Министерство образования Республики Беларусь
Учебно-методическое объединение вузов Республики Беларусь
по естественнонаучному образованию

УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель Министра образования
Республики Беларусь
________________ А.И. Жук
«30» __12__ 2008 г.

Регистрационный № ТД-G.169/тип.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Типовая учебная программа
для высших учебных заведений по специальностям:
1-31 03 01 «Математика» (по направлениям)
1-31 03 02 «Механика» (по направлениям)

СОГЛАСОВАНО

Председатель УМО вузов
Республики Беларусь
по естественнонаучному
образованию
________________ В.В. Самохвал
«___» ________ 2008 г.

СОГЛАСОВАНО

Начальник Управления высшего и
среднего специального образования
________________ Ю.И. Миксюк
«30» __12__ 2008 г.

Первый проректор Государственного
учреждения образования
«Республиканский институт высшей
школы»
________________ И. В. Казакова
«28» __12__ 2008 г.

Эксперт-нормоконтролер
________________ С.М. Артемьева
«29» __12__ 2008 г.

Минск 2008

СОСТАВИТЕЛИ:

Зверович Э.И. – профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор
Килбас А. А. – заведующий кафедрой теории функций Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор
Рогозин С.В. - доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент
Примачук Л.П. - доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра математического анализа Учреждения образования «Белорусского государственного университета им. М. Танка»

Рябушко Антон Петрович – профессор кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет», доктор физико-математических наук, заслуженный работник образования, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:

Кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол № 9 от 7 марта 2008 г.)

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 3 от 27 марта 2008 г.)

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения вузов Республики Беларусь по естественнонаучному образованию
(протокол № 3 от 10 апреля 2008 г.);

Ответственный за выпуск: Килбас Анатолий Александрович

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Дисциплина «Математический анализ» является базовой для преподавания большинства математических курсов. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ и интегральные уравнения», «Уравнения математической физики», «Вариационное исчисление и методы оптимизации». При изучении математического анализа студенты знакомятся с основами дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных. Основные понятия дифференциального и интегрального исчисления являются базовыми для освоения указанных выше математических дисциплин.

Элементы теории предела и дифференциального исчисления используются при изучении дисциплин «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ и интегральные уравнения», «Уравнения математической физики». Базовые конструкции интегрального исчисления используются при решении интегральных уравнений в рамках изучения дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения», при создании вариационных принципов в задачах математической физики (дисциплина «Уравнения математической физики»), при изучении геометрии гладких поверхностей в рамках дисциплины «Дифференциальная геометрия», при построении необходимых и достаточных условий оптимальности в задачах оптимизации (дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации»).

В соответствии с типовым учебным планом по специальности 1-31 03 01 «Математика» (по направлениям) на изучение дисциплины «Математический анализ» выделяется 992 часа. Из них 544 часа аудиторных занятий, в том числе лекционных – 272 ч, практических 272 ч. В соответствии с типовым учебным планом по специальности 1-31 03 02 «Механика» (по направлениям) на изучение дисциплины «Математический анализ» выделяется 902 часа. Из них 494 часа аудиторных занятий, в том числе лекционных – 252 ч., практических 242 ч.

Основными методами изучения дисциплины «Математический анализ» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала. Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, коллоквиумов, компьютерного тестирования, самостоятельных работ и опросов на практических занятиях.

Методы привития студентами практических навыков использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на практических занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время практических занятий в форме проверки домашних заданий, компьютерного тестирования, а также на контрольных работах и зачетах.

Цель дисциплины "Математический анализ": создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики.

***Образовательная цель*:** изложение основ дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных.

***Развивающая цель*:** формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Математический анализ»:

-формирование у студентов понятия числа:

-изучение понятия предела и освоение этого понятия с целью практического использования при решении различных задач математики:

-изучение основ дифференциального исчисления, использование элементов дифференциального исчисления при решении экстремальных задач и других задач современной математики;

-использование основ интегрального исчисления при решении задач математики, механики, математической физики.

В результате изучения дисциплины «Математический анализ» обучаемый должен:

знать:

- основные понятия и результаты дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных;
- методы доказательств и алгоритмы решения задач математического анализа;
- новейшие достижения в области математического анализа и их приложения в задачах естествознания;

уметь:

- использовать основные результаты математического анализа в практической деятельности;
- использовать теоретические и практические навыки основ дифференциального и интегрального исчисления в математике.

