

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории функций

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
для студентов механико-математического факультета

МИНСК
БГУ
2012

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент выполняет индивидуальные задания в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради студент указывает свою фамилию, имя, номер учебной группы и вариант индивидуального задания.

Решения задач следует излагать в порядке номеров, указанных в задании.

Решения задач излагать **подробно и аккуратно, выполняя все необходимые теоретические обоснования.**

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 18 «НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА»

1. Исследовать интеграл на равномерную сходимость на указанном множестве:

$$1. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{1+x^2} dx, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2} dx, \quad a \in (0, +\infty);$$

$$\text{в) } \int_0^{+\infty} e^{-ax} \arcsin \frac{x}{1+x^2} dx, \quad a \in (1, +\infty);$$

$$\text{г) } \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2\alpha x}{x^2+1} dx, \quad \alpha \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right);$$

$$\text{д) } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha(x+1)} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$2. \text{ а) } \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{1+x^2} dx, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(\left(3^{\alpha+1}+2^{-\alpha}\right)x^2\right)}{1+x^2+\alpha^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\text{в) } \int_0^{+\infty} e^{-bx} \cos^2 x dx, \quad b \in (1, +\infty);$$

$$\text{г) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax^2} dx, \quad a \in [0, +\infty);$$

$$\text{д) } \int_1^{+\infty} \frac{x^3}{2+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in (4, +\infty).$$

$$3. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arcsin \frac{ax}{1+x^2}}{1+x^2} dx, \quad a \in (-1, 1);$$

$$\text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax + \cos bx - 2}{x^2} dx, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\text{в) } \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos ax dx, \quad a \in (1, +\infty);$$

$$\text{г) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} dx, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, +\infty\right);$$

$$\text{д) } \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2+2} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$4. \text{ а) } \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} dx, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin 7x}{\sqrt[3]{x}} e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty);$$

$$\text{в) } \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \arcsin \frac{x^2}{1+x^2} dx, \quad a \in (2, +\infty);$$

$$\text{г) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin 12\alpha x}{x} dx, \quad \alpha \in (1, +\infty);$$

$$\text{д) } \int_0^{+\infty} \alpha x^4 e^{-\alpha x^5} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$5. \text{ а) } \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{\sqrt{x+2}} e^{-3x^4} dx, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} e^{-xy} dx, \quad y \in \left[\frac{1}{5}, +\infty\right);$$

$$\text{в) } \int_0^{+\infty} e^{-ax^2+3x} \sin x dx, \quad a \in (2, +\infty);$$

$$\text{г) } \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} e^{-2\alpha x} dx, \quad \alpha \in [0, +\infty);$$

$$\text{д) } \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\alpha(x^4+1)} dx, \quad a \in (0, +\infty).$$

6. а) $\int_0^{+\infty} \arcsin \frac{\alpha\sqrt{x}}{1+x^2} dx, \quad \alpha \in (-1, 1);$
 б) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2+\alpha^2x^2)(1+x^2)} dx, \quad \alpha \in [0, +\infty);$
 в) $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2+2x} \cos x dx, \quad a \in (1, +\infty);$
 г) $\int_2^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dx, \quad y \in (1, +\infty);$
 д) $\int_0^{+\infty} \alpha x e^{-\alpha x^2} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$

7. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax^3}{1+x^4} dx, \quad a \in \mathbb{R};$
 б) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+\alpha^6x^2+1}} dx, \quad a \in \mathbb{R};$
 в) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos 2x dx, \quad a \in (1, +\infty);$
 г) $\int_2^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+1} e^{-ax} dx, \quad \alpha \in \left(\frac{1}{10}, +\infty\right);$
 д) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2+x^\alpha} dx, \quad a \in (3, +\infty).$

8. а) $\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{x}}{1+x^2} dx, \quad a \in (-10, 10);$
 б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha^5 x}{\alpha^4+x^2+1} dx, \quad a \in \mathbb{R};$
 в) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos ax}{\sqrt{x}} e^{-ax} dx, \quad a \in (1, +\infty);$
 г) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} e^{-xy} dx, \quad y \in (0, +\infty);$
 д) $\int_0^{+\infty} \alpha x^2 e^{-\alpha x^3} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$

