

Решения задач излагать подробно и аккуратно, выполняя все необходимые теоретические обоснования.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 12 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

1. Исследовать функцию на дифференцируемость в точке $(0,0)$:

1. $f(x,y) = x(\sqrt[3]{1+\sqrt{y}} - 1)$.

2. $f(x,y) = |y| \sin x$.

3. $f(x,y) = \left(\sin x + \sqrt[3]{xy}\right)^2$.

4. $f(x,y) = \operatorname{ch} \sqrt[5]{x^2 y}$.

5. $f(x,y) = \sqrt[5]{x^4}\left(\cos \sqrt[5]{y} - 1\right)$.

6. $f(x,y) = \sqrt[3]{y^2} \operatorname{arctg} \sqrt{|x|}$.

7. $f(x,y) = \ln\left(2 - |x|^{\frac{7}{6}} + |y|^{\frac{5}{4}}\right)$.

8. $f(x,y) = 2y + x\cos \sqrt[3]{xy}$.

9. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

10. $f(x,y) = \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}$.

11. $f(x,y) = \sqrt[3]{\sin x(1-\cos xy)}$.

12. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

13. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^4}$.

14. $f(x,y) = y\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

15. $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

16. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2} \arcsin \sqrt{|y|}$.

17. $f(x,y) = x|y| + y|x|$.

18. $f(x,y) = x - y + \ln(3 + \sqrt[3]{x^2 y})$.

19. $f(x,y) = xy + \sin \sqrt[5]{x^2 y^4}$.

20. $f(x,y) = \sqrt[3]{|xy|}$.

21. $f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt[3]{xy^2}\right)$.

22. $f(x,y) = \ln\left(2 + |x|^{\frac{5}{4}} + |y|^{\frac{6}{5}}\right)$.

2. Найти частные производные первого и второго порядков следующих функций:

1. $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

2. $u = \sin(x^2+y^2)$.

3. $u = \ln(2x+y)$.

4. $u = \frac{x+y}{x-y}$.

5. $u = e^{x^2+y^2}$.

6. $u = x\sin y + y\cos x$.

7. $u = \arcsin xy$.

8. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

9. $u = \frac{\cos y^2}{x}$.

10. $u = \operatorname{tg}(x+y^2)$.

11. $u = \operatorname{arctg}(x+y)$.

12. $u = \arccos(x-y)$.

13. $u = \ln(x+y^2)$.

14. $u = (x+y)e^{x+y}$.

15. $u = 2^{x^2+y}$.

16. $u = \ln(y+x^2)$.

17. $u = \frac{x-y}{x+y}$.

18. $u = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$.

19. $u = \operatorname{arctg}(x+y^2)$.

20. $u = x\operatorname{tg} y + y\operatorname{arctg} x$.

21. $u = x\ln(xy)$.

22. $u = x^3\sin y + y^3\sin x$.

3. Найти указанные частные производные:

1. $\frac{\partial^4 u}{\partial y\partial x^3}$, $\quad u = \operatorname{arctg}\frac{xy}{1+y}$.

2. $\frac{\partial^9 u}{\partial x\partial y^8}$, $\quad u = \ln(e+3xy-2x^3)$.

3. $\frac{\partial^7 u}{\partial x\partial y^6}$, $\quad u = \cos(y(\pi+2x))$.

4. $\frac{\partial^{16} u}{\partial x^{15}\partial y}$, $\quad u = e^{\sqrt[3]{y}(2x+\operatorname{tg} y-1)}$.

5. $\frac{\partial^5 u}{\partial x\partial y^4}$, $\quad u = x\sin(x^4-e^x y)$.

6. $\frac{\partial^6 u}{\partial y\partial x^5}$, $\quad u = \operatorname{ch}(2-x\ln y+\sqrt{y})$.

7. $\frac{\partial^9 u}{\partial x\partial y^8}$, $\quad u = \ln(1+y\sqrt{\sin^2 x+\cos^2(2x)})$.