Примерный тематический план дисциплины "Математический анализ"

для специальности 1-31 03 01 «Математика» (по направлениям)

№	Наименование тем и разделов	Распределение часов по видам занятий		
		Всего	Лекц.	Практ.
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	Элементы математической логики и теории множеств	10	6	4
2	Множество действительных чисел	14	8	6
3	Предел последовательности	28	14	14
4	Предел функции	24	10	14
5	Непрерывные функции	16	12	4
6	Дифференцируемые функции	44	22	22
7	Неопределенный интеграл	24	12	12
8	Определенный интеграл Римана	28	16	12
9	Топологические пространства	10	6	4
10	Дифференцируемые функции многих переменных	30	14	16
11	Дифференцируемые векторные функции	22	8	14
12	Многообразия в R^d. Экстремум на многообразии	22	10	12
13	Числовые ряды	30	14	16
14	Функциональные последовательности и ряды	32	16	16
15	Ряды Фурье, интеграл Фурье	32	16	16
16	Интегралы, зависящие от параметра	42	20	22
17	Интеграл Римана в R^d	60	30	30
18	Криволинейные интегралы	24	12	12
19	Поверхностные интегралы	30	16	14
20	Элементы векторного анализа	22	10	12
	Всего по курсу	**544**	**272**	**272**

Примерный тематический план дисциплины "Математический анализ"

для специальности 1-31 03 02 «Механика» (по направлениям)

№	**Наименование тем и разделов**	**Распределение часов по видам занятий**		
		Всего	**Лекц.**	**Практ.**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	Элементы математической логики и теории множеств	10	6	4
2	Множество действительных чисел	14	8	6
3	Предел последовательности	28	14	14
4	Предел функции	24	10	14
5	Непрерывные функции	16	12	4
6	Дифференцируемые функции	44	22	22
7	Неопределенный интеграл	24	12	12
8	Определенный интеграл Римана	28	16	12
9	Топологические пространства	10	6	4
10	Дифференцируемые функции многих переменных	30	14	16
11	Дифференцируемые векторные функции	22	8	14
12	Многообразия в R^d. Экстремум на многообразии	22	10	12
13	Числовые ряды	30	14	16
14	Функциональные последовательности и ряды	32	16	16
15	Ряды Фурье, интеграл Фурье	32	16	16
16	Интегралы, зависящие от параметра	42	20	22
17	Интеграл Римана в R^d	38	22	16
18	Криволинейные интегралы	16	8	8
19	Поверхностные интегралы	20	12	8
20	Элементы векторного анализа	12	6	6
	Всего по курсу	**494**	**252**	**242**

Тема 1. Элементы математической логики и теории множеств

Высказывания, значение истинности высказывания. Операции над высказываниями (конъюнкция, дизъюнкция, импликация, отрицание, эквивалентность). Высказывательные переменные. Формулы алгебры высказываний. Основные тавтологии (двойное отрицание, коммутативность и ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность, правила де Моргана и др.). Одноместные предикаты. Кванторы общности и существования. Отрицание предикатов и кванторов. Применение логики предикатов для описания математических понятий. Элементы теории доказательств.

Множества и операции над ними (объединение, пересечение, разность, дополнение). Двойственность операций объединения и пересечения. Декартово произведение множеств.

Бинарные отношения и их примеры. Понятие отображения (функции) и графика отображения. Область определения и область значений, образы и прообразы. Композиция отображений. Полный прообраз множества. Сужение функции. Сюръекция, инъекция, биекция. Обратное отображение. Отношение эквивалентности. Рефлексивность, симметричность, транзитивность.

Тема 2. Множество действительных чисел

Множества N, Z, Q. Операции на них, свойства. Аксиоматика множества действительных чисел. Модели множества R действительных чисел, непротиворечивость, изоморфизм моделей. Важнейшие подмножества.

Максимальный и минимальный элементы множества. Границы числовых множеств. Множества, ограниченные сверху и снизу. Точные верхняя и нижняя границы множества. Теорема Дедекинда.

Позиционные системы счисления. Алгоритм определения q-ичных цифр числа. Модель множества вещественных (действительных) чисел. Геометрическая интерпретация вещественных (действительных) чисел.

