БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет
Кафедра теории функций

СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой
Теории функций
ММФ
Кротов В.Г.

____

______12 мая _____ 2014 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан
механико-математического
факультета
Медведев Д.Г.

____

________12 мая _______2014 г.

Регистрационный № УД 237

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Математический анализ

Для специальностей:
1-31 03 01 «Математика (по направлениям)»,
1-31 03 02 «Механика и математическое моделирование»,
1-31 03 08 «Математика и информационные технологии»,
1-31 03 09 «Компьютерная математика и системный анализ»

Составители: доктор физ.-мат. наук, профессор Кротов В.Г.,
доктор физ.-мат. наук, профессор Пекарский А.А.,
доктор пед. наук, профессор Бровка Н.В.,
канд. физ.-мат. наук, доцент Васильев И.Л.,
канд. физ.-мат. наук, доцент Ворошилов А.А.,
канд. физ.-мат. наук, доцент Толочко М.Э.,
канд. физ.-мат. наук, доцент Жоровина Т.Н.,
канд. физ.-мат. наук, доцент Долгополова О.Б.,
канд. физ.-мат. наук, доцент Громак Е.В.

Рассмотрено и утверждено
на заседании Научно-методического совета БГУ 15 мая 2014 г.,
протокол № 5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Дисциплина «Математический анализ» является базовой для преподавания большинства математических курсов. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ и интегральные уравнения», «Уравнения математической физики», «Вариационное исчисление и методы оптимизации». При изучении математического анализа студенты знакомятся с основами дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных. Основные понятия дифференциального и интегрального исчисления являются базовыми для освоения указанных выше математических дисциплин.

Элементы теории предела и дифференциального исчисления используются при изучении дисциплин «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ и интегральные уравнения», «Уравнения математической физики». Базовые конструкции интегрального исчисления используются при решении интегральных уравнений в рамках изучения дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения», при создании вариационных принципов в задачах математической физики (дисциплина «Уравнения математической физики»), при изучении геометрии гладких поверхностей в рамках дисциплины «Дифференциальная геометрия», при построении необходимых и достаточных условий оптимальности в задачах оптимизации (дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации»).

В соответствии с типовым учебным планом по специальности 1-31 03 01 «Математика» (по направлениям) на изучение дисциплины «Математический анализ» выделяется 992 часа. Из них 544 часа аудиторных занятий, в том числе лекционных – 272 ч, практических 272 ч. В соответствии с типовым учебным планом по специальности 1-31 03 02 «Механика» (по направлениям) на изучение дисциплины «Математический анализ» выделяется 902 часа. Из них 494 часа аудиторных занятий, в том числе лекционных – 252 ч., практических 242 ч.

Основными методами изучения дисциплины «Математический анализ» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала. Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, коллоквиумов, компьютерного тестирования, самостоятельных работ и опросов на практических занятиях.

Методы привития студентам практических навыков использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на практических занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время практических занятий в форме проверки домашних заданий, компьютерного тестирования, а также на контрольных работах и зачетах.

Цель дисциплины "Математический анализ": создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики.

Образовательная цель: изложение основ дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Математический анализ»:

- формирование у студентов понятий числа;
- изучение понятия предела и освоение этого понятия с целью практического использования при решении различных задач математики;
- изучение основ дифференциального исчисления, использование элементов дифференциального исчисления при решении экстремальных задач и других задач современной математики;
- использование основ интегрального исчисления при решении задач математики, механики, математической физики.

В результате изучения дисциплины обучаемый должен:

знать:

- основные понятия и результаты дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных;
- методы доказательств и алгоритмы решения задач математического анализа;
- новейшие достижения в области математического анализа и их приложения в задачах естествознания;

уметь:

- использовать основные результаты математического анализа в практической деятельности;
- использовать теоретические и практические навыки основ дифференциального и интегрального исчисления в математике.

Учебно-методический комплекс (УМК) преследует **цель** оказать посильную помощь студентам в усвоении учебного и нормативного материала, сориентировать в подборе специальной литературы для подготовки к практическим (семинарским) занятиям, направить на развитие навыков самостоятельного решения практических задач

Содержание тем УМК структурировано с учетом вопросов, рассматриваемых на лекционных занятиях. Для подготовки к семинарским занятиям, промежуточным и итоговым формам контроля следует исходить из содержания типовой программы по дисциплине для высших учебных заведений по специальности 1-31 03 01 «Математика» (по направлениям), 1-31 03 02 «Механика» (по направлениям), вопросов и заданий к практическим занятиям, размещенным в настоящем УМК.

Для более качественного и продуманного освоения обучающимися содержания учебного материала курса рекомендуется использование активных форм и методов обучения, например, проблемную лекцию, лекцию-визуализацию, метод анализа конкретных ситуаций; методы коллективного обсуждения проблем (дискуссия, «круглый стол», «мозговая атака»), метод проектов и др.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Белорусский государственный университет
механико-математический факультет
кафедра теории функций

В.Г.Кротов

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Минск 2012

Оглавление

Часть I

1 семестр

Глава 1
Введение в математику

§ 1. Основные понятия теории множеств

1.1. Понятие множества

Множество — это одно из основных первичных математических понятий. Оно не определяется, мы можем дать лишь его описание. Синонимами термина "множество" являются набор, семейство, класс, коллекция, совокупность и т.д.

По словам Г.Кантора (создателя теории множеств и основателя теоретико-множественного языка в математике) "под множеством мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли".

Это описание не может служить, конечно, определением множества, так как оно использует другие понятия, которые не определены. Его цель — дать разъяснения этому понятию. В математической логике понятие множества задается с помощью некоторой системы аксиом.

Объекты, составляющие множество, называют его **элементами**. Задать множество — это значит указать правило, по которому можно отличить его элементы, от объектов, ему не принадлежащих. Запись $x \in X$ будет всегда обозначать, что x является элементом множества X, а запись $x \notin X$ означает, что x не является элементом X.

Наиболее употребительными являются следующие три способы задания множества.

1) **Перечисление** элементов, например, запись

$$X = \{a, b \ldots, l\}$$

означает, что множество состоит из элементов a, b, $\ldots$, l. Другими словами, здесь мы явно указываем все элементы множества.

Чаще всего этот способ употребляется для так называемых конечных множеств.

2) **Индексация** элементов множества — это способ перечисления элементов множества с помощью элементов некоторого другого множества

$$X = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}.$$

Здесь множество A называется **множеством индексов**.

3) Определение **по свойству** применяется тогда, когда имеется некоторое свойство P, которым обладают элементы множества, а объекты, не являющиеся его элементами этим свойством не обладают. В таком случае используется запись

$$X = \{x : x \text{ обладает свойством } P\},$$

а свойство P называется в таком случае **характеристическим** для множества X.

Этот последний способ является, пожалуй, наиболее широко распространенным и служит богатейшим источником построения разнообразных примеров множеств.

1.2. Парадоксы наивной теории множеств

Отметим, что столь широкое толкование множества (по Кантору) является внутренне противоречивым. Наиболее известными иллюстрациями этому являются парадоксы, например, парадокс парикмахера или парадокс Рассела.

Парадокс парикмахера. Пусть X — непустое множество жителей деревни и Y — множество ее жителей, которые не бреются сами. Деревенский брадобрей $x \in X$ повесил у своего входа объявление

"Брею тех и только тех, кто не бреет себя сам".

Тогда x либо принадлежит множеству Y либо нет. Если он принадлежит Y, то не бреется сам и потому должен себя брить, то есть не принадлежать Y. Если же он не принадлежит Y, то бреется сам и, следовательно, не должен себя брить. В последнем случае он принадлежит Y. Таким образом, мы в любом случае получаем противоречие и множество жителей деревни, которых бреет брадобрей противоречиво.

Парадокс Рассела. Пусть M — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента.

Тогда мы имеем следующее. С одной стороны, если $M \in M$, то M не содержит себя в качестве элемента и должно быть $M \notin M$. С другой стороны, если $M \notin M$, то M содержит себя в качестве элемента $M \in M$. Таким образом, и здесь мы имеем дело с противоречивым множеством.

Чтобы не пользоваться такими противоречивыми множествами, будем считать, что все множества, которые изначально рассматриваются в рамках какой-либо теории, являются подмножествами одного множества, которое называется универсальным множеством для данной теории.

Примерами могут служить множество натуральных чисел в арифметике, множество действительных чисел а математическом анализе, множество комплексных чисел в теории аналитических функций и т.д.

При этом в процессе развития теории универсальное множество может расширяться. Но всегда в каждой конкретной ситуации это универсальное множество будет указываться вполне конкретно, если его выбор не ясен из контекста.

На этой базе будем строить другие множества, используя понятие подмножества, а также операции над множествами, которые скоро будут рассмотрены.

Чтобы избежать противоречий, рассмотренных в предыдущем разделе, в теории множеств (как и в других разделах математики) применяется аксиоматический метод построения теории. Мы познакомимся с ним несколько позже. При первичном знакомстве с теорией множеств для понимания ее основных конструкций и теорем нам будет вполне достаточно "наивного" канторовского подхода.

1.3. Отношения включения и равенства множеств

Пусть X и Y — два множества.

Определение 1.1 *Будем говорить, что множество X является* ***подмножеством*** *множества Y, если любой элемент из X принадлежит также и Y.*

В таком случае будем говорить также, что X содержится в Y и кратко записывать это так

$$X \subset Y.$$

Такое отношение между множествами называется **отношением включения**. Оно обладает свойствами

1) $X \subset X$ (рефлексивность),

2) если $X \subset Y$ и $Y \subset Z$, то $X \subset Z$ (транзитивность).

Определение 1.2 *Два множества X и Y называются* ***равными***, *если каждое из них содержится в другом, то есть $X \subset Y$ и $Y \subset X$.*

Равенство множеств записываем так: $X = Y$.

Отметим, что включение множеств $X \subset Y$ не исключает их равенства.

Определение 1.3 *Если $X \subset Y$, но $X \,/\, Y$, то будем говорить, что X является* ***собственным подмножеством*** *для Y.*[1]

Таким образом, чтобы установить, что включение $X \subset Y$ собственное, надо доказать, что любой элемент $x \in X$ принадлежит также Y и, кроме того, установить, что некоторый элемент $x_0 \in Y$ не является элементом множества X.

Для того чтобы подчеркнуть, что включение $X \subset Y$ является собственным, иногда пишут $X \subsetneq Y$.

Определение 1.4 ***Пустое множество*** *— это множество, не имеющее элементов. Оно обозначается символом $\varnothing$.*

[1]Иногда в математической литературе используются несколько иные обозначения для включений множеств. Именно, вместо $X \subset Y$ пишут $X \subseteq Y$, а знак $X \subset Y$ используют для собственных включений.

Естественно считать, что пустое множество является подмножеством любого множества. Тогда нетрудно показать, что пустое множество единственно: если $\varnothing_1$ и $\varnothing_2$ — два пустых множества, то должно быть $\varnothing_1 \subset \varnothing_2$ и $\varnothing_2 \subset \varnothing_1$, следовательно, $\varnothing_1 = \varnothing_2$.

1.4. Операции над множествами

Пусть X и Y — два множества.

Определение 1.5 ***Объединением*** *множеств X и Y называется множество $X \cup Y$, состоящее из всех элементов, содержащихся хотя бы в одном из множеств X, Y.*

Определение 1.6 ***Пересечением*** *множеств X и Y называется множество $X \cap Y$, состоящее из всех элементов, содержащихся в каждом из множеств X, Y.*

Определение 1.7 *Множества X и Y называются* ***непересекающимися*** *(или* ***дизъюнктными****), если $X \cap Y = \varnothing$.*

Определение 1.8 ***Разностью*** *множеств X и Y называется множество $X \setminus Y$, состоящее из всех элементов, содержащихся в X и не содержащихся в Y.*

Определение 1.9 *Пусть $X \subset Y$, тогда множество $X^c = Y \setminus X$ называется* ***дополнением*** *(относительно Y) множества X.*

Часто для иллюстрации операций над множествами используются диаграммы Венна.

1.5. Свойства операций над множествами

1) $X \cup Y = Y \cup X$ (коммутативность объединения)
2) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ (ассоциативность объединения)
3) $X \cap Y = Y \cap X$ (коммутативность пересечения)
4) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ (ассоциативность пересечения)
5) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения)
6) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения)
7) $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$ (правило Де Моргана)
8) $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$ (правило Де Моргана)
9) $(X^c)^c = X$ (правило двойного отрицания)

Эти свойства операций над множествами легко вытекают непосредственно из определений. Их доказательство является хорошим упражнением. Но прежде, чем это делать, мы познакомимся с основными правилами логического вывода.

§ 2. Введение в математическую логику

2.1. Высказывания и операции над ними

Высказыванием будем называть любое повествовательное предложение, которому может быть приписано значение истинности: ложно оно или истинно.

Если P — высказывание, то его **значением истинности** называется число

$$\alpha(P) = \begin{cases} 1, & \text{если } P \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если } P \text{ ложно.} \end{cases}$$

Определение 1.10 ***Отрицанием*** *высказывания P называется высказывание $\overline{P}$ (читается "не P"), истинное тогда и только тогда, когда P ложно.*

Определение 1.11 ***Дизъюнкцией*** *(логическим сложением) высказываний P и Q называется высказывание $P \vee Q$ (читается "P или Q"), ложное тогда и только тогда, когда ложны и P, и Q.*

Определение 1.12 ***Конъюнкцией*** *(логическим умножением) высказываний P и Q называется высказывание $P \wedge Q$ (читается "P и Q"), истинное тогда и только тогда, когда истинны и P, и Q.*

Определение 1.13 ***Импликацией*** *высказываний P и Q и называется высказывание $P \Rightarrow Q$ (читается "из P следует Q"), ложное тогда и только тогда, когда P истинно, а Q ложно.*

Определение 1.14 ***Эквивалентностью*** *высказываний P и Q и называется высказывание $P \Longleftrightarrow Q$ (читается "P равносильно Q"), истинное тогда и только тогда, когда P и Q имеют одинаковые значения истинности.*

Удобно определять также эти операции над высказываниями с помощью так называемой таблицы истинности

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

С помощью операций, исходя из простейших высказываний, можно строить новые, более сложные высказывания, называемые формулами. Например, $(P \vee Q) \iff R$. Отвлекаясь от конкретного содержания высказываний P, Q, R, будем называть их **высказывательными переменными**. **Формулами алгебры высказываний** являются

1) любая высказывательная переменная,

2) если F_1 и F_2 — формулы, то $\overline{F}_1$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \Longrightarrow F_2$ также являются формулами.

