БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории функций

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
для студентов механико-математического факультета

МИНСК
БГУ
2012

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент выполняет индивидуальные задания в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради студент указывает свою фамилию, имя, номер учебной группы и вариант индивидуального задания.

Решения задач следует излагать в порядке номеров, указанных в задании.

Решения задач излагать подробно и аккуратно, выполняя все необходимые теоретические обоснования.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 13 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

1. Найти величину и направление градиента функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

1. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $\quad M(1, 1, 3)$.

2. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\quad M(1, 1, 1)$.

3. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\quad M(1, 0, 1)$.

4. $u = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z}$, $\quad M(1, 2, 1)$.

5. $u = \operatorname{arcctg}(xyz)$, $\quad M(2, 1, 1)$.

6. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}}$, $\quad M(2, 2, 1)$.

7. $u = (x^3 - 3xy + yz^2)^3$, $\quad M(1, -2, 1)$.

8. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 2z^3}$, $\quad M(0, 1, 1)$.

9. $u = \ln(x^2 + y^4 + z^2)$, $\quad M(0, 1, 3)$.

10. $u = \ln(x^2 + xy^2 + xyz^2)$, $\quad M(1, 1, 2)$.

11. $u = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{y+z}$, $\quad M(1, 2, 3)$.

12. $u = \operatorname{arctg} \frac{xz}{y}$, $\quad M(1, 2, 2)$.

13. $u = \ln(x^2 - y^2 + z^2)$, $\quad M(1, 1, 3)$.

14. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2+z^2}}$, $\quad M(1, 1, 1)$.

15. $u = \sqrt{x^2 - y^2 + z^2}$, $\quad M(2, 1, 1)$.

16. $u = \operatorname{arcctg}(2xyz)$, $\qquad M(2,2,1)$.

17. $u = \ln(x^2 + y^4 - z^2)$, $\qquad M(3,1,1)$.

18. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2-2y^2+3z^2}}$, $\qquad M(3,1,1)$.

19. $u = \sqrt{x^2 - y^2 + 2z^3}$, $\qquad M(1,1,3)$.

20. $u = \operatorname{arctg}\frac{x+z}{y+z}$, $\qquad M(2,2,3)$.

21. $u = \ln(x^2 - xy^2 + xyz^2)$, $\qquad M(1,1,3)$.

22. $u = (x^3 + 3xy + yz^2)^3$, $\qquad M(1,2,1)$.

2. Найти производную функции $z=f(x,y)$ в точке M
а) по вектору $\vec{a}$;
б) по направлению вектора $\vec{a}$;
в) по направлению к точке N;
г) по направлению $\vec{l}$, составляющему угол α с положительным направлением оси Ox:

№	$f(x,y)$	M	$\vec{a}$	N	α
1.	$\sqrt{x^2 - y^2 + xy}$	$(2,1)$	$(3,4)$	$(7,13)$	$\frac{\pi}{6}$
2.	$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$	$(-3,4)$	$(5,12)$	$(3,12)$	$\frac{2\pi}{3}$
3.	$\ln\sqrt{x^2 + y^2}$	$(1,3)$	$(6,8)$	$(10,15)$	$\frac{\pi}{3}$
4.	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$	$(2,2)$	$(9,12)$	$(-1,6)$	$\frac{\pi}{4}$
5.	$2x^3 - 3xy + 1$	$(-2,3)$	$(-3,4)$	$(-7,15)$	$\frac{\pi}{6}$