Мощность множеств. Мощность пустого, конечного множества. Счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность континуума. Теорема Кантора о несчетности континуума.

Тема 3. Предел последовательности

Абсолютная величина числа и окрестности, свойства модуля. Понятие числовой последовательности. Арифметические операции с последовательностями. Ограниченные последовательности. Определение предела последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности.

Общие свойства предела (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности). Предел и операции над последовательностями. Предельный переход в неравенствах.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства бесконечно малых последовательностей. Символы Харди и Ландау. Шкала бесконечно больших последовательностей.

Различные формы полноты множества вещественных чисел. Последовательности стягивающихся сегментов, лемма Кантора. Лемма Бореля-Лебега о покрытиях отрезка интервалами. Предельная точка множества, лемма Больцано-Вейерштрасса.

Признаки сходимости последовательности. Последовательности Коши, критерий Коши сходимости последовательности. Монотонные последовательности. Теорема о сходимости монотонных последовательностей.

Неравенство Бернулли, число Эйлера «е».

Подпоследовательности и частичные пределы, лемма Больцано-Вейерштрасса для последовательностей. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их характеристические свойства.

Тема 4. Предел функции

Определение предела функции Коши. Предел функции по Гейне. Определение предела в терминах окрестностей. Общие свойства предела функции (единственность предела, локальная ограниченность функции, имеющей предел)

Арифметические операции над числовыми функциями. Предел и операции над функциями. Предел функции и неравенства. Замечательные пределы.

Односторонние пределы. критерий существования предела в терминах односторонних пределов. Пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Несобственные (бесконечные) числа. Понятие предела функции по базе. Символы Харди и Ландау для функций.

Существование предела функции. Критерий Коши предела функции. Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

Тема 5. Непрерывные функции

Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций (локальная ограниченность, локальное сохранение знака). Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность композиции.

Непрерывность функции на множестве. Глобальные свойства непрерывных функций на отрезке. Теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции и о достижении точных границ. Теоремы Больцано-Коши о промежуточных значениях. Теорема о непрерывном образе отрезка. Равномерная непрерывность, теорема Кантора. Колебание функции.

Точки разрыва функции и их классификация.

Биективность строго монотонной функции. Критерий глобальной непрерывности монотонной функции. Критерий взаимной однозначности непрерывной функции. Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.

Элементарные функции. Степенная, экспоненциальная и логарифмическая функции и их свойства (непрерывность и монотонность). Непрерывность элементарных функций.

Тема 6. Дифференцируемые функции

Определение производной. Примеры естественнонаучных задач, приводящих к понятию производной.

Дифференцируемость и ее связь с существованием производной. Дифференциал, приближенные вычисления с использованием дифференциала.

Производные элементарных функций. Правила дифференцирования. Связь непрерывности и дифференцируемости. Дифференцирование и арифметические операции. Дифференцирование композиции. Производная обратной функции. Производная функции, заданной неявно, и параметрически заданной функции.

Производные высших порядков. Полином Тейлора.

Экстремумы функции. Лемма Ферма (необходимое условие экстремума). Основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши).

Раскрытие неопределенностей. Правила Лопиталя.

Формула Тейлора. Различные формы остатка формулы Тейлора (Пеано, Лагранжа, Коши). Пять основных разложений элементарных функций. Понятие о сходимости числовых рядов. Сходимость разложений Тейлора элементарных функций.

Исследование функций с помощью производной. Монотонность и знак производной. Первое и второе достаточные условия экстремума. Алгоритм отыскания глобального экстремума.

Выпуклые функции. Различные формы условия выпуклости. Свойства выпуклых функций (существование односторонних производных, дифференцируемость всюду, кроме счетного множества, непрерывность). Условия выпуклости в терминах первой и второй производной. Точки перегиба. Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения: неравенства Юнга, Гельдера и Минковского.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения эскиза графика.

Тема 7. Неопределенный интеграл

Первообразная функции. Описание класса всех первообразных. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов элементарных функций. Обобщенная первообразная и неопределенный интеграл.

Основные методы интегрирования (интегрирование по частям и замена переменной). Интегрирование рациональных функций. Интегрирование рациональных тригонометрических функций.

