

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории функций

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
для студентов механико-математического факультета

МИНСК
БГУ
2012

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент выполняет индивидуальные задания в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради студент указывает свою фамилию, имя, номер учебной группы и вариант индивидуального задания.

Решения задач следует излагать в порядке номеров, указанных в задании.

Решения задач излагать **подробно и аккуратно, выполняя все необходимые теоретические обоснования.**

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 16

«СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ»

1. Определить радиус и интервал сходимости степенного ряда и исследовать его поведение в граничных точках интервала сходимости:

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{\sqrt[n]{n}} x^{2n}.$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{2^n(n^2+1)} x^n.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (x+1)^{2n}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{(2n-1)2^n}} x^n.$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} (x+1)^n.$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+5} (x+2)^n.$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3^n n} (x-1)^n.$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{2^n(5+2n)} x^n.$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{3^n(2+n^2)} x^n.$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} x^{2n}.$$

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2^n n}} (x+1)^n.$$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{1+n^2} x^{2n}.$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} x^n.$$

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2-2} (x+4)^n.$$

15.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n(n^2-1)} x^n.$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} x^{3n}.$$

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+8}{3^n(n^3+1)} (x-2)^n.$$

18.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n (x-1)^{3n}.$$

19.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{(3n-1)7^n}} (x+3)^n.$$

20.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{2n!} (x+5)^n.$$

21.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n}}{n+7} (x-3)^n.$$

22.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{4^n n} (x+1)^n.$$

2. Найти сумму ряда:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} (4n^2 + 9n + 5)x^{n+1}.$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 7n + 4)x^n.$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n + 1)x^{n+3}.$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 4n + 3)x^{n+2}.$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 5n + 3)x^n.$$

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 5n + 3)x^{n+1}.$$

$$7. \sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 8n + 5)x^{n+2}.$$

$$8. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 8n + 5)x^n.$$

$$9. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 7n + 5)x^{n+1}.$$

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 7n + 5)x^n.$$

$$11. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n)x^{n+2}.$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1)x^n.$$

$$13. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 1)x^n.$$

$$14. \sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 5n + 4)x^{n+1}.$$

$$15. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 7n + 4)x^n.$$

$$16. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 2)x^{n+1}.$$

$$17. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 2n + 1)x^n.$$

$$18. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n - 1)x^{n+1}.$$

$$19. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n + 2)x^{n+2}.$$

$$20. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 4n + 3)x^{n+1}.$$

$$21. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 5n + 4)x^{n+2}.$$

$$22. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - 2n + 1)x^n.$$

3. Найти сумму ряда:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n-1}.$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) x^{n+2}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{4^n (2n-1)}.$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{x^n}.$$

$$7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(n-1)}.$$

$$8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+2}}{16^n(2n+1)}.$$

$$11. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) x^n.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right) x^{2n}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) x^{n-1}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}}.$$

$$19. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n(n-1)}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) x^n.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x :

$$1. \sqrt{1+2x}.$$

$$2. \sin^2 x.$$

$$3. \frac{x}{\sqrt{1+2x}}.$$

$$4. \frac{1}{(2+x)^2}.$$

$$5. \ln(2-2x^2).$$

$$6. e^{2x^3+2}.$$

$$7. \ln \frac{2}{1-x^2}.$$

$$8. e^{2x-5}.$$

$$9. \ln(1-4x^2).$$

$$10. \ln(x^2+3).$$

$$11. \cos^2 \frac{x}{2}.$$

$$12. e^{3x-2}.$$

13. $e^{(x+1)/2}$.

14. $\frac{1}{(1-x)^5}$.

15. $\frac{1}{(1-2x)^3}$.

16. $\ln(2 + x^2)$.

17. e^{3x+4} .

18. $\sin^2 \frac{x}{2}$.

19. $\frac{1}{(1-x)^7}$.

20. $\frac{1}{(1+2x)^5}$.

21. $\ln(1 - 9x^2)$.

22. $\ln(x^2 + 5)$.

5. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x :

1. $\frac{9}{20-x-x^2}$.

2. $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.

3. $\ln(1 - x - 6x^2)$.

4. $2x \cos^2 \frac{x}{2} - x$.

5. $\frac{\operatorname{sh} 2x}{x} - 2$.

6. $\frac{7}{12+x-x^2}$.

7. $\frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$.

8. $\ln(1 + x - 6x^2)$.

9. $(x - 1) \sin 5x$.

10. $\frac{\operatorname{ch} 3x-1}{x^2}$.

11. $\frac{6}{8+2x-x^2}$.

12. $\frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$.

13. $\ln(1 - x - 12x^2)$.

14. $(3 + e^{-x})^2$.

15. $\frac{\arcsin x}{x} - 1$.

16. $\frac{7}{12-x-x^2}$.

17. $x^2 \sqrt{4 - 3x}$.

18. $\ln(1 + 2x - 8x^2)$.