6.	$x\cos(x-y)$	$(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6})$	$(-\frac{5\pi}{6}, 2\pi)$	$(-\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6})$	$\frac{3\pi}{4}$
7.	$y\sin(x+y)$	$(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$	$(-\pi, \frac{4\pi}{3})$	$(-\frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6})$	$\frac{5\pi}{6}$
8.	$\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}$	$(4, -3)$	$(-9, 12)$	$(7, -7)$	$-\frac{\pi}{6}$
9.	$\sqrt[3]{x+y^2}$	$(2, -5)$	$(3, -4)$	$(7, -17)$	$\frac{\pi}{3}$
10.	$\frac{1}{1+x^2+y^2}$	$(1, 2)$	$(5, -12)$	$(7, -6)$	$\frac{\pi}{4}$
11.	$2^{x^2+y^2}$	$(-1, 1)$	$(6, -8)$	$(8, -11)$	$\frac{3\pi}{4}$
12.	$x^3-3xy+y^2$	$(5, 3)$	$(9, -12)$	$(2, -1)$	$-\frac{\pi}{3}$
13.	$x\arcsin(xy)$	$(1, \frac{1}{2})$	$(-\frac{3}{2}, -2)$	$(-\frac{3}{2}, -\frac{11}{2})$	$\frac{2\pi}{3}$
14.	$y\operatorname{arctg}(xy)$	$(4, -2)$	$(-5, -12)$	$(-2, -10)$	$\frac{5\pi}{6}$
15.	xe^{xy}	$(1, 1)$	$(-6, -8)$	$(-8, -11)$	$\frac{\pi}{6}$
16.	$\ln\sqrt[3]{1+x^2+y^2}$	$(-2, -1)$	$(-9, -12)$	$(1, 3)$	$-\frac{\pi}{6}$
17.	$\sqrt{y^2-x^2+xy}$	$(1, 2)$	$(4, 3)$	$(13, 7)$	$\frac{\pi}{6}$
18.	$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$	$(4, -3)$	$(12, 5)$	$(12, 3)$	$\frac{2\pi}{3}$
19.	$\ln\sqrt{2x^2+3y^2}$	$(1, 3)$	$(6, 8)$	$(10, 15)$	$\frac{\pi}{3}$
20.	$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2+3y^2}}$	$(2, 2)$	$(9, 12)$	$(-1, 6)$	$\frac{\pi}{4}$
21.	$3x^3-2xy+\pi$	$(-2, 3)$	$(-3, 4)$	$(-7, 15)$	$\frac{\pi}{6}$
22.	$y\cos(x-y)$	$(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$	$(2\pi, -\frac{5\pi}{6})$	$(\frac{7\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3})$	$\frac{3\pi}{4}$

3. Вводя новые независимые переменные u и v и новую функцию w, преобразовать уравнение:

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$

$u=x-y,\qquad v=y,\qquad w=x-y+z.$

2. $x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$

$u=xy,\qquad v=x+y,\qquad w=xz+y.$

3. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$

$x=e^u,\qquad y=e^v,\qquad z=u+v+w.$

4. $\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{2}{y^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{2z}{xy^2}=0,$

$u=xy,\qquad v=\frac{x}{y},\qquad w=\frac{z}{x}+y.$

5. $x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+3x^2\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y-xz,$

$u=x\cos y,\qquad v=x\sin y,\qquad w=xz+\cos y.$

6. $z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=a+b,$

$u=ax+by,\qquad v=bx-ay,\qquad w=ax^2+by^2-z^2.$

7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{2}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2z}{y^2},$

$u=\ln\sqrt{x^2+y^2},\qquad v=\operatorname{arctg}\frac{x}{y},\qquad w=\frac{z}{y}-x.$

8. $\frac{x}{y+1}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0,$

$x=u+v,\qquad y=\frac{v}{u},\qquad z=uw.$

9. $a^2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{a^2y^2}{x^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{x^2}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$

$u=x^2+ay^2,\qquad v=x^2-ay^2,\qquad w=z+x^2+y^2.$

10. $(1+x^2)\frac{\partial z}{\partial x}+(xy+\sqrt{1+x^2})\frac{\partial z}{\partial y}=0,$

$x=\operatorname{tg} u,\qquad v=y\cos u,\qquad z=w.$

11. $\cos z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-\sin z\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0,$

$u=x^2,\qquad v=x+y,\qquad w=\sin z.$

12. $2(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}=-6(x+y),$

$x=u, \qquad y=v^2-u, \qquad z=w-v^4.$

13. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=3\sin y-6\cos y,$

$u=y-3x, \qquad v=y+2x, \qquad w=\cos y+z.$

14. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{8x^2}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{8x^2 z}{y^2}-\frac{y}{x},$

$u=y-x^2, \qquad v=y+x^2, \qquad w=\frac{z}{y}-x.$

15. $z(\ln z+1)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0,$

$u=x+2y, \qquad v=2x+y, \qquad w=z\ln z.$

16. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-2z=0,$

$u=\frac{x}{y}, \qquad v=\frac{x^2+y^2}{2}, \qquad w=\frac{xy}{z}.$

17. $\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x},$

$u=\frac{x}{y}, \qquad v=x, \qquad w=xz-y.$

18. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$

$u=x+y, \qquad v=\frac{y}{x}, \qquad w=\frac{z}{x}.$

19. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$

$u=x+y, \qquad v=x-y, \qquad w=xy-z.$

20. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z,$

$u=x^2+y^2, \qquad v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, \qquad w=\ln z-(x+y).$

21. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z,$

$u=\frac{x+y}{2}, \qquad v=\frac{x-y}{2}, \qquad w=ze^y.$

22. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y},$

$x=\sin u, \qquad y=\sin v, \qquad z=e^w.$

4. Исследовать функцию на локальный экстремум:

1. $f(x,y)=x^3+3xy^2$.