Интегрирование дробно-линейных и квадратичных иррациональностей. Подстановки Эйлера.

Теорема Чебышева. Понятие об интегралах, не представимых в элементарных функциях.

Тема 8. Определенный интеграл Римана

Примеры естественнонаучных задач, приводящих к понятию интеграла Римана. Определение интеграла Римана: разбиение отрезка, разбиения с отмеченными точками и интегральные суммы, предел интегральных сумм. Класс интегрируемых функций. Необходимое условие интегрируемости.

Суммы Дарбу и их свойства. Верхний и нижний интегралы Дарбу и основные неравенства для них. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу и в терминах интегралов Дарбу. Классы интегрируемых функций (непрерывные, ограниченные с конечным числом точек разрыва, монотонные).

Интеграл по ориентированному промежутку. Свойства определенного интеграла: интегрируемость линейных комбинаций, линейность, аддитивность по области, монотонность. Неравенства для определенного интеграла. Непрерывность интеграла с переменным верхним пределом. Теоремы о среднем значении, формулы Бонне.

Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом. Существование первообразной у непрерывной функции и обобщенной первообразной у кусочно-непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

Основные методы вычисления определенных интегралов - интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Формула Тейлора с остатком в виде интеграла.

Приложения определенного интеграла. Длина пространственной кривой, площадь криволинейной трапеции, площадь поверхности вращения, объем тела вращения.

Несобственные интегралы. Особенности функции, определение интеграла от функции с особенностью. Свойства несобственного интеграла: совпадение с интегралом Римана для интегрируемых функций, линейность, аддитивность и монотонность. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле. Случай нескольких особенностей. Главное значение по Коши.

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютная и условная сходимость. Признак сравнения для интегралов от положительных функций. Признак Абеля-Дирихле для условной сходимости.

Тема 9. Топологические пространства

Топология, открытые множества. Индуцированная топология, подпространство. Внутренняя точка множества и его внутренность. Предельная и изолированная точка множества. Замкнутые множества. Теорема двойственности открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Граница множества, критерий открытости и замкнутости в терминах границы. Компактные и связные множества. Замкнутые подмножества компакта.

Сходящиеся последовательности в топологическом пространстве, предел функции в топологическом пространстве. Отделимость и единственность предела. Непрерывность функции на топологическом пространстве. Глобальный критерий непрерывности.

Метрика, метрические пространства. Открытые шары, топология в метрическом пространстве. Эквивалентные описания предельных точек в метрическом пространстве. Ограниченные множества. Последовательность Коши, полнота метрического пространства.

Замкнутые шары, теорема Кантора о вложенных замкнутых шарах. Принцип сжимающих отображений.

Норма, линейное нормированное пространство, полнота. Метрика в линейном нормированном пространстве. d-мерное евклидово пространство: скалярное произведение и его свойства, неравенство Коши, норма, координатная сходимость, полнота, важнейшие подмножества (сегмент, интервал). Критерий компактности (теорема Гейне-Бореля)

Непрерывные функции на топологических пространствах. Теорема о непрерывном образе компакта, теорема о непрерывном образе связного множества. Путь в топологическом пространстве, линейно связные множества. Выпуклое множество в векторном пространстве. Равномерно непрерывные функции на метрическом пространстве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Тема 10. Дифференцируемые функции многих переменных

Линейные формы на $\mathbf{R}^d$, гиперплоскость, общий вид линейной формы. Дифференцируемые функции, производная как линейная форма на $\mathbf{R}^d$. Свойства производной. Геометрическая интерпретация дифференцируемости. Формула Лагранжа.

Частные производные функции и их связь с производной. Достаточное условие дифференцируемости. Класс $C(\mathbf{R}^d)$ и его свойства. Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл. Частные производные высших порядков. Теорема Шварца о независимости непрерывной смешанной производной от последовательности дифференцирований. Классы $C^m(\mathbf{R}^d)$.

Мультииндексы. Полином Тейлора, различные формы записи, формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа. Интегральная форма остатка.

Квадратичные формы и их матрицы. Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра (без доказательства). Локальные экстремумы функции. Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции. Достаточное условие экстремума.

Тема 11. Дифференцируемые векторные функции

Векторные функции, компоненты векторной функции. Класс $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ линейных отображений $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$. Общий вид элементов $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Норма в $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Норма композиции линейных отображений.