Другими словами, любая формула может быть получена из высказывательных переменных с помощью операций за конечное число шагов.

2.2. Логические законы (тавтологии)

Определение 1.15 ***Логическим законом*** *или* ***тавтологией*** *называется любая формула алгебры высказываний, значение истинности которой равно 1 при любых значениях истинности высказывательных переменных, входящих в нее.*

С одной стороны, тавтологии позволяют строить истинные высказывания, независимо от истинности образующих высказываний. С другой стороны, и это особенно важно, они могут давать правильные способы умозаключений. Приведем примеры простейших и, в то же время, важнейших тавтологий.

Упражнение 1.1 Доказать, что следующие высказывания являются логическими законами

1) $P \vee \overline{P}$ (закон исключенного третьего),

2) $\overline{P \wedge \overline{P}}$ (закон непротиворечивости),

3) $\overline{\overline{P}} \iff P$ (правило двойного отрицания),

4) $P \vee Q \iff Q \vee P$ (коммутативность дизъюнкции),

5) $P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R$ (ассоциативность дизъюнкции),

6) $P \wedge Q \iff Q \wedge P$ (коммутативность конъюнкции),

7) $P \wedge (Q \wedge R) \iff (P \wedge Q) \wedge R$ (ассоциативность конъюнкции),

8) $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции),

9) $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции),

10) $\overline{P \vee Q} \iff \overline{P} \wedge \overline{Q}$ (правило Де Моргана),

11) $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ (правило Де Моргана),

12) $((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ (транзитивность импликации),

13) $(P \wedge (P \Longrightarrow Q)) \Longrightarrow Q$

14) $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$ (закон контрапозиции).

Упражнение 1.2

1) Пусть $A \Longrightarrow B$ — истинное высказывание. Какие значения истинности имеют следующие высказывания $\overline{A} \Longrightarrow B$, $A \Longrightarrow \overline{B}$, $\overline{A} \Longrightarrow \overline{B}$, $B \Longrightarrow A$, $\overline{B} \Longrightarrow A$, $B \Longrightarrow \overline{A}$, $\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$

2) Доказать свойства операций над множествами из пункта 1.5.

2.3. Теоремы

Математические теоремы имеют форму импликации

$$P \Longrightarrow Q. \tag{1.1}$$

При P этом называется **условием** теоремы, а Q — ее **утверждением** (или заключением).

Если теорема (1.1) истинна, то говорят, что Q является **необходимым** условием для P, а P является **достаточным** для Q.

С каждой теоремой (1.1) можно связать еще три высказывания
$Q \Longrightarrow P$ — **обратная** теорема,
$\overline{P} \Longrightarrow \overline{Q}$ — **противоположная** теорема,
$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ — теорема, **обратная к противоположной**.

Упражнение 1.3

1) Расчленить на условие и заключение теорему Пифагора, признак делимости на 3, теорему о трех перпендикулярах, теорему Виета.

2) Сформулировать обратную, противоположную и обратную к противоположной теоремы к теоремам из предыдущего упражнения.

3) Является ли необходимым или достаточным условием

— отсутствие четных делителей у целого числа для простоты этого числа?

— четность одного из двух целых чисел и делимость на 3 другого для делимости их произведения на 6?

— равноудаленность точек множества на плоскости (в пространстве) от фиксированной точки для того, чтобы это множество было окружностью?

— положительность дискриминанта для существования корня у квадратного трехчлена?

— совпадение двух пар чисел для совпадения их средних арифметических (средних геометрических)?

Из тавтологии 14) следует, что теорема и обратная к противоположной равносильны.

Отметим также часто встречающуюся схему доказательства от противного теоремы $P \Longrightarrow Q$. Она начинается словами "предположим, что P истинно, а Q ложно". Далее в результате некоторых рассуждений, нам удается доказать, что при этом предположении верно $\overline{P}$. Таким образом, оказываются верными P и $\overline{P}$, что недопустимо в силу закона непротиворечивости. Мы вынуждены признать, что наше допущение о том, что P истинно, а Q ложно, является неверным. Следовательно, из P следует Q.

Суть этого способа доказательства состоит в том, что доказательство импликации $P \Longrightarrow Q$ заменяется доказательством равносильной ей импликации $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ (см. тавтологию 14)).

Ярким примером доказательства от противного может служить доказательство Евклида бесконечности множества простых чисел — если предположить, что $p_1, \ldots, p_n$ — все простые числа, то число $p = p_1 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ является составным. Тогда и $1 = p - p_1 \cdot \cdots \cdot p_n$ — составное число.

Справедлив следующий логический закон

$$((P \Longrightarrow Q) \vee (Q \Longrightarrow P)) \Longleftrightarrow (P \Longleftrightarrow Q).$$

Поэтому в случае, когда верны обе теоремы $P \Longrightarrow Q$ и $Q \Longrightarrow P$, их утверждения объединяют в форме эквивалентности $P \Longleftrightarrow Q$, которая называется **критерием**. В таком случае говорят также, что

а) P равносильно Q,

б) Q есть необходимое и достаточное условие для P,

в) P верно тогда и только тогда, когда верно Q,

г) Q есть характеристическое свойство для P.

Упражнение 1.4

1) Какие из следующих теорем допускают обращение — теорема Пифагора, признак делимости на 3, теорема о трех перпендикулярах, теорема Виета.

2) Сформулировать признаки параллелограмма и выяснить, какие из них являются характеристическими.

3) Какое свойство ромба является характеристическим?

4) дать определение касательной и сформулировать ее характеристическое свойство.

Иногда критерий может иметь более сложную форму, например, "утверждения P_1, P_2, …, P_n равносильны". В таком случае удобно доказывать критерий по круговой схеме

$$P_1 \Longrightarrow P_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow P_n \Longrightarrow P_1.$$

2.4. Предикаты и кванторы

Предикатом (одноместным) называется высказывание $P(x)$, зависящее от некоторого параметра x, принадлежащего некоторому множеству X. Значение истинности предиката зависит от выбранного значения параметра и не обязано быть одинаковым для всех значений параметра. Множество значений $x \in X$, для которых истинно $P(x)$, называется **множеством истинности** предиката $P(x)$

Пусть $P(x)$ — предикат, зависящий от $x \in X$. Тогда

1) **квантором общности** называется высказывание

$$\forall x \in X \quad P(x),$$

(читается "для любого $x \in X$ истинно $P(x)$"), истинное в точности тогда, когда множество истинности предиката $P(x)$ совпадает с X.

1) **квантором существования** называется высказывание

$$\exists x \in X \quad P(x),$$

(читается "существует $x \in X$, для которого истинно $P(x)$"), истинное в точности тогда, когда множество истинности предиката $P(x)$ не пусто.

Кванторы важны в математической логике. Но, кроме того, они дают возможность превращать обычные тексты в формальные, Это, с одной стороны, даст возможность использовать более удобные и компактные записи.

С другой стороны, применение кванторных записей позволяет проще исследовать смысл текста и избежать многих ошибок.

Для некоторых часто встречающихся в математике кванторных записей в разговорной речи часто используют сложившиеся словосочетания. Приведем два примера, в которых $P(n)$ — некоторое свойство, зависящее от натурального параметра n.

Запись

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n > m \quad P(n)$$

может быть прочитана так: свойство $P(n)$ выполнено для бесконечно многих значений n. Запись

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \quad P(n)$$

может быть прочитана так: свойство $P(n)$ выполнено для всех достаточно больших значений n.

Еще один важный пример — запись

$$\exists x \in X \quad (P(x) \wedge (\forall y \in X \quad ((P(y) \Rightarrow (y = x)))$$

означает, что найдется объект x, обладающий свойством P и такой, что если y — любой объект, обладающий свойством P, то $y = x$. Короче — существует и притом единственный объект x, обладающий свойством P. Обычно это высказывание обозначают в виде $\exists! x \quad P(x)$, и мы будем использовать такое сокращение.

Упражнение 1.5 Сформулировать в кванторах следующие высказывания.

1) Для любого элемента a множества A справедливо высказывание $P(a)$.

2) Любая точка на серединном перпендикуляре к отрезку равноудалена от его концов.

3) Если A не является подмножеством множества B, то найдется элемент $a \in A$, не принадлежащий B.

Непосредственно из определений кванторов общности и существования вытекают следующие **правила отрицания кванторов**

$$\overline{\forall x \in X \quad P(x)} \Longleftrightarrow \exists x \in X \quad \overline{P(x)},$$

$$\overline{\exists x \in X \quad P(x)} \Longleftrightarrow \forall x \in X \quad \overline{P(x)}.$$

Важно также подчеркнуть, что в кванторной записи однотипные кванторы, идущие подряд можно записывать в любом порядке.

Порядок следования различных кванторов важен — его нельзя менять, так как иначе изменится смысл высказывания. Поясним это на примере.

Рассмотрим высказывание "для любого натурального числа n существует натуральное число $m > n$" или

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad m > n.$$

Поменяем здесь порядок следования кванторов

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad m > n.$$

Полученное высказывание, разумеется ложно, хотя предыдущее — истинно.

Отметим еще, что в математике принято следующее соглашение: если в кванторной записи для некоторых переменных отсутствуют кванторы, то "по умолчанию" считается, что эти переменные расположены в начале кванторной записи под кванторами общности.

§ 3. Отображения и функции

3.1. Отношения

Под упорядоченной парой мы понимаем пару, в которой один из ее элементов отмечен. Этот отмеченный элемент называется первым в паре, а оставшийся — вторым.

Пусть X и Y — произвольные множества. **Декартовым (прямым) произведением** этих множеств называется множество

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, \ y \in Y\}$$

всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$.

Произвольное подмножество $R \subset X \times Y$ декартового произведения $X \times Y$ будем называть **отношением между X и Y**. Если $(x, y) \in R$, то будем говорить, что x находится в отношении R к y и кратко записывать это xRy.

На языке отношений можно выразить многие конструкции, которые мы рассматривали выше. Рассмотрим несколько содержательных примеров отношений.

Упражнение 1.6

1) *Отношение принадлежности.* Пусть X — множество и $\mathcal{B}(X)$ — множество всех его подмножеств[2]. Отношение

$$xRY \ \Leftrightarrow \ x \in Y$$

называется отношением принадлежности элементов $x \in X$ подмножествам из X.

2) *Отношение неравенства* между действительными числами

$$xRy \ \Leftrightarrow \ x \leqslant y.$$

3) *Отношение включения* в булеане любого множества X:

$$ARB \ \Leftrightarrow \ A \subset B$$

4) *Отношение равенства.* Пусть X и Y — два множества. Отношение

$$xRy \ \Leftrightarrow \ x = y$$

называется отношением равенства между элементами множеств X и Y. Его легко записать как подмножество в декартовом произведении $X \times Y$

$$\{(x, x) : x \in X \cap Y\}$$

[2] $\mathcal{B}(X)$ часто называют булеаном множества X

5) *Отношение делимости* между натуральными числами

$$nRm \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \quad n = km.$$

6) *Отношение неравенства* между действительными числами

$$xRy \Leftrightarrow x \leqslant y.$$

Для многих часто встречающихся и важных отношений вводятся специальные обозначения, которые используются при записи того факта, что элементы находятся в данном отношении.

3.2. Отношения эквивалентности

Следующее отношение является одним из самых важных в математике. Оно (наряду с отношением функции) лежит в основе классической математики.

Определение 1.16 *Бинарное отношение R на множестве X называется* ***отношением эквивалентности****, если выполнены следующие условия*
1) $\forall x \in X \quad xRx$ *(свойство рефлексивности),*
2) $\forall x, y \in X \quad xRy \Rightarrow yRx$ *(свойство симметричности),*
3) $\forall x, y, z \in X \quad (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow xRz$ *(свойство транзитивности).*

Упражнение 1.7 Показать, что следующие отношения являются отношениями эквивалентности

1) отношение равенства из упражнения 1.6.3),

2) отношение R на множестве натуральных чисел:

$$nRm \Leftrightarrow n \text{ и } m \text{ имеют одинаковую четность.}$$

Обычно для обозначения отношения эквивалентности используется символ $\sim$ и вместо xRy пишут $x \sim y$, говоря при этом, что элементы x и y эквивалентны.

Определение 1.17 *Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве X и $x \in X$. Множество*

$$\widehat{x} = \{y \in X : y \sim x\}$$

называется ***классом эквивалентности***[3] *элемента x. Любой элемент из $\widehat{x}$ называется тогда представителем класса эквивалентности $\widehat{x}$.*

Упражнение 1.8 Доказать, что

[3] Иногда используется термин **класс смежности**.

1) для любого $x \in X$ класс эквивалентности $\widehat{x}$ не пуст,

2) любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают,

3) объединение всех классов эквивалентности совпадает со множеством X

Огромна роль отношений эквивалентности в математике, науке и даже в практической деятельности. Часто мы имеем дело с огромными совокупностями объектов, каждый из которых имеет свои индивидуальные черты, особенности и признаки. Но учесть все их одновременно невозможно и мы, в зависимости от ситуации, интересуемся теми или иными признаками, игнорируя все остальные. Если эти выделенные признаки совпадают у двух объектов, то мы считаем их эквивалентными (условно равными) — принадлежащими одному классу. Далее вся исследуемая совокупность разбивается на непересекающиеся классы, причем в один класс объединяются те объекты, которые считаются равными и которые можно отождествить. Таким образом происходит построение любой классификации.

3.3. Общее понятие функции

Наряду с понятием множества основополагающим в математике является понятие функции, без которого невозможно представить себе какой-либо из разделов математики.