2. $f(x,y)=x^4+y^4-(x-y)^2$.

3. $f(x,y,z)=4x^2+y^2+z^2+2xy$.

4. $f(x,y)=(x+y^2)e^{x/2}$.

5. $f(x,y)=(x^2-2y^2)e^{x-y}$.

6. $f(x,y)=2xye^{-x^2-2y}$.

7. $f(x,y)=(x^2-8y^2)e^{x-2y}$.

8. $f(x,y)=(5-4x+y)e^{4x^2-y}$.

9. $f(x,y)=(5-2x+2y)e^{x^2-2y}$.

10. $f(x,y)=2x+2y+\frac{4}{x}+\frac{5}{y}$.

11. $f(x,y)=x+y+2\sin x\cos y$.

12. $f(x,y)=(1+e^x)\cos y-xe^x$.

13. $f(x,y)=(8x^2-6xy+3y^2)e^{2x+3y}$.

14. $f(x,y,z)=(y+7z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

15. $f(x,y)=(2x+y^2)e^x$.

16. $f(x,y)=(1+e^y)\sin x-ye^y$.

17. $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+3x^2e^y-e^{-y^2}$.

18. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

19. $f(x,y,z) = (y+x)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

20. $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$.

21. $f(x,y) = 108\ln x - xy^2 + \frac{y^3}{3}$.

22. $f(x,y) = x^2+y^2-32\ln(xy)$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на множестве:

1. $z = x^2 + xy^2$,	$x^2+y^2 \leqslant 4$.
2. $z = xy$,	$x^2+y^2 \leqslant 2$.
3. $z = xy$,	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \leqslant 1$.
4. $z = x^2 - y^2$,	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1$.
5. $u = x + 2y - 2z$,	$x^2+y^2+z^2 \leqslant 9$.
6. $z = 2x + 2y - 1$,	$\frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1$.
7. $z = xe^{2y^2}$,	$x + 2y^2 \leqslant 1$.
8. $z = e^{-y^2-2x^2}$,	$x^2+4y^2 \leqslant 1$.
9. $z = x^2 - 3y^2$,	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \leqslant 1$.
10. $z = 4xy - 3x^2 - 2y^2$,	$\max(\lvert x\rvert, \lvert y\rvert) \leqslant 1$.
11. $z = xy^2$,	$x^2+4y^2 \leqslant 1$.
12. $z = e^{2x}(x^2+4y^2+4y+1)$,	$\max(\lvert x\rvert, 2\lvert y\rvert) \leqslant 2$.
13. $u = 2x^2+y^2+6z^2$,	$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.
14. $z = xy$,	$x^2 \leqslant y \leqslant 1$.

15. $z = xy,$ $\qquad -x^2 \leqslant y \leqslant 0.$

16. $u = x^2 + y^2 + z^2,$ $\qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \leqslant z \leqslant 1.$

17. $z = x^2 - xy + y^2,$ $\qquad |x| + |y| \leqslant 1.$

18. $z = (x + y)e^{xy},$ $\qquad -2 \leqslant x + y \leqslant 1.$

19. $z = 3 + 2xy,$ $\qquad 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9.$

20. $z = (x - 6)^2 + (y + 8)^2,$ $\qquad x^2 + y^2 \leqslant 25.$

21. $z = y^4 - x^4,$ $\qquad x^2 + y^2 \leqslant 9.$

22. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2,$ $\qquad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100.$

6. Сколько функций удовлетворяет уравнению? Какие из них непрерывны? Выпишите их. Какие из них дифференцируемы? Выпишите их:

1. $y^2 - \ln^2(1 + x) = 0.$ $\qquad$ **2.** $y^2 - \operatorname{tg}^2 x = 0.$

3. $|y| - |x| = 1.$ $\qquad$ **4.** $y^2 - |x| = 0.$

5. $|y| = |\sin x|.$ $\qquad$ **6.** $|x| + |y| = 1.$

7. $y^2 - \sin^2 x = 0.$ $\qquad$ **8.** $|y| = \ln(1 + |x|).$

9. $y^2 - x^6 = 0.$ $\qquad$ **10.** $y^4 - x^2 = 0.$

11. $y^2 - \cos^2 x = 0.$ $\qquad$ **12.** $x^2 + y^2 = 4.$

13. $|y| = |\ln(1 + x)|.$ $\qquad$ **14.** $|y| = |\operatorname{tg} x|.$

15. $|x + 1| + |y - 1| = 2.$ $\qquad$ **16.** $|x - 1| + |y + 2| = 4.$

17. $|y| - |x^2 - 4x| = 0.$ $\qquad$ **18.** $|x| = y^2 - 4|.$

19. $x - \sin y = 0.$

20. $|x+3| + |y-5| = 4.$

21. $x - \cos y = 0.$

22. $x^2 + y^2 = 16.$

7. Найти производную y' функции, заданной неявно:

1. $\operatorname{arctg}(x+y) - 2^{x-y} = 0.$

2. $\sin(xy) - \log_2(x^2+y^2) = 0.$

3. $\arccos(xy) - \log_3(x^2+y^2) = 0.$

4. $\cos(xy) - 2^x + y = 0.$

5. $\sin(xy) - 2^x + y = 0.$

6. $\cos(xy) - \log_5(x^2+y^2) = 0.$

7. $x^{\sin y} - y^{\sin x} = 0.$

8. $\sqrt{x^2+y^2} - 4^{x+y} = 0.$

9. $x^{y^2} - y^2 = 0.$

10. $\operatorname{arctg}(x-y) - 2^{x+y} = 0.$

11. $x^{\sin y} - \cos^2 y = 0.$

12. $\arcsin(x^2+y^2) - \log_3(xy) = 0.$

13. $(\operatorname{tg} x)^{\sin y} - (\sin x)^{\operatorname{tg} y} = 0.$

14. $\sin(x^2+y^2) - \ln(x+y) = 0.$

15. $\sqrt[3]{x^3+y^3} - \operatorname{tg}\frac{x}{y} = 0.$

16. $\arcsin(xy) - \sqrt[4]{x^2+y^2} = 1.$

17. $\arcsin(x+y) - 3^{xy} = 0.$

18. $\cos(xy) + \log_4(x^4+y^4) = 0.$

19. $\operatorname{arctg}(3xy) - \arcsin(x^2+y^2) = 0.$

20. $\sin(xy^2) + 3^{xy} - y = 0.$

21. $\sin(\sqrt{xy}) - y^{\cos x} = 0.$

22. $\operatorname{arctg}(x-y) - y^{x^2} = 0.$

8. Найти дифференциалы функций u и v, заданных неявно системой уравнений:

1. $\begin{cases} u^x - v^y = 0, \\ \log_2 u - 3^v + xy = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \arcsin y - x^{uv} = 0, \\ x^2 - y^2 + u^2 - v^2 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^u - y^v = 0, \\ \log_2 x - 3^y + uv = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \arccos x - y^{uv} = 0, \\ x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \arcsin x - (xu)^{uv} = 0, \\ x^2 - y^2 + u^2 + v^2 = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} v^x - y^u = 0, \\ \log_2 x - 3^y - uv = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^u - 3^{uv} = 2, \\ \ln(x^2 + y^2) = uv. \end{cases}$

8. $\begin{cases} xu + yv = uv, \\ xv - yu = u + v. \end{cases}$

9. $\begin{cases} u^y - x^v = 1, \\ x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \operatorname{arctg} x - y^{uv} = 0, \\ x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^v - y^u = 0, \\ \log_2 y - 3^x - uv = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} u^v - y^x = 1, \\ x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - y + v - u = 0, \\ x^{\sin u} - y^{\cos v} = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \operatorname{arctg} y - y^{xuv} = 0, \\ x^2 - y^2 + u^2 - v^2 = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \operatorname{arctg} uv + x^y = v, \\ x^2 y^2 + xuv = 5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \arccos u + x^{uv} = 4, \\ x^3 - y^2 + u^2 - v = 40. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \ln(x^2 + y^2) = uv, \\ u^x - v^y = u. \end{cases}$

18. $\begin{cases} xv - yu = u + v, \\ \arcsin y - x^{uv} = uv. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = u, \\ x^u - y^v = uv. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = v, \\ \arccos x - y^{uv} = u. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \log_2 y - 3^x - uv = u, \\ \arcsin x - (xu)^{uv} = v. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = uv, \\ v^x - y^u = u. \end{cases}$

9. Найти частную производную $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$ неявно заданной функции:

1. $x^2 + y + z + u = e^u$.

2. $x^2 - y - z - u = ue^u$.

3. $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = ue^u$.

4. $y^2 - x^2 - z^2 - u^2 = xe^u$.