Дифференцируемые векторные функции, производная как элемент $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Свойства производной и связь с производными компонент. Матрица Якоби. Производная композиции.

Гомеоморфизмы топологических пространств.

Теорема об обратной функции. Сравнение с одномерным случаем.

Постановка задачи о неявной функции. Теорема о неявной функции. Формулы для определения производных неявной функции.

Тема 12. Многообразия в $\mathbf{R}^d$. Экстремум на многообразии

Определение размерности многообразия в $\mathbf{R}^d$. Локально разрешающая функция многообразия, карты, атласы. Кривая, поверхность в $\mathbf{R}^d$. Теорема о локальном представлении многообразия как графика функции. Примеры.

Касательные векторы к многообразию, касательное пространство. Критерий для касательного вектора. Описание касательного пространства как ядра производной локально разрешающей функции многообразия. Система для определения касательных векторов. Нормальные векторы к многообразию. Нормальное пространство, базис нормального пространства. Ортогональное разложение $\mathbf{R}^d$ на нормальное и касательное пространство. Касательная плоскость к многообразию. Частные случаи: касательная к кривой в $\mathbf{R}^d$, касательная плоскость к поверхности в $\mathbf{R}^d$.

Условный экстремум на множестве. Необходимое условие экстремума на многообразии. Метод множителей Лагранжа. Алгоритм отыскания глобальных экстремумов.

Тема 13. Числовые ряды

Основная терминология теории рядов. Ряд, слагаемые ряда, частные суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Остатки ряда, связь сходимости остатков со сходимостью ряда. Операции над сходящимися рядами. Критерий Коши сходимости рядов. Необходимое условие сходимости ряда. Абсолютная и условная сходимость, связь между ними.

Положительные ряды, критерий сходимости. Признак сравнения и его различные формы. Признак Коши с корнем. Признаки Даламбера, Раабе, Гаусса. Интегральный признак Коши. Оценки остатков и частных сумм.

Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Ряды Лейбница.

Перестановки ряда, сумма перестановки абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов. Умножение рядов, теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.

Тема 14. Функциональные последовательности и ряды

Функциональные последовательности и ряды. Сходимость и равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Теорема о перестановке предельных переходов. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле для равномерной сходимости.

Функциональные свойства предела последовательности и суммы ряда: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Пространство непрерывных функций: векторная структура, норма, полнота. Теорема Вейерштрасса о плотности алгебраических полиномов в пространстве непрерывных функций.

Тема 15. Ряды Фурье и интеграл Фурье

Ортонормированные системы функций. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Тригонометрическая система. Тригонометрический ряд Фурье (комплексная и вещественная формы).

Минимизирующее свойство частичных сумм ряда Фурье, его следствия.

Лемма Римана-Лебега об осцилляции. Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье. Принцип локализации. Достаточные условия поточечной сходимости ряда Фурье. Сходимость ряда Фурье при условиях Дирихле. Достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье.

Ядро и суммы Фейера, их свойства. Теорема о равномерном приближении непрерывной 2π -периодической функции тригонометрическими многочленами.

Полнота и замкнутость тригонометрической системы функций.

Интеграл Фурье и его свойства.

Преобразование Фурье функций из L^2. Формула обращения. Теорема Планшереля.

Тема 16. Интегралы, зависящие от параметра

Интеграл Римана, зависящий от параметра. Функциональные свойства.

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Равномерная сходимость. Критерий Коши.

Признаки равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра. Функциональные свойства сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Γ- и B-функции Эйлера. Определение, области значений параметров, основные свойства. Функциональные свойства. Связь Γ- и B-функций Эйлера. Формула Стирлинга.

Тема 17. Интеграл Римана в $\mathbf{R}^d$

Множества в $\mathbf{R}^d$, измеримые по Жордану.

Определение интеграла Римана на множестве, измеримом по Жордану: разбиение множества, разбиения с отмеченными точками и интегральные суммы, предел интегральных сумм. Класс интегрируемых функций. Необходимое условие интегрируемости.

Суммы Дарбу и их свойства. Верхний и нижний интегралы Дарбу и основные неравенства для них. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу и в терминах интегралов Дарбу. Классы интегрируемых функций (непрерывные, ограниченные с множеством точек разрыва жордановой меры нуль). Критерий Лебега интегрируемости по Риману.

