БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории функций

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
для студентов механико-математического факультета

МИНСК
БГУ
2012

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент выполняет индивидуальные задания в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради студент указывает свою фамилию, имя, номер учебной группы и вариант индивидуального задания.

Решения задач следует излагать в порядке номеров, указанных в задании.

Решения задач излагать подробно и аккуратно, выполняя все необходимые теоретические обоснования.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 14
«ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ»

1. Найти сумму ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$.

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2-12n-5}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+21n-8}$.

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-28n-45}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2-7n-12}$.

9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-14n-48}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2-24n-5}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-84n-13}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2+4n-3}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2+35n-6}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+3n-20}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-42n-40}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2-8n-15}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2-21n-10}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2+5n-6}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2-9}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2-35n-6}$.

22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{12}{36n^2+12n-35}$.

2. Найти сумму ряда:

1. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+3)(n+2)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$.

4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$.

6. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{3n-5}{n(n^2-1)}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$.

8. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-4)}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}$.

10. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$.

11. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{5n-2}{n(n-1)(n+2)}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$.

14. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n+5}{(n^2-1)(n+2)}$.

15. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{8n-10}{(n-1)(n-2)(n+1)}$.

16. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n^2-1)}$.

17. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n-4}{n(n-1)(n-2)}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}$.

19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{5n-2}{n(n-1)(n+2)}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$.

22. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{2-n}{n(n+1)(n+2)}$.

3. Исследовать на сходимость ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{2+(-1)^n}{n^3}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi n}{2}}{n(n+1)(n+2)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1+(-1)^n}{2}n}{n^3+2}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+\cos\pi n)}{2n^2-1}$.

8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$.

10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$.

11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\arccos\frac{(-1)^n n}{n+1}}{n^2+2}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2 n}{n^3+5}$.

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n\ln n}{n^2-3}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3(2+\sin\frac{\pi n}{2})}$.

15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \sin\frac{2+(-1)^n}{6}\pi$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3+n+1}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin\frac{\pi n}{2}}{n^2}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2\frac{\pi n}{3}}{3^n+2}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2+\cos\frac{\pi n}{2}\right)\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin\frac{\pi n}{4}}{n^2} \operatorname{ctg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n}}$.

4. Исследовать на сходимость ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}+n-1}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$.

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)^2}{n^5+\ln^4 n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+\cos n}{3^n+\sin n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\cos^2 6n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\ln n}$.

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\sin\frac{1}{n-1}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}\operatorname{arctg}\frac{n+3}{n^2+5}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \left(e^{1/\sqrt{n}} - 1\right).$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2+n+2}.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}.$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^3+1}.$

19. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}.$

20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{\left(\sqrt[3]{n}-1\right)\left(n\sqrt[4]{n^3}-1\right)}.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right).$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}.$

5. Исследовать на сходимость ряд:

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot 2 \cdot n!}{(2n)!}.$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n}.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{5}{n}}{n!}.$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}.$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2-1)}{n!}.$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}.$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}.$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}.$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n(n+1)!}.$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}.$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}.$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}.$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}$.

6. Исследовать на сходимость ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n} (n+1)^3$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} \frac{n}{5^n}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n} (n-1)^2$.

14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$.

22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

7. Исследовать на сходимость ряд:

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}$.

8. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(2n)}$.

11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln n}$.

12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$.

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$.

14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$.

15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$.

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$.

17. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n-1)}$.

18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$.

19. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$.

20. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$.

21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$.

22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n/3)\ln^2(n+7)}$.

8. Исследовать на сходимость ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4-n^2+1}$.

6. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$.

7. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\frac{\pi}{6n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}$.

12. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos\frac{\pi}{3\sqrt{n}}\sqrt[3]{3n+\ln n}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(3/2)^n}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{tg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}$.

22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

9. Вычислить сумму ряда с точностью α:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}, \quad \alpha = 10^{-2}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \quad \alpha = 10^{-2}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}, \quad \alpha = 10^{-3}$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}, \quad \alpha = 10^{-3}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \quad \alpha = 10^{-2}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \quad \alpha = 10^{-4}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n}, \quad \alpha = 10^{-1}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{3^n}, \quad \alpha = 10^{-1}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \quad \alpha = 10^{-3}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}, \quad \alpha = 10^{-4}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!}, \quad \alpha = 10^{-3}$.