5. $x^2 + y + z - 2u = ye^u$.

6. $z^2 - x - y + u^2 = ze^u$.

7. $u^2 y + x^2 + e^z = ze^u$.

8. $y^2 + x + z + u = e^u$.

9. $z^2 - u - y + e^u = e^{x+y+z}$.

10. $x^2 - y - z - u = \operatorname{arctg} u$.

11. $x - y^2 - z + u = \arcsin u$.

12. $y^2 - z^2 + u + e^x = \log_2 u$.

13. $z^3 - x^3 - y^3 + e^u = \operatorname{arctg} u^2$.

14. $u^3 + x^2 + y^2 + \ln(u^2 + z^2) = e^u$.

15. $u^2 + x + y + z = a^u$.

16. $z^2 + u(x^2 + y^2) = \ln(x^2 + u^2)$.

17. $y^2 - x^2 - z^2 - u^2 = x \operatorname{arctg} u$.

18. $x^2 + y + z - 2u = y \arcsin u$.

19. $z^2 - x - y + u^2 = ue^u$.

20. $u^2 y + x^2 + e^z = ze^{u^2}$.

21. $y^2 + x + z + \operatorname{arctg} u = e^u$.

22. $z^2 - u^3 - y + e^u = e^{x+y+z}$.

10. Пусть $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Найти производную y' функции, заданной соотношением:

1. $F(x^2 - y^2,\ x + y) = 0$.

2. $F(x^2 + y^2,\ xy) = 0$.

3. $F(x^2 - y^2,\ x - y) = 0$.

4. $F(x + y,\ x^2 - y^2) = 0$.

5. $F(xy,\ x^2 - y^2) = 0$.

6. $F(x^2 + y^2 + xy,\ x^2 - y^2) = 0$.

7. $F(x - y,\ x^2 + y^2) = 0$.

8. $F(\sin(x^2 + y^2), \ln(x + y)) = 0$.

9. $F(x^2 + xy,\ y^2 - xy) = 0$.

10. $F(x - y,\ x^2 y^2) = 0$.

11. $F(x^2 + y^2,\ xy) = 0$.

12. $F(x^3 y^3,\ \frac{x}{y}) = 0$.

13. $F(x^2-y^2,\ x^2+y^2)=0.$

14. $F(e^{x+y},\ \sin(x^2+y^2))=0.$

15. $F(\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ \sin xy)=0.$

16. $F(\operatorname{tg} xy,\ \cos(x^2+y^2))=0.$

17. $F(x^3-y^3,\ x+y)=0.$

18. $F(xy,\ x^3+y^3)=0.$

19. $F(e^{x+y},\ x^2y)=0.$

20. $F(\frac{x}{y},\ x+y^2)=0.$

21. $F(\cos xy,\ x^2+y)=0.$

22. $F(x^2+xy,\ e^{xy^2})=0.$

11. Исследовать на условный экстремум функцию $u=f(x,y,z)$:

1. $u=x^2+y^2+z^2$, если $2x+y+z=3.$

2. $u=x^2yz^3$, если $x+y+z=6.$

3. $u=x-2y+2z$, если $x^2+y^2+z^2=4.$

4. $u=x^4+y^4+z^4$, если $x+y+z=3.$

5. $u=x^3y^2z$, если $x+y+z=4.$

6. $u=x-y+z$, если $x^2+y^2+z^2=1.$

7. $u=x^2+y^2+z^2$, если $x+y+z=1.$

8. $u=x^2y^2z^3$, если $x+y+z=3.$

9. $u=2x+y-2z$, если $x^2+y^2+z^2=1.$

10. $u=x^2+y^2+z^2$, если $x+2y+2z=1.$

11. $u=x^2+y^2+z^2$, если $x+2y+z=3.$

12. $u=xy^3z^2$, если $x+y+z=6.$

13. $u=2x+y-2z$, если $x^2+y^2+z^2=4.$

14. $u = x^4 + y^4 + z^4,$ если $x + y + z = 6.$

15. $u = xy^2z^3,$ если $x + y + z = 4.$

16. $u = x + y - z,$ если $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

17. $u = x^2 + y^2 + z^2,$ если $x + y + z = 6.$

18. $u = x^2y^3z^2,$ если $x + y + z = 3.$

19. $u = 2x + 2y - z,$ если $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

20. $u = x^2 + y^2 + z^2,$ если $2x + y + 2z = 1.$

21. $u = x^2 + y^2 + z^2,$ если $x + y + 2z = 3.$

22. $u = x^3yz^2,$ если $x + y + z = 6.$