Становление современного понятия функции начинается с работ Лобачевского и Дирихле, которые впервые дали определение функции как соответствия — говорят, что на множестве X задана функция F со значениями в Y, если любому $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y = F(x) \in Y$, называемый образом элемента.

С одной стороны, это определение правильно выражает суть понятия функции. Но, с другой стороны, по существу оно заменяет термин "функция" термином "соответствие", который не расшифрован.

Сейчас общепринятым является следующее определение, принадлежащее Дедекинду. В нем отчетливо разъясняется понятие соответствия.

Определение 1.18 *Отношение F между X и Y называется* ***отображением*** *или* ***функцией****, заданной на X со значениями в Y, если выполнены следующие два условия*

1) $\forall x \in X \quad \exists y \in Y \quad xFy,$

2) $\forall x \in X \quad \forall y_1, y_2 \in Y \quad (xFy_1) \wedge (xFy_2) \implies y_1 = y_2.$

Первое из условий в этом определении говорит нам, что "функция" каждому элементу $x \in X$ "ставит в соответствие" элемент $y \in Y$, а второе означает, что этот элемент $y \in Y$ "является единственным".

Факт задания функции будем записывать так $F : X \to Y$, а вместо xFy для функций будем писать $y = F(x)$. В таком случае y называется **образом** элемента x, а x — **прообразом** элемента y. Часто функцию задают с помощью "поточечного" правила $x \mapsto F(x)$.

Введем еще ряд терминов, связанных с понятием функции. Множество X называется **областью определения** функции. Часто, область определения мы будем обозначать D_f или просто D, когда ясно, о какой функции идет речь.

3.4. Образы и прообразы

Если $A \subset X$, то множество

$$F(A) = \{y \in Y : \exists x \in X \quad y = F(x)\}$$

называется **образом** множества A, а $F(X)$ — **область значений** функции.

Если $B \subset Y$, то множество

$$F^{-1}(B) = \{x \in X : F(x) \in B\}$$

называется (полным) **прообразом** множества B.

Упражнение 1.9 Доказать следующие свойства образов и прообразов множеств

1) $A \subset B \Rightarrow\ F(A) \subset F(B)$,

2) $F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$,

3) $F(A \cap B) \subset F(A) \cap F(B)$ и не обязательно здесь имеет место равенство,

4) $A \neq \varnothing \ \Rightarrow\ F(A) \neq \varnothing$,

5) $A \subset B \Rightarrow\ F^{-1}(A) \subset F^{-1}(B)$,

6) $F^{-1}(A \cup B) = F^{-1}(A) \cup F^{-1}(B)$,

7) $F^{-1}(A \cap B) = F^{-1}(A) \cap F^{-1}(B)$,

8) $A \subset F^{-1}(F(A))$ и не обязательно здесь имеет место равенство,

9) $F(F^{-1}(A)) \subset A$ и не обязательно здесь имеет место равенство,

Множество $F(X)$ называется **областью значений** функции.

Часто термин "функция" интерпретируется "геометрически" и множество

$$\Gamma_F = \{(x, F(x)) : x \in D_F\} \tag{1.2}$$

называется **графиком** функции.

Упражнение 1.10

1) Пусть числа $a, b \in \mathbb{R}$ фиксированы. Функция $x \mapsto ax + b$, $x \in \mathbb{R}$ называется **линейной**.

2) Пусть числа $a, b, c \in \mathbb{R}$ фиксированы. Функция $x \mapsto ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$ называется **квадратичной**.

3) Пусть $n \in \mathbb{N}$ и заданы числа $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, \dots, n)$. Функция $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $x \in \mathbb{R}$, называется полиномиальной (или полиномом) степени n.

4) Функция
$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$
называется **функцией Дирихле**.

5) Если Y — произвольное множество, то любая функция $F : \mathbb{N} \to Y$ называется **последовательностью** со значениями в Y. Этот же термин сохраняют, если $\mathbb{N}$ заменить на любое бесконечное подмножество множества целых чисел $\mathbb{Z}$. В таком случае для образа числа $n \in \mathbb{N}$ обычно пишут не $F(n)$, а F_n.

6) Если X — произвольное множество и $A \subset X$ — подмножество в X, то функция
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in A^c, \end{cases}$$
называется **характеристической функцией** множества или ее **индикатором**.

3.5. Композиция отображений

Пусть заданы две функции $F : X \to Y$ и $G : Y \to Z$. Обратим внимание, что область значений первой из них $F(X)$ содержится в области определения второй Y.

Определение 1.19 *Отображение $g \circ f : X \to Z$, действующее по правилу*
$$G \circ F : x \mapsto G(F(x)), \quad x \in X,$$
*называется **композицией** отображений F и G.*

*При этом в композиции $G \circ F$ функция G называется **внешней**, а F — **внутренней**.*

Часто вместо термина композиция употребляют термин **суперпозиция** или **сложная функция**.

Отметим, что в композиции $G \circ F$ важен порядок, в котором записываются функции F и G. Композиция $F \circ G$ может даже не существовать.

3.6. Сюръекция, инъекция, биекция

Определение 1.20 *Функция $F : X \to Y$ называется **сюръективной**, если*

$$\forall\, y \in Y \ \ \exists x \in X \ \ F(x) = y.$$

Другими словами, сюръективность означает, что $F(X) = Y$. Часто вместо термина "сюръективное отображение" используется более выразительный "**отображение на** Y".

Определение 1.21 *Функция $F : X \to Y$ называется **инъективной**, если*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in X \ \ F(x_1) = F(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Другими словами, инъективность означает, что

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \ \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2),$$

то есть различные элементы из X имеют различные образы.

Определение 1.22 *Функция называется **биективной (биекцией, взаимно однозначной)**, если она одновременно сюръективна и инъективна.*

Полезна следующая переформулировка свойств сюръективности и инъективности на языке уравнения

$$F(x) = y. \tag{1.3}$$

Сюръективность функции $F : X \to Y$ означает, что уравнение (1.3) имеет решение $x \in X$ для любого $y \in Y$. Инъективность означает, что для любого $y \in Y$ уравнение (1.3) имеет не более одного решения решения $x \in X$.

Упражнение 1.11

1) Для каких α степенная функция $x \mapsto x^{\alpha}$ является сюръективной, инъективной, биективной?

2) Какие из тригонометрических функций являются сюръективными, инъективными, биективными?

3) Является ли показательная функция сюръективной, инъективной, биективной?

4) Доказать, что композиция сюръективных (инъективных, биективных) отображений наследует это свойство.

5) Доказать, что любое отображение является композицией сюръективного и инъективного отображений.

3.7. Обратная функция

Непосредственно из определения биекции следует, что если $F : X \to Y$ — биекция, то отношение
$$F^{-1} = \{(y, x) : F(x) = y\}$$
также является функцией (проверьте это!). Эта функция называется **обратной** для функции $F : X \to Y$.

Обращаем внимание читателя на то, что одно обозначение F^{-1} используется для двух объектов — для полного прообраза $F^{-1}(A)$ множества A при отображении F и для обратного отображения. При этом оба являются общепринятыми среди математиков мира и надо быть внимательным при использовании этого обозначения.

Упражнение 1.12

1) Найти обратные функции к степенным.

2) Являются ли показательная и логарифмическая функции с одним основанием взаимно обратными?

3) Обратными к каким функциям являются обратные тригонометрические функции?

4) Доказать равенства $(F^{-1})^{-1} = F$ и $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$ при условии, что F и G — биекции.

Иногда понятие обратной функции полезно расщепить на две составляющие. Пусть $F : X \to Y$ — некоторая функция.

Определение 1.23 *Отображение $F_l^{-1} : Y \to X$ называется* ***левым обратным*** *для F, если*
$$F_l^{-1} \circ F = \mathrm{Id}_X .$$

Существование левого обратного отображения F_l^{-1} означает, что если для заданного $y \in Y$ (1.3) то оно единственно. В самом деле, пусть x — какое нибудь решение (1.3). Тогда, действуя на него отображением F_l^{-1}, получим $x = F_l^{-1}(y)$ — решение обязано быть таким.

Определение 1.24 *Отображение $F_r^{-1} : Y \to X$ называется* ***правым обратным*** *для F, если*
$$F \circ F_r^{-1} = \mathrm{Id}_Y .$$

Существование правого обратного отображения F_l^{-1} означает, что решение уравнения (1.3) существует для любого $y \in Y$. Действительно, для любого $y \in Y$ положим $x = F_r^{-1}(y)$, тогда $F(F_r^{-1}(y)) = y$ и $x = F_r^{-1}(y)$ является решением уравнения (1.3).

Упражнение 1.13

1) Показать, что отображение $z \mapsto z^2$, $z \in \mathbb{Z}$, не имеет ни левого, ни правого обратного отображения.

2) Привести пример функции, у которой нет левой обратной, но есть правая обратная.

3) Привести пример функции, у которой нет правой обратной, но есть левая обратная.

4) Привести пример функции, у которой есть более одной правой (левой) обратной.

5) Доказать, что если для функции существуют и левая и правая обратные функции, то они совпадают. В этом случае функция является биекцией и $F^{-1} = F_r^{-1} = F_l^{-1}$.

§ 4. Множество действительных чисел

4.1. Аксиоматика множества действительных чисел

Условимся говорить, что на некотором множестве X задана **бинарная операция** R, если задана функция

$$R : X \times X \to X$$

из декартового квадрата X в X. Для "результата" операции R над элементами x и y будем использовать обозначение xRy вместо $R(x, y)$.

Определение 1.25 ***Множеством действительных чисел*** *будем называть любое множество* $\mathbb{R}$*, подчиняющееся следующей системе условий, называемых аксиоматикой действительных чисел:*

аксиомы сложения: *на* $\mathbb{R}$ *определена бинарная операция сложения*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,$$

удовлетворяющая условиям

1) $\exists 0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = x$ *(существование нейтрального элемента для сложения — "нуля"),*

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists -x \in \mathbb{R} \quad x + (-x) = 0$ *(существование противоположного элемента),*

3) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность сложения),*

4) $x + y = y + x$ *(коммутативность сложения;*

аксиомы умножения: *на* $\mathbb{R}$ *определена бинарная операция умножения*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,$$

удовлетворяющая условиям

5) $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 = x$ *(существование нейтрального элемента для умножения — "единицы"),*

6) $\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R} \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{R} \quad x \cdot x^{-1} = 1$ *(существование обратного элемента),*

7) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(ассоциативность умножения),*

8) $x \cdot y = y \cdot x$ *(коммутативность умножения;*

аксиома связи умножения и сложения:

9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *(дистрибутивность);*

аксиомы порядка: *на* $\mathbb{R}$ *определено отношение порядка* $\leqslant$*, удовлетворяющее условиям*

10) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant x,$

11) $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x) \Longrightarrow x = y,$

12) $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \Longrightarrow x \leqslant z$ *(транзитивность порядка),*

13) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leqslant y) \vee (y \leqslant x);$

аксиомы связи порядка и операций умножения и сложения:

14) $x \leqslant y \quad \Rightarrow x + z \leqslant y + z,$

15) $(x \leqslant y) \wedge (z \geqslant 0) \Longrightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z;$

аксиома полноты:

16) для любых не пустых подмножеств $X, Y \subset \mathbb{R}$*, удовлетворяющих условию*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \leqslant y$$

существует такое $c \in \mathbb{R}$*, что*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \leqslant c \leqslant y.$$

Если эта совокупность аксиом выполняется на каком либо множестве, то это множество называется **моделью** (или конкретной реализацией) множества действительных чисел. Приведенная система аксиом является непротиворечивой, т.е. существует множество, удовлетворяющее этой системе аксиом. Существование таких моделей можно доказать, исходя из аксиом теории множеств.

Две модели $\mathbb{R}_1$ и $\mathbb{R}_2$ множества действительных чисел называются **изоморфными**, если существует биекция $f : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_2$ со свойствами

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y), \\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \\ x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y) \end{cases}$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Отображение f в таком случае называется **изоморфизмом моделей**.

Можно доказать, что любые две модели множества действительных чисел являются изоморфными. Поэтому с математической точки зрения любые модели множества действительных чисел являются совершенно равноправными.

Для наглядности мы будем часто привлекать образный геометрический язык, отождествляя действительные числа с точками некоторой прямой (которую называем числовой прямой или координатной осью). Мы не будем останавливаться на подробном исследовании этого отождествления, так как не используем его в доказательствах.

4.2. Важнейшие подмножества

Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ назовем **индуктивным**, если

$$\forall x \in A \quad x + 1 \in A$$

Определение 1.26 *Наименьшее индуктивное множество* $\mathbb{N}$, *содержащее* 1, *называется* ***множеством натуральных чисел.***

В этом определении "наименьшее" понимается по включению множеств. Другими словами, если множество индуктивно и содержит единицу, то оно содержит $\mathbb{N}$. Иначе, $\mathbb{N}$ — пересечение всех индуктивных множеств, содержащих единицу.

Прямым следствием определения множества является **принцип математической индукции**: *если подмножество* $A \subset \mathbb{N}$ *таково, что* $1 \in \mathbb{N}$ *и вместе с любым числом* $x \in A$ *множеству* A *принадлежит также* $x + 1$, *то* $A = \mathbb{N}$.

Определение 1.27 ***Множеством целых чисел*** $\mathbb{Z}$ *называется объединение множества* $\mathbb{N}$, *множества чисел, противоположных натуральным, и множества* $\{0\}$, *то есть*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Определение 1.28 *Множество*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

называется ***множеством рациональных чисел.***

Можно показать, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ удовлетворяет системе аксиом действительных чисел с единственным изменением — аксиому полноты следует заменить на следующую *аксиому Архимеда:*

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > r.$$

Полученной системой аксиом множество $\mathbb{Q}$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма, подобно тому, как это было для множества $\mathbb{R}$.

Для чисел $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, введем так называемые промежутки

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ — **интервал**,

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ — **сегмент** или **отрезок**

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ — полуинтервал (полусегмент), открытый слева,

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ — полуинтервал (полусегмент), открытый справа.