Свойства интеграла Римана: интегрируемость на подмножестве, аддитивность, линейность, монотонность. Неравенства для интеграла: интегрируемость модуля, теорема о среднем. Интегрируемость произведения.

Мера декартова произведения измеримых множеств. Теорема об интеграле по декартовому произведению множеств (теорема Фубини) и ее следствия: интегрируемость по сечениям, вычисление интегралов сведением к повторному, вычисление меры с помощью интеграла от меры сечения.

Преобразование меры при линейном отображении $\mathbf{R}^d$. Лемма о внешней мере Жордана диффеоморфных образов малых кубов. Замена переменной в интеграле Римана. Примеры: полярные координаты в $\mathbf{R}^2$, сферические и цилиндрические координаты в $\mathbf{R}^3$, сферические координаты в $\mathbf{R}^d$.

Тема 18. Криволинейные интегралы

Функции ограниченной вариации и их свойства, аддитивность и непрерывность вариации. Теорема Жордана. Абсолютно непрерывные функции и их простейшие свойства.

Интеграл Римана-Стилтьеса и его свойства (линейность, аддитивность, формула интегрировании по частям). Классы существования интеграла Стилтьеса, оценка интеграла. Формулы для вычисления с помощью интегралов Римана и Лебега

Путь, след пути. Спрямляемый путь и его длина. Критерий Жордана спрямляемости. Гладкий путь и формула для вычисления длины гладкого пути. Интегралы первого и второго рода вдоль пути и формулы для их вычисления.

Жорданова кривая, ее параметризации, непрерывность отображения, обратного к параметризации. Описание класса параметризаций. Длина жордановой кривой и корректность ее определения. Натуральная параметризация и ее существование.

Криволинейный интеграл 1-го рода вдоль спрямляемой жордановой кривой и корректность его определения, формулы для вычисления. Ориентация жордановой кривой, классы параметризаций, сохраняющих и изменяющих ориентацию. Криволинейный интеграл 2-го рода вдоль ориентированной спрямляемой жордановой кривой.

Замкнутая жорданова кривая (контур). Длина контура и криволинейный интеграл 1-го рода вдоль спрямляемого контура. Ориентация контура, классы параметризаций, сохраняющих и изменяющих ориентацию. Криволинейный интеграл 2-го рода вдоль спрямляемого ориентированного контура.

Области, линейная связность областей. Первообразная функции на $\mathbf{R}^d$. Необходимое условие существования первообразной. Теорема об эквивалентности существования первообразной и независимости криволинейного интеграла от пути. Нахождение первообразной с помощью криволинейного интеграла. Ориентация плоского контура. Формула Грина. Односвязные области. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла.

Тема 19. Поверхностные интегралы

Поверхность, параметрическая поверхность. Нормаль и касательная плоскость к поверхности.

Площадь поверхности

Ориентация поверхности. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Формулы их вычисления.

Поверхность с краем. Формула Стокса. Формула Гаусса-Остроградского.

Тема 20. Элементы векторного анализа

Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент. Векторное поле. Поток, дивергенция, ротор, циркуляция. Элементы анализа на многообразиях: полилинейные формы и их свойства; кососимметрические формы; внешнее произведение и его свойства. Понятия многообразия и многообразия с краем. Исчисление внешних дифференциальных форм на многообразиях. Общая теорема Стокса. Формулы Ньютона-Лейбница, Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса как частные случаи общей теоремы Стокса.

ЛИТЕРАТУРА

Основная.

1. Зорич В.А. Математический анализ. – М., Наука, Т. 1 – 1981, Т. 2 – 1984.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М., Наука, Т. 1, 2 – 1983 и др. издания.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М., Высшая школа, Т. 1, 2 – 1981 и др. издания.
4. Рудин У. Основы математического анализа. – М., Мир. – 1976.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., Наука – 1977 и др. издания.

Дополнительная.

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М., Наука – 1969 и др. издания.
2. Сборник задач по математическому анализу / Под ред. Кудрявцева Л.Д., М., Наука, Т. 1 – 1984, Т. 2 – 1986, Т. 3 – 1994 и др. издания.
3. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2 – М., Наука, 1978.
4. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М., Мир, 1967.