12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n, \quad \alpha = 10^{-2}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{7^n}, \quad \alpha = 10^{-4}$.

14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \quad \alpha = 10^{-1}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \quad \alpha = 10^{-3}.$

16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}, \quad \alpha = 10^{-2}.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n!)2n}, \quad \alpha = 10^{-5}.$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n)!n!}, \quad \alpha = 10^{-3}.$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}, \quad \alpha = 10^{-3}.$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!}, \quad \alpha = 10^{-3}.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!n!}, \quad \alpha = 10^{-5}.$

22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{3^n (n+1)}, \quad \alpha = 10^{-3}.$

10. Доказать справедливость равенства, пользуясь необходимым условием сходимости ряда:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{n^n} = 0.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)^n}{(2n-1)!} = 0.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{2n^2!} = 0.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{5^{n^2}} = 0.$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0.$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n^n} = 0.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n+1)!} = 0.$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{n^n} = 0.$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n)^n}{(2n-1)!} = 0.$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{2^{n^2}} = 0.$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^3} = 0.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5}{(2n)!} = 0.$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3n}}{n!} = 0.$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{n^n} = 0.$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n-1)!} = 0.$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{n^n} = 0.$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)^n}{(2n+1)!} = 0.$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(4n)!}{2^{n^2}} = 0.$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{((n+1)!)^2} = 0.$

11. Решить задачу:

1. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, если $a_n \le c_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничены в совокупности, а последовательность $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?

3. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – числовые ряды, такие, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, и $a_n \le b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

4. Знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится. Показать, что обратное утверждение неверно.

5. Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 0$. Что можно сказать о сходимости этого ряда?

6. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Доказать, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$.

7. Элементы последовательности (a_n) ограничены в совокупности, а $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?

8. Пусть $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю при $n \to +\infty$. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$?

9. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Следует ли из этого, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится?

10. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – числовые ряды, такие, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, и $a_n \le b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$?

11. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

12. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а последовательность $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?

13. Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Что можно сказать о сходимости этого ряда?

14. Ряды с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся. Что можно сказать о сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$?

15. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$?

16. Знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n}$ расходится.

17. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Доказать, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$.

18. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Доказать, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

19. Знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что $\varliminf_{n\to\infty} na_n = 0$.

20. Привести пример сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с ненулевыми членами, для которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n}$ сходится.

21. Что можно сказать о сумме двух рядов, из которых: а) один ряд сходится, а другой расходится; б) оба ряда расходятся?

22. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, если $a_n \le c_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Образец решения задач из задания 11:

19. Знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что $\underline{\lim}_{n\to\infty} na_n = 0$.

Решение. Проведем доказательство методом «от противного».

Предположим, что $\underline{\lim}_{n\to\infty} na_n = b \neq 0$. Так как члены ряда, по условию, положительны, то $b \geq 0$. Следовательно, $b > 0$.

По определению нижнего предела, $b = \lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{n>k} na_n$. Следовательно, члены последовательности $\left(\inf\limits_{n>k} na_n\right)_{k=1}^{\infty}$ начиная с некоторого номера k_0 находятся на расстоянии менее $\frac{b}{2}$ от предела последовательности b. В частности,

$$\inf_{n>k} na_n > \frac{b}{2} \qquad \text{при} \qquad k \geq k_0,$$

откуда

$$na_n > \frac{b}{2} \qquad \text{при} \qquad n > k_0,$$

$$a_n > \frac{b}{2n} \qquad \text{при} \qquad n > k_0.$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b}{2n} = \frac{b}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится как гармонический. По признаку сравнения рядов с положительными членами, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится, что противоречит условию задачи.

Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, следовательно, $\underline{\lim}_{n\to\infty} na_n = 0$.

22. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, если $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$?

Решение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ может быть как сходящимся, так и расходящимся. Чтобы доказать это, приведем два соответствующих примера.

Пример 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1); \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0; \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1.$

Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ расходятся, т.к. для них не выполняется необходимое условие сходимости. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, очевидно, сходится, так как все его частичные суммы равны 0.

Пример 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1); \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}; \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1.$

Все три ряда расходятся, так как для них не выполняется необходимое условие сходимости.