

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

(1 курс, 1 семестр)

Жирным шрифтом в программе выделены основные определения и теоремы. Незнание формулировки любого из них автоматически влечет неудовлетворительную оценку на экзамене.

1 Элементы математической логики и теории множеств

1.1 Язык математической логики

Высказывания, значение истинности высказывания. Операции над высказываниями (конъюнкция, дизъюнкция, импликация, отрицание, эквивалентность). Высказывательные переменные. Формулы алгебры высказываний. **Основные тавтологии** (двойное отрицание, коммутативность и ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность, правила де Моргана,...). Одноместные предикаты. **Кванторы общности и существования.** **Отрицание предикатов и кванторов.**

1.2 Алгебра теории множеств

Множества и операции над ними (объединение, пересечение, разность, дополнение), свойства операций. **Двойственность операций объединения и пересечения.** Декартово произведение множеств.

1.3 Отображения

Бинарные отношения и их примеры. Понятие отображения (функции) и графика отображения. Область определения и область значений, образы и прообразы. **Композиция отображений.** **Полный прообраз множества.** **Сужение функции.** Сюръекция, инъекция, биекция. Обратное отображение.

2 Вещественные числа

2.1 Аксиоматика множества вещественных чисел

Аксиоматика множества рациональных чисел, **аксиома Архимеда.** Аксиоматика множества вещественных чисел. **Аксиомы сложения, аксиомы умножения, аксиомы связи сложения и умножения, аксиомы порядка, аксиомы связи порядка с арифметическими операциями, аксиома полноты.** Модели множества действительных чисел, изоморфизм. **Непротиворечивость системы аксиом.** **Важнейшие подмножества в \mathbb{R} — множества натуральных, целых, рациональных чисел.** Промежутки (сегмент, интервал, полуинтервал).

2.2 Границы числовых множеств вещественных чисел

Максимальный и минимальный элементы множества. Границы числовых множеств. Множества, ограниченные сверху и снизу. Точные верхняя и нижняя границы множества. Теорема Дедекинда.

Принцип Архимеда и его следствия.

2.3 Мощности в \mathbb{R}

Мощность подмножеств в \mathbb{R} . Мощность пустого, конечного множества. Счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность континуума. Теорема Кантора о несчетности континуума.

3 Теория предела последовательности

3.1 Предел последовательности

Абсолютная величина числа и ее свойства. ε -окрестность и окрестность числа. Числовые последовательности. Арифметические операции с последовательностями. Ограниченные последовательности. Определение предела последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Общие свойства предела (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности). Предел и операции над последовательностями. Предельный переход в неравенствах.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства бесконечно малых последовательностей. Символы Харди " \sim ", " \asymp " и Ландау " O ", " o ".

3.2 Полнота

Различные формы полноты множества вещественных чисел. Последовательности стягивающихся сегментов, лемма Кантора. Лемма Бореля-Лебега о покрытиях отрезка интервалами. Предельная точка множества в \mathbb{R} , лемма Больцано-Вейерштрасса. Последовательности Коши, критерий Коши сходимости последовательности.

3.3 Монотонные последовательности

Монотонные последовательности. Теорема о сходимости монотонных последовательностей. Неравенство Бернулли, число Эйлера e .

3.4 Подпоследовательности

Подпоследовательности и частичные пределы, лемма Больцано-Вейерштрасса для последовательностей. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их характеристические свойства. Последовательности $\bar{a}_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ и $\underline{a}_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$ и их свойства.

4 Предел функции

4.1 Предел функции

Определение предела функции Коши и его характеристика в терминах последовательностей (предел функции по Гейне). Общие свойства предела функции (единственность предела, локальная ограниченность функции, имеющей предел) Арифметические операции над числовыми функциями. Предел и операции над функциями, предел композиции. **Предел функции и неравенства. Замечательные пределы** $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

4.2 Обобщения предела функции

Односторонние пределы. Критерий существования предела в терминах односторонних пределов. Пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Общее определение предела функции по базе. Символы Харди и Ландау для функций.

4.3 Пределы монотонной функции

Критерий Коши для предела функции. Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

5 Непрерывные функции

5.1 Локальные свойства

Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций (локальная ограниченность, локальное сохранение знака). Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность композиции.

5.2 Глобальные свойства

Непрерывность функции на множестве. Теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции и о достижении точных границ. Теоремы Больцано-Коши о промежуточных значениях. Теорема о непрерывном образе отрезка.

Равномерная непрерывность, теорема Кантора. Колебание функции. Модуль непрерывности, классы Гельдера.

5.3 Взаимно однозначные непрерывные функции

Биективность строго монотонной функции. Критерий глобальной непрерывности монотонной функции. Критерий взаимной однозначности непрерывной функции. Классификация разрывов функции. **Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.**

5.4 Элементарные функции

Элементарные функции. Степени, степенная, экспоненциальная и логарифмическая функции и их свойства (определения, непрерывность и монотонность).

5.5 Замечательные пределы

Еще три замечательных предела: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

6 Дифференцируемые функции

6.1 Производная и дифференцируемость

Определение производной. Примеры естественнонаучных задач, приводящих к понятию производной. **Дифференцируемость и ее связь с существованием производной.** Дифференциал, приближенные вычисления с использованием дифференциала. **Производные элементарных функций.**

6.2 Правила дифференцирования

Связь непрерывности и дифференцируемости. Дифференцирование и арифметические операции. **Дифференцирование композиции.** **Производная обратной функции.** **Производные высших порядков.**

6.3 Экстремумы и раскрытие неопределенностей

Экстремумы функции. Лемма Ферма (необходимое условие экстремума). Стационарные точки функции. **Основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши).** Раскрытие неопределенностей. **Правила Лопиталья** для неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Другие виды неопределенностей.

6.4 Формула Тейлора

Формула Тейлора. Различные формы остатка формулы Тейлора (Пеано, Лагранжа, Коши). **Пять основных разложений элементарных функций.**

Понятие о сходимости числовых рядов. Сходимость разложений Тейлора элементарных функций.

6.5 Монотонность и производная

Исследование функций с помощью производной. **Монотонность и знак производной.** **Достаточное условие экстремума в терминах первой или второй производной.** **Достаточное условие экстремума в терминах производных высших порядков.** Алгоритм отыскания глобального экстремума.

6.6 Выпуклые функции

Выпуклые функции. Различные формы условия выпуклости. Свойства выпуклых функций (существование односторонних производных, дифференцируемость всюду, кроме счетного множества, непрерывность). **Условия выпуклости в терминах первой и второй производной.** Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения: неравенства Юнга, Гельдера и Минковского.