8. $\frac{\partial^{11} u}{\partial y\partial x^{10}}$, $\quad u = 2^{\left(\cos\frac{1}{y}+\sqrt{y}\right)\frac{x}{2}}$.

9. $\frac{\partial^9 u}{\partial x^2\partial y^7}$, $\quad u = \operatorname{arctg}(\pi x+1)\cdot\frac{e^{y/2}}{2}+\sqrt{\cos 2x}$.

10. $\frac{\partial^{12}u}{\partial y\partial x^{11}}$, $\quad u=\sin 2y\cdot\ln(\sqrt{\pi}+x(\operatorname{tg}y+1))$.

11. $\frac{\partial^{14}u}{\partial x\partial y^{13}}$, $\quad u=\frac{(1+x)^3}{\sqrt{1+y}}+\operatorname{sh}(e+2xy)$.

12. $\frac{\partial^{22}u}{\partial x^2\partial y^{20}}$, $\quad u=(xy)^2\cos 3y+\operatorname{ctg}x\cdot\ln(1+y)$.

13. $\frac{\partial^{9}u}{\partial y\partial x^{8}}$, $\quad u=\frac{2xy}{1-x}\operatorname{ch}2y+\ln(x+\sqrt{y})$.

14. $\frac{\partial^{11}u}{\partial x\partial y^{10}}$, $\quad u=\sqrt{x}\,y^3\operatorname{sh}y+3^{x(1+y)}$.

15. $\frac{\partial^{8}u}{\partial y^2\partial x^{6}}$, $\quad u=\frac{3x}{\sqrt[3]{2+x}}e^{y^4}+\operatorname{ch}(\pi+xy)$.

16. $\frac{\partial^{9}u}{\partial x^2\partial y^{7}}$, $\quad u=\ln y\cdot\cos^2 x+x^2y\sin y$.

17. $\frac{\partial^{6}u}{\partial x\partial y^{5}}$, $\quad u=\operatorname{ch}(2-y\ln x+\sqrt{x})$.

18. $\frac{\partial^{5}u}{\partial y\partial x^{4}}$, $\quad u=y\sin(y^4-e^xy)$.

19. $\frac{\partial^{16}u}{\partial y^{15}\partial x}$, $\quad u=e^{\sqrt[5]{x}(2y+\operatorname{tg}x-1)}$.

20. $\frac{\partial^{7}u}{\partial y\partial x^{6}}$, $\quad u=\cos(x(2\pi+y))$.

21. $\frac{\partial^{9}u}{\partial y\partial x^{8}}$, $\quad u=\ln(e^2+3xy-2y^3)$.

22. $\frac{\partial^{4}u}{\partial x\partial y^{3}}$, $\quad u=\operatorname{arcctg}\frac{xy}{1+x}$.

4. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $u(x,y,z)$ в точке $\vec{a}$:

1. $u=\ln(\operatorname{ch}(xyz))$; $\quad \vec{a}=(-1,-1,1)$.

2. $u=\sqrt{xy+yz+zx}$; $\quad \vec{a}=(-1,-1,-1)$.

3. $u=(1+2x+3y)\cdot 3^{xyz}$; $\quad \vec{a}=(-1,1,-1)$.

4. $u=\frac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{z}}\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)$; $\quad \vec{a}=(1,0,1)$.

5. $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+xyz}$; $\qquad \vec{a} = (1,1,1)$.

6. $u = x^2 e^{\sqrt{y-z-1}}$; $\qquad \vec{a} = (1,1,-1)$.

7. $u = 2\operatorname{sh}\left(\sqrt[4]{x^2+y^2+z^2}\right)$; $\qquad \vec{a} = (1,0,-1)$.

8. $u = \sqrt{\frac{x}{y}}\ln(2+3z^4)$; $\qquad \vec{a} = (1,1,0)$.

9. $u = (x+y)\cos(\sqrt{2xz})$; $\qquad \vec{a} = \left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}\right)$.

