

# ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

(2 курс, 3 семестр)

## 0 Определения и формулировки из программы 1-2 семестров

Операции над множествами.

Функция и связанные с ней понятия (образ, прообраз, график, сюръекция, инъекция, биекция).

Точные верхняя и нижняя границы множества.

Определение предела последовательности.

Теорема о сходимости монотонных последовательностей.

Число Эйлера.

Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности.

Определение предела функции.

Критерий Коши для предела функции.

Непрерывность функции в точке.

Теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции и о достижении точных границ.

Теоремы Больцано-Коши о промежуточных значениях.

Равномерная непрерывность, теорема Кантора.

Критерий глобальной непрерывности монотонной функции.

Критерий взаимной однозначности непрерывной функции.

Определение производной. Таблица производных.

Правила Лопиталья для неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$  и  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Полином Тейлора. Формы остатка формулы Тейлора (Пеано, Лагранжа).

Монотонность и знак производной.

Первое и второе достаточные условия экстремума.

Выпуклые функции. Условия выпуклости в терминах первой и второй производной.

Первообразная функции. Неопределенный интеграл.

Определение интеграла Римана: разбиение отрезка, ранг разбиения, разбиения с отмеченными точками и интегральные суммы, предел интегральных сумм.

Классы интегрируемых функций.

Свойства определенного интеграла: интегрируемость линейных комбинаций, линейность, аддитивность по области, монотонность. Неравенства для определенного интеграла.

Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

Основные методы вычисления определенных интегралов — интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

Несобственные интегралы. Абсолютная и условная сходимость. Признак сравнения для интегралов от положительных функций.

Признак Абеля-Дирихле сходимости несобственных интегралов.

Топология, открытые множества. Внутренняя точка множества и его внутренность.

Предельная точка множества. Замкнутые множества. Теорема двойственности открытых и замкнутых множеств.

Сходящиеся последовательности в топологическом пространстве.

Метрика, метрические пространства, топология в них.

Последовательность Коши, полнота метрического пространства.

Ограниченные множества. Замкнутые шары, теорема Кантора о вложенных замкнутых шарах.

Норма, линейное нормированное пространство. Метрика в линейном нормированном пространстве.

$d$ -мерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^d$ . Скалярное произведение  $\mathbb{R}^d$ , неравенство Коши, норма в  $\mathbb{R}^d$ .

Критерий компактности в  $\mathbb{R}^d$  (теорема Гейне-Бореля).

Предел и непрерывность функции на топологическом пространстве. Глобальный критерий непрерывности.

Компактные и связные множества. Теорема о непрерывном образе компакта, теорема о непрерывном образе связного множества.

Равномерно непрерывные функции на метрическом пространстве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Дифференцируемые функции, частные производные функции и их связь с производной.

Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл.

Частные производные высших порядков. Теорема Шварца о независимости непрерывной смешанной производной от последовательности дифференцирований.

Матрица Якоби и ее представление через частные производные. Производная композиции.

Теорема об обратной функции.

Теорема о неявной функции. Формулы для определения производных неявной функции.

Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции. Достаточное условие экстремума.

## 1 Теория рядов

### 1.1 Основные понятия теории рядов

Ряд, последовательность частичных сумм, сходимость ряда, сумма ряда. Абсолютная и условная сходимость. Остатки, связь сходимости ряда и его остатков.

Критерий сходимости положительного ряда. Признаки сравнения в форме неравенств и в предельной форме. Лемма о сравнении.

Признак Коши с корнем. Теорема Куммера. Следствия (признаки Даламбера и Раабе).

Ряды с монотонными слагаемыми. Интегральный признак Коши. Теорема Коши.

Признаки условной сходимости. Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля.

### 1.2 Операции над рядами

Ряд со скобками, связь сходимости ряда и ряда со скобками. Теорема о перестановках абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана о перестановках условно сходящегося ряда (без доказательства).

Произведение рядов, примеры упорядочивания произведения. Теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.

### 1.3 Функциональные ряды

Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости.

Теорема о перестановке предельных переходов.

Признаки равномерной сходимости рядов (Вейерштрасса, Абеля и Дирихле).

Теоремы о непрерывности функциональных последовательностей и рядов. Теорема Дини.

Теоремы об интегрируемости и дифференцируемости функциональных последовательностей и рядов.

## 1.4 Степенные ряды

Степенной ряд. Теорема Коши–Адамара. Радиус и интервал сходимости, формула Коши–Адамара.

Свойства суммы степенного ряда. Теоремы о непрерывности и бесконечной дифференцируемости суммы степенного ряда. Аналитическая функция, ряд Тейлора.

Теорема Абеля.

Пространство непрерывных функций. Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими многочленами. Пример Ван-дер-Вардена недифференцируемой функции.

## 1.5 Ряды Фурье

Тригонометрическая система, лемма об ортонормированности. Ряд Фурье, коэффициенты Фурье. Ряды Фурье четных и нечетных функций. Ограниченность частных сумм одного специального тригонометрического ряда.

Интегральное представление для частных сумм.

Лемма о приближении ступенчатыми функциями. Интегральный модуль непрерывности и его свойства.

Лемма Римана–Лебега и оценки коэффициентов Фурье.

Принцип локализации Римана.

Пример Фейера расходящегося ряда Фурье.

Условия сходимости ряда Фурье в точке. Лемма об асимптотическом представлении частных сумм ряда Фурье. Признак Дини сходимости в точке. Признак Дини–Липшица равномерной сходимости.

Признаки Жордана и Лебега (без доказательства). Теорема Фейера.

## 2 Интегралы, зависящие от параметра

### 2.1 Элементарная теория

Теоремы о непрерывности, дифференцируемости (правило Лейбница) и интегрируемости интеграла от параметра.

### 2.2 Равномерная сходимость

Равномерная сходимость функции. Критерии Гейне и Коши для равномерной сходимости функции.

Равномерная сходимость несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля.

Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость несобственных интегралов от параметра.

Теоремы о повторном несобственном интегрировании.

Теорема о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости несобственных интегралов второго рода от параметра.

### 2.3 Приложения теории интегралов от параметра

Интеграл Дирихле и его вычисление.

Гамма- и бета-функции Эйлера, области их определения. Свойства эйлеровых интегралов.

Теорема о связи эйлеровых интегралов (без доказательства).  
Вычисление интеграла вероятностей и его связь с гамма-функцией.  
Формула Стирлинга.