Во всех случаях a называется левым концом промежутка, а b — правым Общее название для таких множеств — **промежутки**, общее обозначение — $\langle a, b\rangle$ (когда неизвестно или не важно, принадлежат ли концы промежутку).

Если нам неизвестно, выполнено ли условие $a < b$ для концов промежутка $\langle a, b\rangle$, то будем записывать его в виде $\langle a, b\rangle^*$ (звездочка расставляет в записи концы промежутка в правильном порядке).

Введем еще бесконечные промежутки

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}.$$

и еще одно обозначение $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

4.3. Границы числовых множеств

Элемент $M \in X$ множества $X \subset \mathbb{R}$ называется **максимальным**, если $\forall x \in X \quad x \leqslant M$. Обозначение для максимального элемента: $M = \max X$. Аналогично элемент $m \in X$ множества $X \subset \mathbb{R}$ называется **минимальным**, если $\forall x \in X \quad x \geqslant m$. Обозначение для минимального элемента: $m = \min X$.

Если множество конечно, то оно имеет минимальный и максимальный элементы. Если же множество бесконечно, то это уже не так, в чем легко убедиться на примере интервала. Нашей целью сейчас является определение подходящих аналогов этих понятий и для бесконечных множеств.

Определение 1.29 *Число $M \in \mathbb{R}$ называется* ***верхней границей (гранью) множества*** *$X \subset \mathbb{R}$, если*

$$\forall x \in X \quad x \leqslant M$$

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ***ограниченным сверху*** *, если оно имеет верхнюю границу.*

Подчеркнем, что в определении верхней границы множества не требуется, чтобы она принадлежала этому множеству.

Легко убедиться, что если $M \in \mathbb{R}$ является верхней границей множества $X \subset \mathbb{R}$, то любое число $M' > M$ также является верхней границей этого множества. Наибольший интерес представляет наименьшая из верхних границ.

Определение 1.30 *Число $M \in \mathbb{R}$ называется* ***точной верхней границей множества*** *$X \subset \mathbb{R}$, если выполнены следующие два условия*

1) $\forall x \in X \quad x \leqslant M$,

2) $\forall M' < M \quad \exists x \in X \quad x > M'$.

В определении точной верхней границы множества не требуется, чтобы она принадлежала этому множеству.

Точная верхняя граница обозначается $\sup X$ и называется еще термином **супремум** (supremum). Первое условие в определении означает, что $\sup X$ является верхней границей для X. Второе же означает, что любое меньшее число верхней границей уже не является. Таким образом, супремум — это наименьшая верхняя граница множества.

Аналогично можно дать определение точной нижней границы.

Определение 1.31 *Число $m \in \mathbb{R}$ называется **нижней границей (гранью) множества** $X \subset \mathbb{R}$, если*

$$\forall x \in X \quad x \geqslant m$$

*Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным снизу** , если оно имеет нижнюю границу.*

*Если множество ограничено и сверху и снизу, то оно называется **ограниченным**.*

Определение 1.32 *Число $m \in \mathbb{R}$ называется **точной нижней границей множества** $X \subset \mathbb{R}$, если выполнены следующие два условия*

1) $\forall x \in X \quad x \geqslant m$,

2) $\forall m' > m \quad \exists x \in X \quad x < m'$.

Точная нижняя граница обозначается $\inf X$ и называется еще термином **инфимум** (infimum). Легко видеть, что $\inf X$ и $\sup X$ определяются однозначно.

Если во множестве $X \subset \mathbb{R}$ есть наибольший (наименьший) элемент, то он и будет совпадать с $\sup X$ $(\inf X)$.

Если множество $X \subset \mathbb{R}$ не является ограниченным сверху (снизу), то условимся записывать это кратко так $\sup X = +\infty$ (соответственно $\inf X = -\infty$).

Теорема 1.1 (Дедекинд) *Если множество $X \subset \mathbb{R}$ не пусто и ограничено сверху (снизу), то оно имеет точную верхнюю (соответственно нижнюю) границу.*

Доказательство. Мы ограничимся доказательством существования $\sup X$. Для этого обозначим через Y множество всех верхних границ для X, при этом множество Y не является пустым, так как X ограничено сверху. Тогда для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено неравенство $x \leqslant y$.

В силу аксиомы полноты существует число M такое, что при всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполнены неравенства $x \leqslant M \leqslant y$. Так как $x \leqslant M$ для всех $x \in X$, то M верхняя граница для X и $M \in Y$, а так как $M \leqslant y$ для всех $y \in Y$, то M наименьший элемент в Y, т.е. $M = \sup X$. □

4.4. Принцип Архимеда и его следствия

Рассмотрим свойства натуральных и целых чисел, связанные с аксиомой полноты. Основной результат здесь — принцип Архимеда, важный при измерениях и вычислениях. Он будет также использована нами при построении позиционной системы счисления в следующем пункте.

Лемма 1.1 *Пусть множество $A \subset \mathbb{Z}$ не пусто и ограничено сверху (снизу). Тогда в A есть максимальный (минимальный) элемент*

Доказательство. Пусть A ограничено сверху и не пусто. По теореме 1.1 Дедекинда существует $M = \sup A$. По определению 1.30 существует такой элемент $n \in A$, что $M - 1 < n \leqslant M$. Отсюда следует, что $n + 1 \notin A$, все большие целые числа также не входят A в и $n = \max A$. □

Лемма 1.2 (принцип Архимеда) *Пусть $x > 0$. Тогда для любого $h > 0$ существует единственное $n \in \mathbb{Z}$ со свойством*

$$nh \leqslant x < (n+1)h.$$

Доказательство. Множество $\left\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant \dfrac{x}{h}\right\}$ ограничено сверху и по лемме 1.1 имеет максимальный элемент $n \in \mathbb{Z}$. Число n является искомым, так как $x < (n+1)h$. □

В качестве первого приложения этого принципа мы докажем свойство плотности множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ во множестве $\mathbb{R}$. Так часто называют свойство множества рациональных чисел, формулируемое в следующей лемме.

Лемма 1.3 *Для любых действительных чисел $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, существует рациональное число $r \in \mathbb{Q}$, для которого $a < r < b$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что существует число $n \in \mathbb{N}$ со свойством $\frac{1}{n} < b - a$. В самом деле, по принципу Архимеда для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $1 < n(b-a)$.

Взяв такое n и снова используя принцип Архимеда, найдем $m \in \mathbb{Z}$ так, чтобы $\frac{m-1}{n} \leqslant a < \frac{m}{n}$. Тогда выполнено неравенство $\frac{m}{n} < b$, так как иначе было бы

$$\frac{m-1}{n} \leqslant a < b \leqslant \frac{m}{n}$$

и $\frac{1}{n} > b - a$. Итак, $r = \frac{m}{n}$ удовлетворяет нужным требованиям. □

Часто используется следующая более выразительная геометрическая форма леммы 1.3

Лемма 1.4 *Для любых действительных чисел $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ пересечение $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ не пусто.*

Другими словами, любой интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ $(a < b)$ содержит рациональное число.

Отметим также, что из принципа Архимеда вытекает следующее утверждение: для любого $x \in \mathbb{R}$ существует единственное $n \in \mathbb{Z}$ со свойством

$$n \leqslant x < n + 1.$$

Это число n (наибольшее целое число, меньшее либо равное x) называется **целой частью** числа x и обозначается $[x]$. Разность $\{x\} = x - [x]$ называется **дробной частью** числа x. Таким образом, любое число $x \in \mathbb{R}$ являестя суммой своих целой и дробной частей

$$x = [x] + \{x\}.$$

4.5. Позиционная система счисления

Сейчас мы рассмотрим метод, позволяющий для каждого действительного числа строить последовательность его рациональных приближений и q-ичную запись числа. Для этого зафиксируем число $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, которое будем называть **основанием системы счисления**.

Опишем теперь процесс, позволяющий по числу $x > 0$ определить его q-ичные цифры. При этом q-ичной цифрой мы понимаем элемент множества

$$\mathbb{N}_q = \{0, 1, \ldots q - 1\} \tag{1.4}$$

Итак, пусть, задано основание $1 < q \in \mathbb{N}$ системы счисления и $x > 0$.

Лемма 1.5 *Множество* $\{q^k : k \in \mathbb{Z}\}$ *не ограничено сверху.*

Доказательство. Предположим противное, тогда если M — точная верхняя граница нашего множества (она существует тогда по теореме 1.1), то найдется $k \in \mathbb{Z}$, для которого $M/q < q^k$ и $q^{k+1} > M$ — противоречие. □

Лемма 1.6 *Для любого числа* $x \in \mathbb{R}_+$ *существует единственное* $p \in \mathbb{Z}$, *для которого*

$$q^p \leqslant x < q^{p+1}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Сначала докажем, что множество $A_x = \{k \in \mathbb{Z} : q^k \leqslant x\}$ не пусто. В самом деле, по лемме 1.5 множество $\{q^k : k \in \mathbb{Z}\}$ не ограничено сверху, поэтому найдется $k \in \mathbb{Z}$, для которого $\dfrac{1}{x} < q^k$ или $q^{-k} < x$. Следовательно, $q^{-k} \in A_x$ и $A_x \neq \varnothing$.

Далее, отметим очевидное неравенство $k \leqslant 2^k$, где $k \in \mathbb{N}$ (его легко доказать по индукции или вывести из формулы для бинома Ньютона). Из этого неравенства следует, что множество A_x ограничено сверху. В самом деле, если $k \in A_x$, то либо $k \leqslant 0$, либо $k \in \mathbb{N}$ и тогда $k \leqslant 2^k \leqslant q^k \leqslant x$.

Теперь ко множеству A_x можно применить лемму 1.1, согласно которой в A_x существует максимальный элемент $p \in \mathbb{Z}$. Тогда $q^p \leqslant x$ (так как $p \in A_x$) и $x < q^{p+1}$ (так как $p+1 \notin A_x$). $\square$

Число p, определенное в лемме 1.6, называется **порядком** числа x по основанию q.

По лемме 1.6 определим порядок p числа x так, чтобы выполнялись неравенства (1.5). Теперь, используя лемму 1.2 с $h = q^p$ определим $\alpha_p \in \mathbb{N}_q$ так, чтобы

$$\alpha_p q^p \leqslant x < \alpha_p q^p + q^p.$$

(то, что на самом деле $\alpha_p < q$, вытекает из неравенств (1.5)).

Если слева в последних неравенствах — знак равенства, то полагаем

$$\alpha_{p-1} = \alpha_{p-2} = \cdots = 0.$$

В противном случае снова применяем лемму 1.2 к числу $x - \alpha_p q^p > 0$ с $h = q^{p-1}$, определяя $\alpha_{p-1} \in \mathbb{N}_q$ так, чтобы

$$\alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} \leqslant x < \alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + q^{p-1}.$$

Продолжая этот процесс по индукции, мы построим последовательность

$$\alpha_p, \alpha_{p-1}, \ldots$$

q-ичных цифр $\alpha_k \in \mathbb{N}_q$ $(k = p, p-1 \ldots)$ числа x. При этом последовательность рациональных чисел

$$r_n = \sum_{k=p-n}^{p} \alpha_k q^k, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.6}$$

удовлетворяет условиям

$$r_n \leqslant x < r_n + q^{p-n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.7}$$

причем, если при некотором $n \in \mathbb{N}$ в (1.7) слева имеет место знак равенства, то $\alpha_k = 0$ при $k \leqslant n - 1$.

При описанном алгоритме не может оказаться так, что все α_k, начиная с некоторого равны $q - 1$. Допустим, что это не так и существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $k < p - n_0$ будет $\alpha_k = q - 1$. Тогда при $n \geqslant n_0$

$$r_n = \sum_{k=p-n_0}^{p} \alpha_k q^k + \sum_{k=p-n}^{p-n_0-1} (q-1) q^k = r_{n_0} + q^{p-n_0} - q^{p-n}$$

Подставим это выражение в (1.7) и получим

$$r_{n_0} + q^{p-n_0} - q^{p-n} \leqslant x < r_{n_0} + q^{p-n_0}$$

или
$$0 < r_{n_0} + q^{p-n_0} - x < q^{p-n}, \quad q^n \leqslant \frac{q^p}{r_{n_0} + q^{p-n_0} - x}$$
при всех $n \geqslant n_0$. Это невозможно, так как множество $\{q^k : k \in \mathbb{Z}\}$ не ограничено сверху (см. лемму 1.5).

Для того, чтобы символ
$$\alpha_p\alpha_{p-1}\alpha_{p-2}\ldots \quad (\alpha_k \in \mathbb{N}_q, \quad \alpha_p > 0)\,, \tag{1.8}$$
однозначно определял последовательность r_n, необходимо отметить в нем величину p — порядок числа x. Условимся о следующем соглашении: *если $p \geqslant 0$, то после α_0 ставим точку (или запятую), если же $p < 0$, то слева от α_p дописываем $|p|$ нулей и после крайнего левого ставим точку (или запятую).*

Обозначим теперь через P_q множество всех последовательностей (1.8), причем α_k не могут быть равными $q-1$, начиная с некоторого номера (учитывая также соглашение о точке-запятой). Таким образом, указанный нами алгоритм задает отображение
$$F : \mathbb{R}_+ \to P_q. \tag{1.9}$$

Покажем, что это отображение является инъективным и сюръективным и, следовательно, взаимно однозначным.

Пусть $x \neq x'$ — два положительных числа (можно считать, что $x > x'$), и пусть r'_n и α'_n — последовательности, соответствующие числу x'. Надо показать, что α_k и α'_k — различные элементы P_q. Можно считать, что x и x' имеют одинаковый порядок. Тогда из неравенств (1.7), записанных для этих чисел, и из $x > x'$ вытекает, что $0 < x - x' < r_n - r'_n + q^{p-n}$. Выберем теперь $n \in \mathbb{N}$ так, что $q^{p-n} < \dfrac{x-x'}{2}$ (это возможно по лемме 1.5). Тогда получим, что $r_n - r'_n > 0$ для выбранного n. Таким образом, α_k и α'_k отличаются по крайней мере одним элементом. Инъективность отображения (1.9) доказана.