10. $u = e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\qquad \vec{a} = (-1,0,-1)$.

11. $u = \cos(2x+y)\cdot 2^{\sqrt[5]{z}}$; $\qquad \vec{a} = (\pi,1,-1)$.

12. $u = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}$; $\qquad \vec{a} = (1,1,1)$.

13. $u = 4^{xy^2z^3}$; $\qquad \vec{a} = (1,-1,1)$.

14. $u = (3y^2+2z^2+1)\sin\frac{\pi}{2x+y}$; $\qquad \vec{a} = \left(\frac{1}{2}, 1, -1\right)$.

15. $u = \sin\left(\pi\sqrt[3]{x^2} - y + z^2\right)$; $\qquad \vec{a} = (1,1,-1)$.

16. $u = (x^2-z^2)e^{\frac{y+z}{2}}$; $\qquad \vec{a} = (1,-1,0)$.

17. $u = \lg(\cos(xyz))$; $\qquad \vec{a} = (1,-1,-1)$.

18. $u = (1+3x+2z)\cdot 2^{xyz}$; $\qquad \vec{a} = (-1,-1,1)$.

19. $u = \operatorname{arcctg}\frac{y}{1+xyz}$; $\qquad \vec{a} = (1,1,1)$.

20. $u = \sin\left(\sqrt[4]{x^2+y^2+z^2}\right)$; $\qquad \vec{a} = (-1,1,0)$.

21. $u = (y+z)\cos(\sqrt{2xy})$; $\qquad \vec{a} = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$.

22. $u = \cos(2y+z)\cdot 2^{\sqrt[5]{x}}$; $\qquad \vec{a} = (-1,\pi,1)$.

5. Найти полные дифференциалы первого и второго порядков (x, y, z – независимые переменные):

1. $u = f(\ln xy,\ x\cos(x-y),\ x+y)$.

2. $u = f(\sqrt{x^2+y^2},\ \sqrt{y^2+z^2},\ \sqrt{z^2+x^2})$.

3. $u = f(xy+\frac{x}{y},\ xy+yz+zx,\ x^2+y^2+z^2)$.

4. $u = f(\ln\frac{xy}{z},\ \frac{x+y}{x-y},\ e^z)$.

5. $u = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ x^2-y^2+z^2)$.

6. $u = f(\ln\sqrt{x^2+y^2},\ 2xy,\ x^2-y^2)$.

7. $u = f(\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy},\ x^2+y^2)$.

8. $u = f(x^y,\ y^z,\ z^x)$.

9. $u = f(x\ln xy,\ e^{x-z},\ y^2-z^2)$.

10. $u = f(x^2y^2,\ \operatorname{arctg}\frac{x}{z},\ x^3+z^3)$.

11. $u = f(\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy},\ x^z,\ \sqrt{z^2+y^2})$.

12. $u = f(xy\ln xy,\ x+y,\ \frac{x+y}{x-y})$.

13. $u = f(\sin^2 x+\cos^2 y,\ \sin y\cos z,\ \sin z+\cos x)$.

14. $u = f(\ln\frac{yz}{x},\ x^2+2y^2+3z^2,\ z^x)$.

15. $u = f(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),\ x^{y^z},\ \arcsin\frac{y}{x})$.

16. $u = f(\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),\ y^x)$.

17. $u = f(x+y,\ \sqrt{y^2+z^2},\ xy+\frac{x}{y})$.

18. $u = f(\sqrt{z^2+x^2},\ xy+yz+zx,\ \ln\frac{xy}{z})$.

19. $u = f(x^2 + y^2 + z^2,\ \frac{x+y}{x-y},\ \ln x^2 + y^2)$.

20. $u = f(e^z,\ 2xy,\ \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy})$.

21. $u = f(x^2 - y^2 + z^2,\ y^z,\ x \ln xy)$.

22. $u = f(\frac{x+y}{x-y},\ \sin y \cos z,\ \ln\frac{yz}{x})$.