9. а) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{1+x^3} dx, \quad a \in \mathbb{R};$
 б) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \cdot \operatorname{arctg} 2\alpha x}{x^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$
 в) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx, \quad a \in [0, +\infty);$
 г) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x+5}} e^{-xy} dx, \quad y \in (1, 10);$
 д) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad a \in (0, +\infty).$

10. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{x}}}{1+x^2} dx, \quad a \in (-10, 10);$
 б) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos x}{x^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$
 в) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos ax dx, \quad a \in (2, +\infty);$
 г) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x+3} e^{-8\alpha x} dx, \quad a \in (0, +\infty);$
 д) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{3+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in (3, +\infty).$

11. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arccos \frac{ax}{1+x^2}}{1+x^4} dx, \quad a \in (-2, 2);$
 б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha^3 x}{\alpha^4 + \alpha^2 x^2 + x^4 + 1} dx, \quad a \in \mathbb{R};$
 в) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos a^2 x dx, \quad a \in (1, +\infty);$
 г) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 5x}{\sqrt{x}(1+x^\alpha)} dx, \quad \alpha \in [0, +\infty);$
 д) $\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2 + 1} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$

12. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos a\sqrt{x}}{1+x^2} dx, \quad a \in \mathbb{R};$
 б) $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^4}} dx, \quad \alpha \in [0, +\infty);$
 в) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \operatorname{arctg}(a^2x) dx, \quad a \in (1, +\infty);$
 г) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2\alpha x}{\sqrt{x^4+1}} dx, \quad a \in [\pi, +\infty);$
 д) $\int_2^{+\infty} \frac{e^{-\alpha \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx, \quad a \in (0, +\infty).$

13. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{1+x^2} dx, \quad a \in \mathbb{R};$
 б) $\int_{-\infty}^0 \frac{\cos 2x + \cos \alpha x - 2}{x \sqrt[3]{x}} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$
 в) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \operatorname{arctg} x^2 dx, \quad a \in (2, +\infty);$
 г) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot \cos^2 \alpha x}{x + \sqrt{\alpha}} dx, \quad \alpha \in (1, +\infty);$
 д) $\int_0^{+\infty} x^{3/2} e^{-\alpha x^{5/2}} dx, \quad a \in (0, +\infty).$

14. а) $\int_0^{+\infty} \sin \frac{a\sqrt{x}}{1+x^2} dx, \quad a \in (-9, 9);$
 б) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-x} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$
 в) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \arcsin \frac{x}{1+x^2} dx, \quad a \in (1, +\infty);$
 г) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}} e^{-x(y+1)} dx, \quad y \in [-1, +\infty);$
 д) $\int_3^{+\infty} \frac{x^2+1}{5+x^\alpha} dx, \quad a \in (3, +\infty).$

15. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{\cos ax}}{1+x^2} dx, \quad a \in \mathbb{R};$
 б) $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{arctg} x dx, \quad a \in (1, +\infty);$
 в) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cdot \cos 2x}{x} dx, \quad a \in (3, +\infty);$
 г) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\alpha} \sin x \cos x}{\sqrt{x}(1+x^{2\alpha})} dx, \quad \alpha \in [0, +\infty);$
 д) $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\alpha x^5} dx, \quad a \in (0, +\infty).$

16. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt[3]{x}}}{1+x^2} dx, \quad a \in \mathbb{R};$
 б) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x\sqrt{x}} e^{\alpha x} dx, \quad a \in (-\infty, 0];$
 в) $\int_0^{+\infty} e^{-bx} \sin x^2 dx, \quad b \in (1, +\infty);$
 г) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x+y^2+1}} dx, \quad y \in [-\frac{\pi}{3}, \pi];$
 д) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2\alpha x^3} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$

17. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} a^2 x}{1+x^3} dx, \quad a \in \mathbb{R};$
 б) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos 9x - 2}{x^2} dx, \quad a \in \mathbb{R};$
 в) $\int_0^{+\infty} e^{-ax^3} \arcsin \frac{x^3}{1+x^3} dx, \quad a \in (1, +\infty);$
 г) $\int_0^{+\infty} e^{-3\alpha x} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad \alpha \in [0, +\infty);$
 д) $\int_0^{+\infty} \alpha x^2 e^{-\alpha x^3} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$

18. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arcsin \frac{2ax}{1+x^2}}{1+x^2} dx, \quad a \in (-1, 1);$
 б) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 8x}{\sqrt[5]{x}} e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty);$
 в) $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2+5x} \cos x dx, \quad a \in (3, +\infty);$
 г) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dx, \quad y \in (\frac{1}{2}, +\infty);$
 д) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{3+x^\alpha} dx, \quad a \in (4, +\infty).$

19. а) $\int_0^1 \frac{x^{3n}}{\sqrt[3]{x(1-x^4)}} dx, \quad n \in \mathbb{N};$
 б) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} e^{-xy} dx, \quad y \in [\frac{1}{5}, +\infty);$
 в) $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2+4x} \sin x dx, \quad a \in (1, +\infty);$
 г) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x+1} e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha \in (\frac{1}{5}, +\infty);$
 д) $\int_0^{+\infty} \alpha x^2 e^{-2\alpha x^3} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$

20. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 ax}{\sqrt{x+2}} e^{-3x^4} dx, \quad a \in \mathbb{R};$
 б) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2+\alpha^2 x^2)(1+x^2)} dx, \quad \alpha \in [0, +\infty);$
 в) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \operatorname{arctg} \frac{x}{1+x^2} dx, \quad a \in (1, +\infty);$
 г) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{x}} e^{-xy} dx, \quad y \in (0, +\infty);$
 д) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2\alpha\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad a \in (0, +\infty).$

$$21. \text{ а) } \int_0^{+\infty} \arcsin \frac{2\alpha\sqrt{x}}{1+4x^2} dx, \quad \alpha \in (-1, 1);$$

$$\text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+\alpha^4x^2+\alpha^2+1}} dx, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} e^{-ax^2} dx, \quad a \in (0, +\infty);$$

$$\text{г) } \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 3\alpha x}{x^2+1} dx, \quad \alpha \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right);$$

$$\text{д) } \int_1^{+\infty} \frac{x^4}{4+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in (5, +\infty).$$

$$22. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 ax^2}{1+x^4} dx, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin e^{\alpha^5 x}}{\alpha^6+x^2+1} dx, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\text{в) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-7ax} dx, \quad a \in [0, +\infty);$$

$$\text{г) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x+3} e^{-8\alpha x} dx, \quad \alpha \in (1, +\infty);$$

$$\text{д) } \int_0^{+\infty} x e^{-2\alpha x^2+3} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

2. Исследовать функцию на непрерывность на указанном множестве:

$$1. I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{4+x^{3+\alpha}} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$2. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha(x^3+1)} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$3. I(\alpha) = \int_4^{+\infty} \frac{x^4}{3+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in (5, +\infty).$$

$$4. I(\alpha) = \int_5^{+\infty} \frac{x+1}{2+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in (2, +\infty).$$

$$5. I(\alpha) = \int_7^{+\infty} \frac{x^3}{7+x^{4+\alpha}} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$6. I(\alpha) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in (1, +\infty).$$

$$7. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \operatorname{arctg} x dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$8. I(\alpha) = \int_5^{+\infty} \frac{x^3}{4+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in (4, +\infty).$$

$$9. I(\alpha) = \int_3^{+\infty} \frac{x^2+2}{3+x^{3+\alpha}} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$10. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha x e^{-\alpha x^2} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$11. I(\alpha) = \int_2^{+\infty} \frac{x^3+2}{3+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in (4, +\infty).$$

$$12. I(\alpha) = \int_2^{+\infty} \frac{x^2}{4+x^{3+\alpha}} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$13. I(\alpha) = \int_7^{+\infty} \frac{x}{2+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in (2, +\infty).$$

$$14. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2+3} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$15. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{5+4x^{4+\alpha}} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$16. I(\alpha) = \int_4^{+\infty} \frac{x^2}{3+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in (3, +\infty).$$

$$17. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$18. I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^3}{5+x^{3+\alpha}} dx, \quad \alpha \in (1, +\infty).$$

$$19. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\alpha(x^4+1)} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

$$20. I(\alpha) = \int_4^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^{2+\alpha}} dx, \quad \alpha \in (3, +\infty).$$

$$21. I(\alpha) = \int_7^{+\infty} \frac{x+1}{2+x^{\alpha-1}} dx, \quad \alpha \in (3, +\infty).$$

$$22. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha^3 x^2 e^{-\alpha x^3} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$