Докажем сюръективность отображения (1.9). Пусть последовательность (1.8) — элемент P_q и $p \in \mathbb{Z}$ — ее порядок. Определим по формулам (1.6) последовательность $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда, очевидно,
$$r_n \leqslant r_{n+1} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Кроме того,
$$r_n + q^{p-n} \geqslant r_{n+1} + q^{p-n-1} \quad (n = 0, 1, \ldots),$$
причем, если $\alpha_{p-n-1} < q-1$, то имеет место строгое неравенство. В самом деле,
$$r_{n+1} + q^{p-n-1} = r_n + \alpha_{p-n-1}q^{p-n-1} + q^{p-n-1} \leqslant r_n + (q-1)q^{p-n-1} + q^{p-n-1} = r_n + q^{p-n}$$
и знак неравенства строгий, если $\alpha_{p-n-1} < q-1$.

Из неравенств для последовательностей $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{r_n + q^{p-n}\}_{n=0}^{\infty}$ вытекает (покажите это!), что
$$r_n \leqslant r_m + q^{p-m} \quad (n, m = 0, 1, \ldots).$$

Поэтому ко множествам $X = \{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $Y = \{r_n + q^{p-n}\}_{n=0}^{\infty}$ можно применить аксиому полноты: существует число $x \in \mathbb{R}$ для которого выполнены неравенства

$$r_n \leqslant x \leqslant r_n + q^{p-n} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

На самом деле, знак равенства справа невозможен, так как $\alpha_{p-n-1} < q - 1$ для бесконечно многих $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, имеют место неравенства (1.7) и число x является прообразом элемента (1.8) при отображении (1.9). Сюръективность отображения доказана (1.9).

Итак, каждому положительному числу $x > 0$ мы взаимно однозначно поставили в соответствие символ вида $\alpha_p \dots \alpha_0, \dots$, если $p \geqslant 0$ и $0, 0 \dots 0\alpha_p \dots$ ($|p|$ нулей), если $p < 0$. Он называется q-ичной позиционной записью числа x. Числу $x < 0$ условимся сопоставлять в качестве q-ичной позиционной записи взятый со знаком минус символ числа $-x$. А символом числа 0 будем считать символ $0, 0 \dots$.

Таким образом мы построили позиционную q-ичную систему записи действительных чисел. Исторически наиболее популярным является основание 10. В информатике наиболее употребительной является двоичная система счисления, но используются также восьмеричная и шестнадцатеричная.

§ 5. Понятие о мощности множества

5.1. Равномощные множества

Следующее важное понятие лежит в основе обобщения наших представлений о количестве элементов множества.

Определение 1.33 *Два непустых множества X и Y называются* ***равномощными****, если существует биекция X на Y.*

Пустое множество равномощно самому себе и не равномощно никакому другому множеству.

Другими словами, равномощность множеств можно трактовать как тот факт, что и имеют одинаковое число элементов.

Будем говорить, что множество X имеет $n \in \mathbb{N}$ элементов, если оно равномощно множеству $\{1, 2 \dots, n\}$. Кроме того, говорят, что множество **конечно**, если при некотором $n \in \mathbb{N}$ оно равномощно множеству $\{1, 2 \dots, n\}$.

Мощностью множества или его **кардинальным числом** называется класс множеств, равномощных этому множеству. Для мощности множества будем использовать обозначение $\operatorname{card} X$.

Запись $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$ будет означать, что X равномощно некоторому подмножеству множества Y. Если при этом еще X и Y не являются равномощными, то будем писать, что $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$.

Смысл этой конструкции состоит в том, что она позволяет сравнивать "количества" элементов во множествах, не прибегая к "пересчету" их элементов. Кроме того, понятие мощности обобщает понятие количества элементов в конечном множестве.

5.2. Важнейшие подмножества в $\mathbb{R}$ и их мощности

Для мощностей некоторых часто встречающихся множеств имеются специальные названия:

класс, содержащий пустое множество $\varnothing$, не содержит других множеств; эта мощность называется нулевой или нулем,

— пусть $n \in \mathbb{N}$, все множества, состоящие ровно из n элементов, попадают в одну мощность — она так и называется n и совпадает с привычным понятием числа элементов в конечном множестве,

класс, содержащий $\mathbb{N}$, называется счетностью; другими словами, множество называется **счетным**, если оно равномощно $\mathbb{N}$,

— класс, содержащий $\mathbb{R}$, называется **мощностью континуума**.

Упражнение 1.14 Доказать, что следующие множества равномощны

1) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$,

2) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$,

3) $[0, 1]$ и $[a, b]$ (для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$),

4) $(0, 1)$ и $[0, 1]$,

5) $(0, 1)$ и $\mathbb{R}$.

Теорема 1.2 (Кантор) $\operatorname{card}\mathbb{N} < \operatorname{card}\mathbb{R}$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью важного и часто используемого приема, носящего название "**диагональный процесс Кантора**".

Докажем, что интервал $(0, 1)$ не является счетным. Предположим противное, то есть существует взаимно однозначное соответствие $F : \mathbb{N} \to (0, 1)$ между $\mathbb{N}$ и $(0, 1)$. Пусть $F(n) = x_n$. Рассмотрим "троичную" позиционную запись каждого из чисел x_n:

$$0, \alpha_1^n \alpha_2^n \dots \alpha_k^n \dots .$$

Построим теперь новую позиционную запись

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots ,$$

где $\alpha_k \neq \alpha_k^k$ и $\alpha_k \neq 2$. Эта троичная запись соответствует некоторому числу $x \in (0, 1)$ в ней все цифры отличны от 2 и по порядку видно, что $x < 1$. С другой стороны, это число отлично от любого из x_n. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Глава 2

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛА

§ 1. Предел последовательности

1.1. Абсолютная величина числа и окрестности

Определение 2.1 ***Модулем*** *или* ***абсолютной величиной*** *числа* $x \in \mathbb{R}$ *называется*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0 \\ -x, & \text{если} \quad x < 0 \end{cases} . \tag{2.1}$$

Легко показать, что определение модуля можно дать и в одну строчку

$$|x| = \max\{x, -x\} . \tag{2.2}$$

Теорема 2.1 (свойства модуля)
1) $|x| \geqslant 0$,
2) $|x| = 0 \iff x = 0$,
3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$,
4) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

Доказательство. Первое и второе свойства очевидны. Для доказательства третьего сначала запишем два неравенства $x \leqslant |x|$ и $y \leqslant |y|$, вытекающие из (2.2), и сложим их: $x+y \leqslant |x|+|y|$. Точно так же из неравенств $-x \leqslant |x|$ и $-y \leqslant |y|$ следует, что $-(x + y) \leqslant |x| + |y|$. Таким образом, $\max\{x + y, -(x + y)\} \leqslant |x| + |y|$ и, снова используя (2.2), получим требуемое.

Для доказательства 4) из уже доказанного свойства 3) выводим неравенство $|x| \leqslant |y| + |x - y|$ или $|x| - |y| \leqslant |x - y|$. Меняя в нем ролями x и y, получим $|y| - |x| \leqslant |x - y|$. Следовательно,

$$||x| - |y|| = \max\{|x| - |y| , -(|x| - |y|)\} \leqslant |x - y|$$

и теорема доказана. □

Отметим, что равенство в утверждении 3) теоремы 2.1 имеет место тогда и только тогда, когда x и y имеют одинаковые знаки.

Окрестностью U_a числа $a \in \mathbb{R}$ назовем любой интервал $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, содержащий это число. Интервал

$$U_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

будем называть **ε-окрестностью** числа a.

1.2. Предел последовательности

Пусть X — произвольное множество. **Последовательностью** (со значениями в X) будем называть любую функцию $a : \mathbb{N} \to X$. Значения $a(n)$ этой функции называются **элементами последовательности** . Чаще элементы последовательности обозначают a_n, а саму последовательность $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. В принципе не важно, что нумерация элементов последовательности начинается с единицы. Она может начинаться с любого целого числа.

Мы будем рассматривать последовательности со значениями во множестве действительных чисел.

Определение 2.2 (предел последовательности) *Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon \tag{2.3}$$

Для краткой записи этого используем обозначения

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{\textit{или}} \quad a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Индекс ε у N_ε подчеркивает зависимость N_ε от ε — для разных ε этот номер будет различным.

На языке окрестностей определение 2.2 можно переформулировать так: в любой ε-окрестности предела находятся все элементы последовательности, начиная с некоторого.

Другая формулировка (без ε!): в любой окрестности предела находятся все элементы последовательности, начиная с некоторого.

Если последовательность имеет предел, то она называется **сходящейся**, в противном случае последовательность называется **расходящейся**.

Полезно отметить также, что свойство последовательности сходиться (расходиться) является асимптотическим — оно не зависит от любого числа первых элементов последовательности.

Пример 2.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Для доказательства зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и обозначим $n_\varepsilon = [1/\varepsilon] + 1$. Тогда $1/n_\varepsilon < \varepsilon$ и для любого $n \geqslant n_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Пример 2.2 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $|q| < 1$.

Обозначим $\delta = 1/|q| - 1 > 0$ и воспользуемся формулой бинома Ньютона

$$|q^n - 0| = \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}^n\right)} = \frac{1}{(1+\delta)^n} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \delta^k} < \frac{1}{n\delta} < \varepsilon$$

при всех $n \geqslant n_\varepsilon$, если $n_\varepsilon = [1/(\delta\varepsilon)] + 1$.

Пример 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$, $|q| < 1$.

Здесь рассуждаем аналогично примеру 2.2 только используем оценку

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \delta^k > \frac{n(n-1)}{\delta^2}.$$

Пример 2.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Неравенство $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ равносильно неравенству $n < (1+\varepsilon)^n$. Последнее же выполнено, начиная с некоторого номера в силу примера 2.3.

1.3. Общие свойства предела

Последовательность называется **ограниченной (сверху, снизу)**, если множество ее элементов ограничено (сверху, снизу).

Другими словами, последовательность $\{a_n\}$ ограничена, если существуют такие числа $m, M \in \mathbb{R}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$m \leqslant a_n \leqslant M.$$

Легко убедиться в том, что это равносильно существованию числа $M > 0$, для которого при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$|a_n| \leqslant M.$$

Мы часто будем использовать именно такую форму ограниченности последовательности.

Теорема 2.2

1) Последовательность может иметь только один предел.

2) Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. 1) Пусть $a' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $a'' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, но $a' \neq a''$. Положим $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|a' - a''| > 0$ и для него найдем номера N'_ε и N''_ε так, чтобы $|a_n - a'| < \varepsilon$ при $n \geqslant N'_\varepsilon$ и $|a_n - a''| < \varepsilon$ при $n \geqslant N''_\varepsilon$. Обозначим $n = \max\{N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$, тогда

$$|a_n - a'| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |a_n - a''| < \varepsilon$$

отсюда

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|a' - a''| \leqslant \frac{1}{2}(|a_n - a'| + |a_n - a''|) < \varepsilon$$

— противоречие.

2) Для $\varepsilon = 1$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < 1$ при всех $n \geqslant N$. Тогда

$$|a_n| \leqslant 1 + |a| \quad \text{при} \quad n \geqslant N.$$

Если обозначить $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$, то $|a_n| \leqslant M$ при всех $n \in \mathbb{N}$. $\square$

1.4. Предел и арифметические операции

Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две числовые последовательности, то их суммой произведением и частным называются соответственно последовательности $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ и $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ (в последнем случае должно быть $b_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$).

Теорема 2.3 *Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — сходящиеся последовательности, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, тогда*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$,

3) если $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ и $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Доказательство. 1) Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номера N'_ε и N''_ε и так, чтобы

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant N'_\varepsilon.$$

и

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant N''_\varepsilon.$$

и обозначим $N_\varepsilon = \max\{N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$, тогда

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant N_\varepsilon.$$

Поэтому для $n \geqslant N_\varepsilon$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) В силу утверждения 2) теоремы 2.2 последовательность $\{a_n\}$ ограничена и существует число $A > 0$ такое, что $|a_n| \leqslant A$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номера N'_ε и N''_ε и так, чтобы

$$|a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} \quad \text{при} \quad n \geqslant N'_\varepsilon.$$

и

$$|b_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2A} \quad \text{при} \quad n \geqslant N''_\varepsilon.$$

и обозначим $N_\varepsilon = \max\{N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$, тогда последние два неравенства выполнены одновременно при всех $n \geqslant N_\varepsilon$. Поэтому для таких n

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)| \leqslant |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leqslant$$

$$\leqslant A\frac{\varepsilon}{2A} + |b|\frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} < \varepsilon.$$

3) Найдется такой номер $N_0 \in \mathbb{N}$, что
$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant N_0,$$
откуда
$$|b_n| \geqslant \frac{|b|}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant N_0.$$

Зададим теперь $\varepsilon > 0$ и найдем номера N'_ε и N''_ε и так, чтобы
$$|a_n - a| \leqslant \frac{|b|\,\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad n \geqslant N'_\varepsilon.$$
и
$$|b_n - b| \leqslant \frac{|b|^2\,\varepsilon}{4|a|} \quad \text{при} \quad n \geqslant N''_\varepsilon.$$
и обозначим $N_\varepsilon = \max\{N_0, N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$. Тогда при всех $n \geqslant N_\varepsilon$
$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|a_n b - a b_n|}{|b||b_n|} = \frac{|(a_n b - ab) + (ab - a b_n)|}{|b||b_n|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a||b_n - b|}{|b||b_n|} \leqslant \frac{2|a_n - a|}{|b|} + \frac{2|a||b_n - b|}{|b|^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это рассуждение проходит, если $a \neq 0$. Если же $a = 0$, доказательство только упрощается.

1.5. Предельный переход в неравенствах

Теорема 2.4 *Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — сходящиеся последовательности, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

1) Если $a < b$, то начиная с некоторого номера выполнены неравенства $a_n < b_n$, то есть
$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad a_n < b_n.$$

2) Если начиная с некоторого номера выполнены неравенства $a_n \leqslant b_n$, то $a \leqslant b$.