6. Проверить равенство $x\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial u}{\partial y} + \beta z\frac{\partial u}{\partial z} = nu$, если $u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right)$:

№	α	β	n	$\varphi(s,t)$	№	α	β	n	$\varphi(s,t)$
1.	2	1	2	$e^s + t^2$	**2.**	1	3	1	$\sin s + \cos t$
3.	2	2	1	$\ln(s^2 + t^2)$	**4.**	1	2	2	$e^{s+1} - \sin t^2$
5.	3	1	2	$\frac{s+1}{1+t^2}$	**6.**	3	3	1	$s^2 + st + t^2$
7.	1	3	1	$s^2 + \sin t$	**8.**	2	1	2	$\operatorname{arctg}(ts)$
9.	1	2	2	$\cos(ts)$	**10.**	2	2	1	$\operatorname{ch}(s^2 + 2t)$
11.	3	3	1	$2 + s^2 + t^3$	**12.**	3	1	2	$2t^2 s^3 - 7$
13.	2	3	3	$\frac{t+1}{s+1}$	**14.**	1	2	3	$s^3 - 2^t$
15.	3	2	1	$\cos s - t^2$	**16.**	2	3	3	s^{2t}
17.	2	3	2	$\operatorname{sh}(s^2 - t^2)$	**18.**	3	2	2	$\sin(ts)$
19.	1	3	2	$e^s + \ln t^2$	**20.**	2	1	3	$s^2 + \cos t$
21.	3	2	3	$\sin ts^2$	**22.**	2	3	1	$\ln(s^4 + t^4)$

7. Заменив приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

1. $\sqrt{1,03^2+2,98^2}$.

2. $1,98^{2,02}$.

3. $1,02^3\cdot 0,97^2$.

4. $\sqrt{1,05^2+2,93^2}$.

5. $1,003\cdot 1,998^2\cdot 3,005^3$.

6. $1,02^{3,01}$.

7. $1,02^{4,05}$.

8. $\sqrt[3]{1,02^3+0,05^2}$.

9. $\sqrt{5e^{0,02}+2,03^2}$.

10. $0,97^{2,02}$.

11. $\sqrt{1,04^{1,99}+\ln 1,02}$.

12. $1,003^{2,07}$.

13. $\sqrt{6,08^2+8,04^2}$.

14. $1,04^{2,02}$.

15. $1,03^{3,001}$.

16. $1,04^{2,03}$.

17. $\sqrt[3]{2,01^3+0,02^3}$.

18. $2,003\cdot 0,997^2\cdot 1,003^3$.

19. $2,999^{3,01}$.

20. $1,05^3\cdot 0,98^4$.

21. $0,97^2\cdot 1,04^3\cdot 0,99^4$.

22. $\sqrt{0,96^2+1,02^3}$.

8. Найти области определения отображений f и g. Вычислить матрицу Якоби композиции $g\circ f$ на множестве определения этой композиции:

1. $f:(x,y)\longrightarrow\left(x^y,\ 3^{xy},\ xy+\frac{y^2}{x}\right)$.
$g:(u,v,w)\longrightarrow\left(u\log_3^2 v,\ w^2+\ln u\right)$.

2. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(e^{xy\sin z},\ \cos(x^2+y^2+z^3)\right)$.
$g:(u,v)\longrightarrow\left(v\ln^2 u,\ u^2\ln v\right)$.

3. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}),\ \frac{x}{z}+\frac{z}{y},\ z^2\right).$
$g:(u,v,w)\longrightarrow\left(e^{uw},\ w^2+v^2\right).$

4. $f:(x,y)\longrightarrow\left(e^{-(x^2+xy+y^2)},\ (1+xy)^y\right).$
$g:(u,v)\longrightarrow\left(\ln^2 u,\ \ln^2 v,\ uv^2\right).$

5. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(\sqrt{xy+\frac{x}{y}},\ \ln\left(\sin\frac{x+z}{\sqrt{y}}\right)\right).$
$g:(u,v)\longrightarrow\left(u^3+v,\ ue^v\right).$

6. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+3y}{1-6xy},\ z^{xy}\right).$
$g:(u,v)\longrightarrow\left(1+2uv,\ u^2\ln v\right).$

7. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \ln xy,\ xy^2+yz^2+zx^2\right).$
$g:(u,v,w)\longrightarrow\left(w+u^3,\ w+v^3\right).$

8. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(\operatorname{arctg} xyz,\ \ln(x^2+y^2+z^2)\right).$
$g:(u,v)\longrightarrow\left(e^u,\ e^v,\ uv\right).$

9. $f:(x,y)\longrightarrow\left(\arcsin(x^2+y^2),\ \arccos xy,\ \sqrt{x^2+y^2}\right).$
$g:(u,v,w)\longrightarrow\left(w^2+\operatorname{tg} u^v,\ w^2-\operatorname{ctg} u,\ vu^2w^3\right).$

10. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(\cos x^2y,\ \sin y^2z,\ \cos xz^2\right).$
$g:(u,v,w)\longrightarrow\left(u\arcsin v,\ w\arccos u,\ uvw\right).$

11. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(2^{x\ln y},\ \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ x^2y^3+y^2z^3+z^2x^3\right).$
$g:(u,v,w)\longrightarrow\left(\log_2^2 u,\ v^3w,\ \frac{uw}{v}\right).$

12. $f:(x,y)\longrightarrow\left(\arccos\frac{x}{y},\ \arcsin x^2y\right).$
$g:(u,v)\longrightarrow\left(\sin u,\ \cos v,\ u^2+v^2\right).$

13. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(2^{x^2\ln yz},\ \sqrt{4x^2+y^2+z^2},\ xyz\right).$
$g:(u,v,w)\longrightarrow(u^v,\ v^w,\ w^u).$

14. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(y\ln\frac{x}{z},\ \frac{1}{\sqrt{xyz}},\ z\right).$
$g:(u,v,w)\longrightarrow\left(\frac{1}{v},\ we^u\right).$

15. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(\ln(\arcsin(x+y^3)),\ (xy)^z\right).$
$g:(u,v)\longrightarrow\left(e^u\ln v,\ u+v,\ uv+\frac{v}{u}\right).$

16. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left((\ln x-\ln y)^{\frac{y}{z}},\ \frac{xz}{y}\ln x\right).$
$g:(u,v)\longrightarrow\left(\ln^2u+e^v,\ u^v\right).$

17. $f:(x,y)\longrightarrow\left(xy+\frac{x^2}{y},\ 3^{xy},\ y^x\right).$
$g:(u,v,w)\longrightarrow\left(w\log_3^2v,\ u^2+\ln w\right).$

18. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(e^{yz\sin x},\ \cos(x^3+y^2+z^2)\right).$
$g:(u,v)\longrightarrow\left(u^2\ln v,\ v\ln^2u\right).$

19. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(\ln(y+\sqrt{x^2+y^2}),\ z^2,\ \frac{z}{x}+\frac{y}{z}\right).$
$g:(u,v,w)\longrightarrow\left(w^2+v^2,\ e^{uv}\right).$

20. $f:(x,y)\longrightarrow\left((1+xy)^x,\ e^{-(x^2+xy+y^2)}\right).$
$g:(u,v)\longrightarrow\left(\ln^2u,\ u^2v,\ \ln^2v\right).$

21. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(\ln\left(\sin\frac{y+z}{\sqrt{x}}\right),\ \sqrt{xy+\frac{y}{x}}\right).$
$g:(u,v)\longrightarrow\left(ve^u,\ u+v^3\right).$

22. $f:(x,y,z)\longrightarrow\left(\ln yz,\ xy^2+yz^2+zx^2,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$
$g:(u,v,w)\longrightarrow\left(v+u^3,\ v+w^3\right).$