ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

(2 курс, 4 семестр)

0 Определения и формулировки из программы 1-3 семестров

Операции над множествами.

Функция и связанные с ней понятия (образ, прообраз, график, сюръекция, инъекция, биекция).

Точные верхняя и нижняя границы множества.

Определение предела последовательности.

Теорема о сходимости монотонных последовательностей. Число Эйлера.

Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности.

Определение предела функции. Критерий Коши для предела функции.

Непрерывность функции в точке.

Теоремы Больцано-Коши о промежуточных значениях.

Критерий глобальной непрерывности монотонной функции.

Критерий взаимной однозначности непрерывной функции.

Определение производной. Таблица производных.

Правила Лопиталя для неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Полином Тейлора. Формы остатка формулы Тейлора (Пеано, Лагранжа).

Монотонность и знак производной.

Первое и второе достаточные условия экстремума.

Выпуклые функции. Условия выпуклости в терминах первой и второй производной.

Первообразная функции. Неопределенный интеграл.

Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

Основные методы вычисления определенных интегралов — интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

Несобственные интегралы. Абсолютная и условная сходимость. Признак сравнения для интегралов от положительных функций.

d-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^d$. Скалярное произведение $\mathbb{R}^d$, неравенство Коши, норма в $\mathbb{R}^d$.

Критерий компактности в $\mathbb{R}^d$ (теорема Гейне-Бореля).

Предел и непрерывность функции на топологическом пространстве. Глобальный критерий непрерывности.

Компактные и связные множества. Теорема о непрерывном образе компакта, теорема о непрерывном образе связного множества.

Равномерно непрерывные функции на метрическом пространстве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Дифференцируемые функции, частные производные функции и их связь с производной. Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл.

Частные производные высших порядков. Теорема Шварца о независимости непрерывной смешанной производной от последовательности дифференцирований.

Матрица Якоби и ее представление через частные производные. Производная композиции.

Теорема об обратной функции.

Теорема о неявной функции. Формулы для определения производных неявной функции.

Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции. Достаточное условие экстремума.

Ряд, последовательность частичных сумм, сходимость ряда, сумма ряда. Абсолютная и условная сходимость. Остатки, связь сходимости ряда и его остатков.

Критерий сходимости положительного ряда. Признаки сравнения в форме неравенств и в предельной форме.

Признак Коши с корнем, признаки Даламбера и Раабе. Интегральный признак Коши.

Признаки Дирихле и Абеля.

Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости.

Признаки равномерной сходимости рядов (Вейерштрасса, Абеля и Дирихле).

Теоремы о непрерывности функциональных последовательностей и рядов. Теорема Дини.

Теоремы об интегрируемости и дифференцируемости функциональных последовательностей и рядов.

Степенной ряд. Теорема Коши–Адамара. Радиус и интервал сходимости, формула Коши–Адамара.

Теоремы о непрерывности и бесконечной дифференцируемости суммы степенного ряда. Аналитическая функция, ряд Тейлора.

Теорема Абеля.

Ряд Фурье, коэффициенты Фурье. Интегральное представление для частных сумм.

Лемма Римана–Лебега и оценки коэффициентов Фурье.

Принцип локализации Римана.

Признак Дини сходимости в точке. Признак Дини–Липшица равномерной сходимости.

Теоремы о непрерывности, дифференцируемости (правило Лейбница) и интегрируемости интеграла от параметра.

Равномерная сходимость несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля.

Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость несобственных интегралов от параметра.

Теоремы о повторном несобственном интегрировании.

1 Интеграл Римана в евклидовом пространстве

1.1 Мера Жордана в $\mathbb{R}^d$

Мера сегмента и ее свойства. Фигура, мера фигуры и ее свойства.

Внутренняя и внешняя меры. Мера Жордана, критерий измеримости.

Свойства меры Жордана (измеримость и операции над множествами, монотонность, аддитивность и субаддитивность). Теорема о площади криволинейной трапеции.

1.2 Определение и условия интегрируемости

Определение интеграла Римана. Суммы Дарбу и их свойства. Интегралы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости.

Множества лебеговой меры нуль. Критерий интегрируемости Лебега.

Свойства интеграла Римана.

1.3 Вычисление интеграла Римана сведением к повторному

Мера декартового произведения множеств.

Основная теорема об интеграле по произведению множеств. Следствия из основной теоремы.

1.4 Замена переменной в интеграле Римана

Диффеоморфизм. Леммы о преобразование меры при линейных отображениях и при диффеоморфизмах.

Формула замены переменной. Полярные, сферические и цилиндрические координаты.

2 Криволинейные интегралы

2.1 Функции ограниченной вариации и интеграл Стилтьеса

Вариация функции,класс BV. Аддитивность и непрерывность вариации. Критерий Жордана.

Определение интеграла Стилтьеса и его свойства. Условия существования интеграла. Вычисление интеграла Римана-Стилтьеса.

2.2 Длина пути

Путь, след, начало и конец пути. Длина пути, спрямляемый путь. Критерий спрямляемости Жордана, формулы для вычисления длины. Интегралы вдоль путей.

2.3 Жордановы кривые и их параметризации

Жордановы кривые и их параметризации. Замена параметра и описание класса параметризаций. Длина и натуральная параметризация.

Ориентация. Интегралы вдоль жордановой кривой. Контур: ориентация и интеграл по контуру.

2.4 Первообразная функции многих переменных

Область, линейная связность области. Определение первообразной и ее свойства. Независимость криволинейного интеграла от пути.

Условие существования первообразной.

2.5 Формула Грина

Положительная ориентация контура. Теорема (формула Грина). Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов.

3 Поверхностные интегралы. Формула Стокса

3.1 Поверхности

Параметрические поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Площадь поверхности.

3.2 Формула Стокса

Ориентация поверхности. Поверхностные интегралы. Поверхности с краем.
Формула Стокса.
Формула Гаусса-Остроградского.
Язык теории поля. Основные теоремы теории поля.

4 Анализ Фурье

4.1 Система Хаара

Двоичные отрезки. Определение системы Хаара, ортогональность. Ряды Фурье-Хаара.
Лемма об интегральном представлении сумм Фурье–Хаара. Ряды Фурье–Хаара непрерывных функций.

4.2 Преобразование Фурье

Носитель функции. Интегрирование комплекснозначных функций, классы $R_0(\mathbb{R}^D)$, $C_0(\mathbb{R}^D)$. Равномерная непрерывность функций из $C_0(\mathbb{R}^D)$.
Леммы о ступенчатых функциях и о непрерывности в среднем.
Преобразование Фурье и его свойства.
Преобразование Фурье и операции анализа (растяжение, сдвиги). Преобразование Фурье и дифференцирование.
Свертки и их свойства. Преобразование Фурье свертки.
Теорема Планшереля.