Доказательство. 1) Возьмем $\varepsilon = \dfrac{b - a}{2}$, тогда можно указать номер $N \in \mathbb{N}$ так, что $|a_n - a| < \varepsilon$ и $|b_n - b| < \varepsilon$ при $n \geqslant N$. В частности, для $n \geqslant N$
$$a_n - a < \varepsilon \quad \text{и} \quad -\varepsilon < b_n - b,$$
поэтому $a_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon < b_n$.

2) Предположив противное, мы сразу приходим к противоречию с утверждением 1). $\square$

Отметим, что из неравенств $a_n < b_n$ не следует, вообще говоря, что $a < b$. Для примера достаточно рассмотреть последовательности $a_n = \dfrac{1}{n}$ и $b_n = 0$.

В частности, из теоремы 2.4 вытекает, что если $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $a_n \geqslant 0$, то $a \geqslant 0$ и если $a > 0$, то $a_n > 0$, начиная с некоторого номера.

Теорема 2.5 (о двух милиционерах) *Пусть заданы последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{x_n\}$, причем первые две из них сходятся и*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a,$$

и начиная с некоторого номера выполнены неравенства

$$a_n \leqslant x_n \leqslant b_n.$$

Тогда $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказательство. Зададим теперь и найдем номера N'_ε и N''_ε и так, чтобы

$$|a_n - a| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N'_\varepsilon.$$

и

$$|b_n - b| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N''_\varepsilon.$$

и обозначим $N_\varepsilon = \max\{N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$. Тогда при всех $n \geqslant N_\varepsilon$

$$a_n > a - \varepsilon, \quad b_n < a + \varepsilon$$

откуда

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant x_n \leqslant b_n < a + \varepsilon,$$

то есть $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n \geqslant N_\varepsilon$. □

1.6. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 2.3 *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,$$

*то последовательность $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно малой** (кратко "б.м.").*

Теорема 2.6 (свойства б.м. последовательностей)

1) Б.м. последовательность ограничена.

2) Сумма б.м. последовательностей — б.м. последовательность.

3) Произведение б.м. последовательности на ограниченную последовательность — б.м. последовательность.

Определение 2.4 *Если*

$$\forall E > 0 \quad \exists N_E \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_E \quad |\alpha_n| > E,$$

*то последовательность $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно большой**. В этом случае будем писать*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty.$$

Подчеркнем, что в этом случае предел не существует. Мы лишь договариваемся записывать так факт специальной расходимости последовательности.

Если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно большая последовательность, положительная (отрицательная), начиная с некоторого номера, то будем писать

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty \quad \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n = -\infty\right).$$

1.7. Символы Харди и Ландау

Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — две положительные числовые последовательности.

Запись $\alpha_n = O(\beta_n)$ (читается α_n есть о-большое от β_n) означает, что $\left\{\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ ограниченная последовательность, то есть

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| \leqslant M.$$

Запись $\alpha_n = o(\beta_n)$ (читается α_n есть о-малое от β_n) означает, что $\left\{\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ — б.м. последовательность, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0.$$

Запись $\alpha_n \asymp \beta_n$ (α_n и β_n слабо эквивалентны) означает, что одновременно

$$\alpha_n = O(\beta_n) \quad \text{и} \quad \beta_n = O(\alpha_n)\,.$$

Запись $\alpha_n \sim \beta_n$ (α_n и β_n эквивалентны) означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1.$$

Такие обозначения обычно применяют к паре бесконечно малых или бесконечно больших последовательностей, для того, чтобы сравнить их поведение.

1.8. Важнейшие последовательности и их сравнение

Мы рассмотрим здесь наиболее часто встречающиеся бесконечно большие последовательности и выясним, какие из них растут быстрее, а какие медленнее. При этом результаты будут сформулированы в терминах предыдущего раздела.

Сначала мы перечислим эти последовательности, располагая их в порядке возрастания скорости роста

$$(\log_a n)^\alpha, \quad n^\beta, \quad a^n, \quad n!, \quad n^n.$$

Здесь α и β — любые положительные числа, $a > 1$.

Докажем теперь следующие соотношения

$$(\log_a n)^\alpha = o\big(n^\beta\big) \quad \text{при любых} \quad \alpha, \beta > 0, \tag{2.4}$$

$$n^\beta = o(a^n) \quad \text{при любых} \quad \alpha > 0,\ a > 1, \tag{2.5}$$

$$a^n = o(n!) \quad \text{при любом} \quad a > 1, \tag{2.6}$$

$$n! = o(n^n)\,. \tag{2.7}$$

Докажем (2.4) — после несложных преобразований получаем

$$\frac{(\log_a n)^\alpha}{n^\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\log_a a_n}{a_n}\right)^\alpha, \quad \text{где} \quad a_n = n^{\beta/\alpha}.$$

Итак, надо доказывать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a a_n}{a_n} = 0$. Для этого зададим произвольно $\varepsilon > 0$, тогда неравенство $\frac{\log_a a_n}{a_n} < \varepsilon$ равносильно такому $a_n < (a^\varepsilon)^{a_n}$. Но

$$\frac{a_n}{(a^\varepsilon)^{a_n}} \leqslant 2\frac{[a_n]}{(a^\varepsilon)^{[a_n]}} < 1,$$

причем последнее неравенство выполнено для всех достаточно больших n в силу примера 2.3, так как $a^\varepsilon > 1$.

Доказательство (2.5) вытекает из примера 2.3 и равенства

$$\frac{n^\beta}{a^n} = \left(\frac{n}{(a^{1/\beta})^n}\right)^\beta.$$

Для доказательства (2.6) возьмем натуральное число $m > a$. Тогда

$$\frac{a^n}{n!} \leqslant \frac{a^n}{m^{n-m}} = m^m\Big(\frac{a}{m}\Big)^n$$

и можно воспользоваться результатом примера 2.2.

Наконец, для доказательства (2.7) запишем неравенства

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$$

и используем теорему 2.5.

§ 2. Различные формы полноты

В этом параграфе мы придадим ряд различных форм аксиоме полноты $\mathbb{R}$, любая из которых может быть положена в основу построения теории действительных чисел вместо нее. Каждое из утверждений, доказанных ниже, является полноправной заменой аксиомы полноты (или близка к этому) в системе аксиом, описанной выше.

2.1. Стягивающеся сегменты

Пусть $\{I_n\}$ последовательность сегментов, $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Она называется **последовательностью вложенных сегментов**, если

$$I_{n+1} \subset I_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность вложенных сегментов называется **стягивающейся**, если

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) \quad 0,.$$

Лемма 2.1 (Кантора о вложенных сегментах) *Если $\{I_n\}$ — последовательность вложенных сегментов, то существует число, принадлежащее всем сегментам, то есть*

$$\bigcap_{n-1}^{\infty} I_n \;/\; \varnothing.$$

Если $\{I_n\}$ последовательность стягивающихся сегментов, то эта точка единственна.

Доказательство. Условие вложенности сегментов означает означает возрастание последовательности $\{a_n\}$ и убывание последовательности $\{b_n\}$, то есть

$$a_n \leqslant a_{n+1}, \; b_{n+1} \leqslant b_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Отсюда вытекает, что

$$a_n \leqslant b_m \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

В самом деле, если предположить, что $a_n > b_m$ при некоторых n и m, тогда $a_n > b_m \geqslant b_n$ при $n > m$ и $a_m \geqslant a_n > b_m$ при $n < m$, что невозможно.

Это показывает, что множества $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют условиям аксиомы полноты, поэтому существует число $c \in \mathbb{R}$, для которого

$$a_n \leqslant c \leqslant b_m \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

В частности, $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

В случае стягивающихся сегментов $0 \leqslant b_n - c \leqslant b_n - a_n \to 0$. По теореме о двух милиционерах $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \quad c$, следовательно, такое число c единственно. □

2.2. Покрытия

Пусть $S = \{X\}$ некоторая система множеств. Будем говорить, что S покрывает множество Y, если

$$Y \subset \bigcup_{X\in S} X.$$

Другими словами это означает, что каждая точка множества Y принадлежит по крайней мере одному из множеств системы S. В этом случае S также называется покрытием множества Y.

Лемма 2.2 (Бореля-Лебега) *Из любой системы интервалов, покрывающей сегмент, можно выделить конечную подсистему интервалов, покрывающую этот сегмент.*

Доказательство. Пусть S — система интервалов, покрывающая сегмент $I_0 = [a, b]$. Допустим, что I_0 не покрывается конечным числом интервалов из S. Тогда одна из его половин $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ или $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ также не покрывается конечным числом интервалов из S. Обозначим эту половину $I_1 = [a_1, b_1]$. Одна из половин I_1 также не покрывается конечным числом интервалов из S — пусть это $I_2 = [a_2, b_2]$. Продолжая процесс по индукции, мы получим последовательность сегментов $\{I_n = [a_n, b_n]\}$ со свойствами

1) $\{I_n\}$ — последовательность вложенных сегментов,

2) $b_n - a_n = 2^{-n}$,

3) I_n не покрывается конечным числом множеств из S.

По лемме Кантора существует точка c, принадлежащая всем I_n. Так как $c \in I$, то найдется интервал (α, β), содержащий точку c. Обозначим $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\} > 0$, тогда $b_n - a_n < \varepsilon$ для достаточно больших n. Отсюда $I_n \subset (\alpha, \beta)$ и I_n покрывается одним (!) интервалом из S — противоречие. □

Отметим, что из покрытия интервала интервалами конечное подпокрытие можно выделить не всегда. В самом деле,

$$(0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$$

и никакое конечное число интервалов из левого объединения не покрывает $(0, 1)$.

2.3. Предельные точки

Определение 2.5 *Число $x \in \mathbb{R}$ называется **предельной точкой** множества $X \subset \mathbb{R}$, если в любой окрестности x находится бесконечно много элементов множества X.*

Упражнение 2.1 Доказать, что определение предельной точки множества равносильно каждому из следующих утверждений

1) в любой окрестности x есть по крайней мере один элемент из X, отличный от x,

2) существует последовательность $\{x_n\}$ попарно различных точек множества X, сходящаяся к x.

Лемма 2.3 (Больцано-Вейерштрасса) *Бесконечное ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Доказательство. Так как ограничено X, то существует сегмент $[a, b]$, содержащий это множество: $X \subset [a, b]$.

Предположим, что предельных точек X не имеет. В частности, каждая точка $x \in [a, b]$ не является предельной для X. Следовательно, для любого $x \in [a, b]$ существует окрестность U_x этой точки, в которой лишь конечное число точек из X.

Семейство интервалов $\{U_x : x \in [a, b]\}$ покрывает $[a, b]$. По лемме Гейне-Бореля существует конечное подпокрытие $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}$, отрезка $[a, b]$. В частности, эти интервалы покрывают X. В то же время в каждом интервале U_{x_k} $(k = 1, \ldots, n)$ лишь конечное число элементов из X, а множество X бесконечно. □

2.4. Критерий Коши

Использование определение предела последовательности для проверки сходимости этой последовательности не всегда удобно. Если мы хотим доказать с его помощью сходимость, то нам необходимо заранее знать чему равен предполагаемый предел. Если же мы хотим доказать расходимость, то нам надо доказывать, что любое число не является пределом. Поэтому возникает необходимость в отыскании "внутренних условий", позволяющих судить о сходимости — основываясь только на информации о поведении элементов последовательности.

Определение 2.6 *Числовая последовательность* $\{a_n\}$ *называется* ***фундаментальной*** *(последовательностью Коши, сходящейся в себе), если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \geqslant N_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Условие фундаментальности можно переписать в эквивалентном виде

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Очевидно, что сходящаяся последовательность является фундаментальной. В самом деле, по $\varepsilon > 0$ находим $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так чтобы $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant N_\varepsilon$. Тогда при $n, m \geqslant N_\varepsilon$

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Гораздо важнее то, что справедливо обратное утверждение.

Теорема 2.7 (критерий Коши) *Для любой последовательности* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *следующие условия эквивалентны*

i) $\{a_n\}$ *сходится,*

ii) $\{a_n\}$ *фундаментальна.*

Доказательство. То, что из i) следует ii) отмечалось только что. Докажем обратное.

Сначала покажем, что фундаментальная последовательность ограничена. Для $\varepsilon > 0$ найдем $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad n, m \geqslant N_\varepsilon.$$

или

$$a_{N_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a_{N_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant N_\varepsilon.$$

(отсюда при $\varepsilon = 1$ легко следует ограниченность $\{a_n\}$ — см. доказательство части 2) теоремы 2.2).

Далее введем две последовательности

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k : k \geqslant n\}, \quad \overline{a}_n = \sup\{a_k : k \geqslant n\}.$$

Тогда $\{[\underline{a}_n, \overline{a}_n]\}$ — последовательность вложенных сегментов, причем

$$\underline{a}_n \leqslant a_m \leqslant \overline{a}_n \quad \text{при} \quad m \geqslant n.$$

По лемме Кантора существует точка $a \in \mathbb{R}$, общая для всех сегментов, то есть

$$\underline{a}_n \leqslant a \leqslant \overline{a}_n \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Итак, при $n \geqslant N_\varepsilon$ выполнены неравенства

$$|a_n - a| \leqslant \overline{a}_n - \underline{a}_n \leqslant \overline{a}_{N_\varepsilon} - \underline{a}_{N_\varepsilon} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N_\varepsilon. \square$$

Пример 2.5 Рассмотрим последовательность

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{2.9}$$

и покажем с помощью критерия Коши, что она расходится.

В самом деле,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists m \geqslant n \geqslant N \quad |H_m - H_n| \geqslant \varepsilon$$

(можно взять $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $m = 2N$, $n = N$). Мы получили отрицание условия фундаментальности последовательности. В силу критерия Коши последовательность $\{H_n\}$ расходится.