19. $2x \sin^2 \frac{x}{2} - x$.

20. $(x - 1) \operatorname{sh} x$.

21. $\frac{5}{6+x-x^2}$.

22. $x \sqrt[3]{27 - 2x}$.

6. Разложив предварительно производную, путем почленного интегрирования получить разложение в степенной ряд функции:

- | | |
|---|--|
| 1. $(2 - x^2) \cos x + 2x \sin x.$ | 2. $e^x(x^2 - 2x + 2).$ |
| 3. $-\frac{1}{12} \ln \frac{2-3x}{2+3x}.$ | 4. $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$ |
| 5. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}.$ | 6. $2(\cos x + x \sin x) - x^2 \cos x.$ |
| 7. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1+2x}{1-2x}.$ | 8. $\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{-x\sqrt{3}+\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$ |
| 9. $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \right).$ | 10. $\ln \left(\sqrt{x^2 + 9} + x \right).$ |
| 11. $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6).$ | 12. $-\frac{1}{4} \ln \frac{-x^2+1}{x^2+1}.$ |
| 13. $-\frac{1}{12} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}-x}{x+\sqrt{2}}.$ | 14. $\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}.$ |
| 15. $\frac{1}{2} \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}).$ | 16. $-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}(2x+\sqrt{1+4x^2})}.$ |
| 17. $2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x.$ | 18. $\ln \left(x + \sqrt{x^2 + 16} \right).$ |
| 19. $\ln \frac{x^2+2}{x^2-2}.$ | 20. $\frac{x}{16} \sqrt{16+x^2} + \ln \left(\sqrt{16+x^2} + x \right).$ |
| 21. $(2 + x^2) \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x.$ | 22. $\operatorname{arctg} \frac{3x+1}{3x-1}.$ |

7. Вычислить интеграл с точностью до 10^{-3} :

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx.$ | 2. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx.$ |
| 3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$ | 4. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$ |
| 5. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx.$ | 6. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}.$ |

$$7. \int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx.$$

$$9. \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$$

$$11. \int_0^{0,4} \sin \frac{25x^2}{4} dx.$$

$$13. \int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx.$$

$$15. \int_0^{0,4} \frac{\ln(1+\frac{x}{2})}{x} dx.$$

$$17. \int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx.$$

$$19. \int_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x} dx.$$

$$21. \int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}.$$

$$8. \int_0^1 \cos x^2 dx.$$

$$10. \int_0^1 \frac{\ln(1+\frac{x}{5})}{x} dx.$$

$$12. \int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx.$$

$$14. \int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx.$$

$$16. \int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx.$$

$$18. \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}.$$

$$20. \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx.$$

$$22. \int_0^{0,4} e^{-3x^2/4} dx.$$

8. Вычислить интеграл с точностью до 10^{-3} :

$$1. \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

$$3. \int_0^{1/2} x \ln(1+x^2) dx.$$

$$5. \int_0^1 \sqrt{x} \cos x dx.$$

$$7. \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$9. \int_0^1 \sin(x^3) dx.$$

$$11. \int_0^{1/2} \sqrt{x} e^{-x} dx.$$

$$2. \int_0^1 \cos(x^2) dx.$$

$$4. \int_0^1 e^{-x^2/2} dx.$$

$$6. \int_0^{1/4} \frac{\sin 2x}{x} dx.$$

$$8. \int_0^{1/4} \sqrt{1+4x} dx.$$

$$10. \int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{4}}{x} dx.$$

$$12. \int_0^{1/3} \sqrt{1+x^4} dx.$$

$$13. \int_0^{1/8} \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$15. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

$$17. \int_0^{1/9} \sqrt{1+9x} dx.$$

$$19. \int_0^{1/8} \frac{dx}{\sqrt[7]{1+x^2}}.$$

$$21. \int_0^1 \sin(x^2) dx.$$

$$14. \int_0^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

$$16. \int_0^{1/6} \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^2}}.$$

$$18. \int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} dx.$$

$$20. \int_0^1 e^{-x^2/3} dx.$$

$$22. \int_0^1 \sqrt{x} \sin x dx.$$

9 . Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с точностью до 10^{-4} значение функции:

1. $\sin 20^\circ$.

2. $\ln 1,5$.

3. $\cos 25^\circ$.

4. $e^{1,1}$.

5. \sqrt{e} .

6. $\sin 15^\circ$.

7. $e^{1,3}$.

8. $\sqrt{17}$.

9. $\sin 11^\circ$.

10. $\ln 1,1$.

11. $\cos 20^\circ$.

12. $e^{1,2}$.

13. $\sqrt{18}$.

14. $\ln 1,2$.

15. $\cos 3^\circ$.

16. $\sqrt{11}$.

17. $\sqrt[3]{e}$.

18. $\ln 1,3$.

19. $\sqrt{19}$.

20. $\cos 10^\circ$.

21. $\sin 10^\circ$.

22. $e\sqrt{e}$.