§ 3. Монотонные последовательности

3.1. Предел монотонной последовательности

Определение 2.7 *Последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ называется* ***возрастающей (убывающей)****, если*

$$a_n \leqslant a_{n+1} \quad (a_n \geqslant a_{n+1}) \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Если эти неравенства строгие, то $\{a_n\}$ называется ***строго возрастающей*** *(соответственно,* ***строго убывающей****).*

Теорема 2.8 *Пусть $\{a_n\}$ — возрастающая (убывающая) последовательность. Тогда следующие условия равносильны*
i) $\{a_n\}$ сходится,
ii) $\{a_n\}$ ограничена сверху (снизу).
При этом

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \sup\{a_n\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n \quad \inf\{a_n\}\right) \tag{2.10}$$

Доказательство. Утверждение $i) \Longrightarrow ii)$ справедливо и без предположения о монотонности (см. часть 2) теоремы 2.2).

Утверждение $ii) \Longrightarrow i)$ докажем для возрастающих $\{a_n\}$ для убывающих оно такое же.

Пусть $M = \sup\{a_n\}$. Тогда по определению точной верхней границы для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N_ε, что $a_{N_\varepsilon} > M - \varepsilon$. Поэтому в силу монотонности при $n \geqslant N_\varepsilon$

$$M - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leqslant a_n \leqslant M$$

и

$$0 \leqslant M - a_n < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N_\varepsilon. \square$$

3.2. Число Эйлера

Рассмотрим последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.11}$$

При возрастании n основание близко к 1, а показатель степени n неограничен. Поэтому асимптотическое поведение этой последовательности непредсказуемо, по крайней мере, с первого взгляда. Тем не менее она ведет себя достаточно регулярно и, в частности, сходится. В этом будет содержание нашей следующей теоремы.

Предел этой замечательной последовательности e (число Эйлера) имеет не меньшее значение в математике, чем знаменитое число π (отношение длины любой окружности к ее диаметру). Позже мы узнаем, что между этими двумя великими числами существует теснейшая связь. Начинающий математик удивится (хотя, неоднократно будет иметь возможность убедиться в этом в теории функций комплексного переменного, в теории вероятностей и в других разделах математики), что π и e имеют обыкновение действовать совместно в самых различных математических законах. [1]

Для доказательства сходимости последовательности (2.11) нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма 2.4 (неравенство Бернулли) *Для любых $\alpha > -1$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n. \tag{2.12}$$

Доказательство. Доказательство проводим по индукции. При $n = 1$ это неравенство очевидно. Предположим, что оно верно для n, тогда

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n(1+\alpha) \geqslant (1+n\alpha)(1+\alpha) =$$

$$1 + n\alpha + \alpha + n\alpha^2 \geqslant 1 + (n+1)\alpha.$$

и оно верно для $n+1$. $\square$

Теорема 2.9 *Последовательность (2.11) сходится.*

Доказательство. Используя формулу для бинома Ньютона, получаем

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k n^{-k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k n^{-k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n}$$

Каждое слагаемое в последней сумме увеличивается с ростом n, поэтому $\{a_n\}$ возрастает.

Кроме того, в силу очевидного неравенства $k! \geqslant 2^{k-1}$

$$a_n \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} 2^{k-1} = 3 - 2^{-(n-1)} < 3$$

и $\{a_n\}$ ограничена. По теореме 2.8 $\{a_n\}$ сходится.

Приведем теперь другое доказательство. Докажем сходимость последовательности $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Используя неравенство Бернулли, получаем

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} >$$

$$> \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

[1]Тем не менее, до сих пор **никому** неизвестно, является ли рациональным число $\pi - e$.

Следовательно, $\{b_n\}$ — убывающая последовательность. Кроме того, очевидно, она ограничена снизу нулем. По теореме 2.8 $\{b_n\}$ сходится. Так как $b_n = a_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, то по теореме 2.3 $\{a_n\}$ также сходится. $\square$

Определение 2.8 *Предел последовательности (2.11) называется числом Эйлера и обозначается e.*

3.3. Асимптотика некоторых сумм

Отметим, что метод доказательства теоремы 2.9 показывает, что справедливы неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \geqslant 2. \tag{2.13}$$

Используя эти неравенства мы докажем следующий любопытное утверждение о поведении расходящихся сумм (см. пример 2.5)

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Теорема 2.10 *Существует такое число $C \in \mathbb{R}$, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n+1) + C + \varepsilon_n, \quad \textit{где} \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Прологарифмируем неравенство (2.13), получаем

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 2. \tag{2.14}$$

Далее, складывая эти неравенства, приходим к соотношениям

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1 < \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

или

$$0 < a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) < 1.$$

Это означает ограниченность последовательности a_n.

Рассмотрим разности

$$a_{n+1} - a_n = \left[\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2)\right] - \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right] =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0.$$

Последнее неравенство выполнено в силу (2.14). Это означает, что последовательность a_n строго возрастает. По теореме 2.8 существует $\lim_{n\to\infty} a_n \quad C$.

Наконец, перепишем последнее неравенство в виде

$$0 < a_{k+1} - a_k = \frac{1}{k+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) < \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

Снова было использовано (2.14). Просуммируем это неравенство по всем $k - n, n+1, \ldots, n+p-1$:

$$0 < a_{n+p} - a_n < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1}$$

и перейдем здесь к пределу при $p \to \infty$, получая

$$0 < -\varepsilon_n \quad C - a_n \leqslant \frac{1}{n+1}. \quad \square$$

Несколько позже у нас будет общий метод получения асимптотик подобных сумм.

Число C, существование которого установлено в теореме 2.10 также называется числом Эйлера. Из доказательства теоремы легко усмотреть неравенства $0 < C < 1$. До сих пор неизвестно, является ли число C иррациональным.

§ 4. Подпоследовательности и частичные пределы

4.1. Частичные пределы

Пусть $\{a_n\}$ числовая последовательность и $n_1 < n_2 < \ldots$ последовательность натуральных чисел. Тогда $\{a_{n_k}\}$ называется **подпоследовательностью** для $\{a_n\}$.

Определение 2.9 *Число $a \in \mathbb{R}$ называется* ***частичным пределом*** *последовательности $\{a_n\}$, если для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} - a.$$

Лемма 2.5 (Больцано-Вейерштрасс) *Каждая ограниченная последовательность имеет по крайней мере один частичный предел.*

Доказательство. Если множество различных элементов в последовательности $\{a_n\}$ конечно, то по крайней мере одно из них последовательность принимает бесконечно много раз, т.е. для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} - a$.

Если множество различных элементов в $\{a_n\}$ бесконечно, то по лемме Больцано-Вейерштрасса это множество имеет предельную точку a. Пусть n_1 таково, что $|a_{n_k} - a| < 1$. Если номера $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ уже построены, то находим n_k так, чтобы $n_k > n_{k-1}$ и $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. □

4.2. Верхний и нижний пределы

Определение 2.10 *Точная верхняя (нижняя) границы множества частичных пределов ограниченной последовательности называется ее верхним пределом и обозначается*

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \quad \left(\textit{соответственно} \quad \varliminf_{n\to\infty} a_n\right).$$

Существование верхнего и нижнего пределов у ограниченной последовательности обеспечивается теоремой 1.1 и леммой 2.5.

Суть понятия верхнего предела хоть и выражена в определении весьма кратко, но, тем не менее, затушевана терминологией. Это затрудняет использование этого понятия. Следующее утверждение будет в дальнейшем выполнять функцию "рабочего" определения, которое будет использоваться при работе с верхним пределом.

Теорема 2.11 *Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Тогда*
1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ является частичным пределом,
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad a_n < \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$.
$\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ — единственное число со свойствами 1) и 2).

Доказательство. 1) Пусть L — множество частичных пределов для $\{a_n\}$. По лемме 2.5 $L \neq \varnothing$. Обозначим

$$\overline{a} = \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \sup L.$$

По определению точной верхней границы найдется такое $a \in L$, что $\overline{a} - 1 < a \leqslant \overline{a}$. По определению частичного предела можно указать номер n_1 так, что $|a - a_{n_1}| < 1$, тогда $|\overline{a} - a_{n_1}| < 2$. Если номера $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ уже построены, то $n_k > n_{k-1}$ определяем так: найдется $a \in L$ со свойством $\overline{a} - \frac{1}{k} < a \leqslant \overline{a}$ и найдется номер $n_k > n_{k-1}$ со свойством $|a - a_{n_k}| < \frac{1}{k}$, тогда $|\overline{a} - a_{n_k}| < \frac{2}{k}$. Таким образом, по индукции построена подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \overline{a}$.

2) Если допустить противное, то есть

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N \quad \exists n \leqslant N \quad a_n > \overline{a} + \varepsilon_0,$$

то по индукции легко строится такая подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, что $a_{n_k} > \overline{a} + \varepsilon_0$. Из ограниченной последовательности $\{a_{n_k}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $a_{n_{k_i}} \to a \geqslant \overline{a} + \varepsilon_0$ (см. теорему 2.4). Это противоречит тому, что $\overline{a} = \sup L$.

Единственность. Пусть число $\overline{a}$ таково, что оно является частичным пределом для $\{a_n\}$ и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad a_n < \overline{a} + \varepsilon.$$

Докажем, что $\overline{a} = \max L$. Пусть $a \in L$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, тогда по теореме 2.4 из неравенств $a_{n_k} < \overline{a} + \varepsilon$ следует $a \leqslant \overline{a} + \varepsilon$. Здесь $\varepsilon > 0$ — любое, поэтому $a \leqslant \overline{a}$. Таким образом $\overline{a}$ — максимальный элемент в L. □

Подобное утверждение справедливо, конечно, и для нижнего предела.

Теорема 2.12 *Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Тогда*
1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ является частичным пределом,
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad a_n > \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n - \varepsilon$.
$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ — единственное число со свойствами 1) и 2).

В частности, из утверждений теорем 2.11 и 2.12 следует, что верхний и нижний пределы показывают характер асимптотического разброса элементов последовательности: для любого $\varepsilon > 0$ интервал

$$(\varliminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon, \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon)$$

содержит все элементы последовательности $\{a_n\}$, начиная с некоторого.

Теорема 2.13 *Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Тогда следующие условия равносильны*
i) $\{a_n\}$ сходится,
ii) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Доказательство. Если сходится $\{a_n\}$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Поэтому по теореме 2.4 и частей 1) теорем 2.11 и 2.12 для любого $\varepsilon > 0$

$$a - \varepsilon \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n \leqslant a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant a + \varepsilon.$$

и $0 \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n - \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant 2\varepsilon$. Следовательно, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Обратное утверждение вытекает непосредственно из утверждений 2) теорем 2.11 и 2.12. □

4.3. Монотонные перестановки последовательности

В этом пункте мы покажем, что верхний и нижний пределы последовательности можно вычислить "внутренним образом", то есть в терминах элементов самой последовательности, не прибегая к нахождению множества частичных пределов и его точных границ.

Если $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность, то можно определить следующие две последовательности

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k : k \geqslant n\}\,, \quad \overline{a}_n = \sup\{a_k : k \geqslant n\}\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.15}$$

(они уже появлялись при доказательстве критерия Коши, см. теорему 2.7). Эти последовательности удовлетворяют неравенствам

$$\underline{a}_n \leqslant a_n \leqslant \overline{a}_n, \quad \overline{a}_{n+1} \leqslant \overline{a}_n, \quad \underline{a}_n \leqslant \underline{a}_{n+1}, \quad n \geqslant 1 \tag{2.16}$$

Поэтому их часто называют **монотонными перестановками** $\{a_n\}$: $\{\underline{a}_n\}$ — возрастающей, а $\{\overline{a}_n\}$ — убывающей.

Теорема 2.14 *Для любой ограниченной последовательности* $\{a_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n.$$

Доказательство. Докажем утверждение теоремы, например, для верхнего предела. Сначала заметим, что последовательность $\{\overline{a}_n\}$ сходится. Это следует из теоремы 2.8 — она убывает и ограничена снизу, так как ограничена $\{a_n\}$ (см. (2.15)).

Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = \lim_{k\to\infty} \overline{a}_{n_k} \geqslant \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Докажем обратное неравенство. Пусть $\varepsilon > 0$. Из утверждения 2) теоремы вытекает, что $\overline{a}_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$ при $n \geqslant N_\varepsilon$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. □

§ 5. Предел функции

5.1. Предел функции по Коши

Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка ее области определения D.

Определение 2.11 *Число $b \in \mathbb{R}$ называется* ***пределом*** *функции f в точке a, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \tag{2.17}$$

Краткая запись этого

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \textit{или} \quad \lim_{D \ni x \to a} f(x) = b.$$

Подчеркнем, что функция f не обязана быть определенной в самой точке a — значение $f(a)$ не используется в определении. Но точка a должна быть предельной для области определения, то есть сколь угодно близко к a есть точки из D, отличные от a.

В терминах окрестностей (2.17) выглядит так:

$$\forall V_b \quad \exists U_a^\circ \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_b.$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad f(U_a^\circ(\delta) \cap D) \subset V_b(\varepsilon).$$

Теорема 2.15 (критерий Гейне предела функции) *Условия*

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$,

ii) $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$ *для любой последовательности* $\{x_n\} \subset D$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$

равносильны.[2]

Доказательство. $i) \Longrightarrow ii)$. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и задана последовательность $\{x_n\} \subset D$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$. Тогда по $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ так, что из $0 < |x - a| < \delta$ следует $|f(x) - b| < \varepsilon$. По $\delta > 0$ определим номер $N \in \mathbb{N}$ так, что при всех $n \geqslant N$ будет $|x_n - a| < \delta$. Тогда при $n \geqslant N$ выполнено неравенство $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ и $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

$ii) \Longrightarrow i)$. Предположим противное, тогда

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in D \quad (0 < |x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - b| \geqslant \varepsilon_0).$$

Беря $\delta = \frac{1}{n}$, находим отсюда $x_n \in D$ так, чтобы $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon_0$ — противоречие. □

Определение 2.12 *Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется* ***ограниченной****, если множество ее значений $f(D)$ ограничено. Если $f(D)$ ограничено сверху (снизу), то и f называется* ***ограниченной сверху (снизу)****.*

В явном виде ограниченность функции означает, что

$$\exists m \leqslant M \quad \forall x \in D \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$$

или эквивалентно

$$\exists M \geqslant 0 \quad \forall x \in D \quad |f(x)| \leqslant M.$$

[2]Обычно условие 2) теоремы 2.15 называют определением **предела функции по Гейне**.

Определение 2.13 *Если a является предельной точкой множества D, то функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется* ***локально ограниченной в точке*** *a, если существует такая окрестность U_a этой точки, что множество $f(D \cap U_a)$ ограничено.*

Теорема 2.16 (общие свойства предела функции)

1) Предел функции определяется однозначно,

2) если функция имеет предел в некоторой точке, то она локально ограничена в этой точке.

Доказательство. 1) сразу следует из теоремы 2.15 и единственности предела последовательности (теорема 2.2).

2) Существует $\delta > 0$, для которого $f(D \cap U_a^\circ(\delta)) \subset U_b(1)$ и множество $f(D \cap U_a^\circ(\delta))$ ограничено. □

5.2. Предел и операции над функциями

Арифметические операции над функциями определяются естественным образом:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in D_f \cap D_g,$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in D_f \cap D_g,$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D_f \cap D_g \setminus g^{-1}(\{0\}),$$

где D_f и D_g — области определения f и g соответственно

Теорема 2.17 (предел и арифметические операции) *Пусть a — предельная точка множества $D \subset \mathbb{R}$ и функции $f : D \to \mathbb{R}$ и $g : D \to \mathbb{R}$ имеют пределы в точке a. Тогда*

1) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

2) $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

3) если дополнительно $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

Доказательство. Доказательство немедленно вытекает из соответствующих свойств предела последовательности (теорема 2.3) и теоремы 2.15. Лишь при доказательстве 3) надо сначала отметить, что если $c = \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ по определению предела для $\varepsilon = \frac{|c|}{2} > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что при всех $x \in U_a^\circ(\delta) \cap D$ выполнено неравенство $|g(x) - c| < \frac{|c|}{2}$, то есть для таких x $|g(x)| > \frac{|c|}{2} > 0$. □

Можно было бы ожидать, что из

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{y\to b} g(y) = l$$

следует, что

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = l.$$

(конечно, в предположении $f(D_f) \subset D_g$). Следующий пример показывает, что это не так.

Пусть

$$f(x) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{y\to 0} g(y) = 0, \quad \lim_{x\to 0} g(f(x)) = 1.$$

Сейчас мы докажем две теоремы, которые при определенных условиях все же позволяют делать вывод о существовании предела у суперпозиции функций.

Теорема 2.18 *Пусть функции $f : D_f \to \mathbb{R}$ и $g : D_g \to \mathbb{R}$ таковы, что $f(D_f) \subset D_g$,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{y\to b} g(y) = g(b).$$

Тогда

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)\,.$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta_1 > 0$ так, чтобы $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ при всех $y \in D_g$, $|y - b| < \delta_1$. Для этого $\delta_1 > 0$ найдем $\delta_2 > 0$ таким образом, чтобы $|f(x) - b| < \delta_1$ при всех $x \in D_f$, $0 < |x - a| < \delta_2$. Тогда при всех x таких выполнено неравенство $|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$. $\square$

Теорема 2.19 *Пусть функции $f : D_f \to \mathbb{R}$ и $g : D_g \to \mathbb{R}$ таковы, что $f(D_f) \subset D_g$,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{y\to b} g(y) = c.$$

и $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности точки a. Тогда

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c.$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta_1 > 0$ так, чтобы $|g(y) - c| < \varepsilon$ при всех $y \in D_g$, $0 < |y - b| < \delta_1$. Для этого $\delta_1 > 0$ найдем $\delta_2 > 0$ таким образом, чтобы $|f(x) - b| < \delta_1$ при всех $x \in D_f$, $0 < |x - a| < \delta_2$. Кроме того, найдется такое $\delta_3 > 0$, что $f(x) \neq b$ при всех $x \in D_f$, $0 < |x - a| < \delta_3$. Если взять $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3\} > 0$, то при всех $x \in D_f$, $0 < |x - a| < \delta$ выполнено неравенство $|g(f(x)) - c| < \varepsilon$. $\square$

5.3. Предел функции и неравенства

Теорема 2.20 *Пусть функции $f : D \to \mathbb{R}$ и $g : D \to \mathbb{R}$ таковы, что*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} g(x) = c.$$

Тогда

1) если $b < c$, то найдется такая окрестность U_a, что

$$\forall\, x \in U_a^\circ \quad f(x) < g(x),$$

2) если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех x из некоторой проколотой окрестности U_a°, то $b \leqslant c$.

Доказательство. 1) Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}(c-b)$, тогда по определению предела

$$\exists\, \delta_1 > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - c| < \varepsilon.$$

Если взять $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, то при всех $x \in D$, $0 < |x-a| < \delta$, выполнены неравенства

$$f(x) < b + \varepsilon = c - \varepsilon < g(x).$$

2) Если предположить противное, то мы сразу приходим к противоречию с 1). □

Теорема 2.21 *Пусть $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ и*

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$$

в некоторой проколотой окрестности U_a°. Тогда если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b.$$

то

$$\lim_{x\to a} h(x) = b.$$

Доказательство. Доказательство вытекает из соответствующей теоремы 2.5 для последовательностей. □

5.4. Два замечательных предела

Напомним, что определение элементарных функций мы откладываем до удобного момента. Сейчас же будем свободно пользоваться привычными свойствами этих функций (они независимо будут доказаны позже).

Теорема 2.22

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \tag{2.18}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{2.19}$$

Доказательство. 1) При доказательстве мы будем исходить из неравенств

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

или

$$1-\frac{x^2}{2} < 1-2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0$, то наше утверждение вытекает из теоремы 2.21.

2) Пусть $x_n\to 0$, $x_n\neq 0$. Сначала предположим, что $x_n>0$. Тогда для достаточно больших n будет $0<x_n<1$. Поэтому найдется $m_n\in\mathbb{N}$ со свойством

$$\frac{1}{m_n+1} < x_n \leqslant \frac{1}{m_n}.$$

Отсюда

$$\left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n} < (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \leqslant \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1}.$$

Крайние последовательности сходятся к e по теореме 2.9.

Если $x_n<0$ для всех n, то

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=\left(1+\frac{x'_n}{1-x'_n}\right)^{\frac{1-x'_n}{x'_n}+1},$$

где $x'_n=-x_n$. Так как $y_n=\frac{x'_n}{1-x'_n}>0$ и $y_n\to 0$, то по доказанному последнее выражение сходится к e.

В общем случае, когда в последовательности x_n бесконечно много чисел разных знаков, разбиваем ее на две подпоследовательности. □

5.5. Односторонние пределы

Для множества $D\subset\mathbb{R}$ введем обозначения

$$D_{a+}=D\cap(a,+\infty), \quad D_{a-}=D\cap(-\infty,a). \tag{2.20}$$

Определение 2.14 *Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$. Если a является предельной точкой для D_{a+} (D_{a-}), то правым (левым) пределом функции f в точке a называется предел сужения $f|_{D_{a+}}$ (соответственно $f|_{D_{a-}}$). Он обозначается $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$ или $f(a\pm 0)$.*

Общее название для $f(a\pm 0)$ — односторонние пределы.

Другими словами, запись $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \quad b$ в явном виде означает

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in D \quad 0<x-a<\delta \Longrightarrow |f(x)-b|<\varepsilon,$$

а запись $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \quad b$ —

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in D \quad 0<a-x<\delta \Longrightarrow |f(x)-b|<\varepsilon,$$

Так как $D\setminus\{a\} \quad D_{a+}\cap D_{a-}$, то справедливо утверждение.

Теорема 2.23 *Пусть $f : D\to\mathbb{R}$ и a является предельной точкой для $D_{a\pm}$. Тогда следующие условия равносильны*

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \quad b$ *существует,*

ii) $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$ *существуют и они равны.*

5.6. Пределы на бесконечности

Пусть задана функция $f : D\to\mathbb{R}$, причем ее область определения D не является ограниченной сверху. Тогда число b называется пределом f на $+\infty$, если

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\Delta>0 \quad \forall x\in D \quad x>\Delta \quad \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon.$$

В таком случае будем писать $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

Аналогично вводится предел $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \quad b$ на $-\infty$ (тогда D должно быть неограниченным снизу):

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\Delta>0 \quad \forall x\in D \quad x<-\Delta \Longrightarrow |f(x)-b|<\varepsilon.$$

Наконец, запись $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ означает, что

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\Delta>0 \quad \forall x\in D \quad |x|>\Delta \Longrightarrow |f(x)-b|<\varepsilon.$$

На такие типы пределов легко распространить все теоремы 2.16-2.21. При этом под "окрестностью бесконечности" мы понимаем интервалы вида $(a,+\infty)$ для $+\infty$, $(-\infty,a)$ для $-\infty$ и $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$ для ∞.

5.7. Общее определение предела функции по базе

Рассмотрим теперь различные типы пределов (обычный предел, односторонние пределы, пределы на бесконечности) с единой точки зрения.

Определение 2.15 *Совокупность подмножеств $\mathcal{B}$ множества $\mathbb{R}$ называется **базой**, если выполнены следующие два условия*
1) $\forall\, B \in \mathcal{B} \quad B \neq \varnothing$,
2) $\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \exists\, B \in \mathcal{B} \quad B \subset B_1 \cap B_2$.

Примерами могут служить базы
"$x \to a$"$=\{U_a^\circ : U_a^\circ$ — проколотая окрестность точки $a\}$,
"$x \to a+0$"$=\{(a, a+\delta) : \delta > 0\}$,
"$x \to a-0$"$=\{(a-\delta, a) : \delta > 0\}$,
"$x \to \infty$"$=\{(-\infty, -\Delta) \cup (\Delta, +\infty) : \Delta > 0\}$,
"$x \to +\infty$"$=\{(\Delta, +\infty) : \Delta > 0\}$,
"$x \to -\infty$"$=\{(-\infty, -\Delta) : \Delta > 0\}$.

Определение 2.16 *Число b называется пределом функции $f : D \to \mathbb{R}$ по базе $\mathcal{B}$, если $D \cap B \neq \varnothing$ для любого $B \in \mathcal{B}$ и*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, B \in \mathcal{B} \quad \forall\, x \in D \cap B \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Краткая запись для этого — $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = b$.

В терминах окрестностей определение можно переписать так

$$\forall\, U_b \quad \exists\, B \in \mathcal{B} \quad f(D \cap B) \subset U_b.$$

Ясно, что в случае перечисленных баз мы получаем уже принятые нами определения предела.

5.8. Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Пусть заданы функция $f : D \to \mathbb{R}$ и база $\mathcal{B}$. Будем писать $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = \infty$ и говорить, что функция является **бесконечно большой** по базе $\mathcal{B}$, если

$$\forall\, E > 0 \quad \exists\, B \in \mathcal{B} \quad \forall\, x \in D \cap B \quad |f(x)| > E.$$

Если последнее неравенство заменить на $f(x) > E$ или на $f(x) < -E$, то получаем определения того, что $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = -\infty$ соответственно.

Наконец, функция f называется **бесконечно малой** по базе $\mathcal{B}$, если $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = 0$.

5.9. Символы Харди и Ландау для функций

Подобно тому, как это было сделано для последовательностей, символы можно ввести и для функций.

Пусть $\mathcal{B}$ — база. Тогда если заданы функции $f, g : D \to \mathbb{R}$, то

1) запись $f(x) \overset{\mathcal{B}}{=} O(g(x))$ означает, что существует множество $B \in \mathcal{B}$, для которого $f/g|_B$ — ограниченная функция,

2) запись $f(x) \overset{\mathcal{B}}{=} o(g(x))$ означает, что $\lim\limits_{\mathcal{B}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$,

3) запись $f(x) \overset{\mathcal{B}}{\asymp} g(x)$ означает, что $f(x) \overset{\mathcal{B}}{=} O(g(x))$ и $g(x) \overset{\mathcal{B}}{=} O(f(x))$,

4) запись $f(x) \overset{\mathcal{B}}{\sim} g(x)$ означает, что $\lim\limits_{\mathcal{B}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Как и в случае последовательностей эти символы обычно используют для сравнения поведения бесконечно больших или бесконечно малых функций (по базе $\mathcal{B}$).

5.10. Критерий существования предела

Как и для последовательностей полезным является "внутренний" критерий существования предела функции.

Теорема 2.24 (критерий Коши) *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка для D. Следующие условия равносильны*

i) существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$,

ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in D \qquad \left.\begin{array}{l} 0 < |x_1 - a| < \delta \\ 0 < |x_2 - a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$

Доказательство. $i) \Longrightarrow ii)$ — очевидно. $ii) \Longrightarrow i)$. Следует из теоремы 2.7 и теоремы 2.15. $\square$

5.11. Предел монотонной функции

Как и для последовательностей введем четыре вида монотонности.

Определение 2.17 *Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и $X \subset D$. Тогда*

1) f называется ***возрастающей*** *на множестве X, если*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2),$$

2) f называется ***строго возрастающей*** *на множестве X, если*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

3) f называется ***убывающей*** *на множестве X, если*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2),$$

4) f называется ***строго убывающей*** *на множестве X, если*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Теорема 2.25 *Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и $X \subset D$. Тогда*
1) если a — предельная точка для D_a^+, то

$$f(a+0) = \inf f\big(D_a^+\big) \qquad \text{для возрастающей функции } f$$

и

$$f(a+0) = \sup f\big(D_a^+\big) \qquad \text{для убывающей функции } f,$$

2) если a — предельная точка для D_{a-}, то

$$f(a-0) = \sup f\big(D_a^-\big) \qquad \text{для возрастающей функции } f$$

и

$$f(a-0) = \inf f\big(D_a^-\big) \qquad \text{для убывающей функции } f.$$

Доказательство. Рассмотрим один из четырех случаев. Например, 1) и f убывает.

Если $M = \sup f(D_a^+) < +\infty$, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $x_\varepsilon \in D_a^+$, что $f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$. Тогда при $a < x < x_\varepsilon$ $(x \in D)$ выполнены неравенства

$$M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant M < M + \varepsilon$$

и можно взять $\delta = x_\varepsilon - a > 0$.

Если $M = \sup f(D_a^+) = +\infty$, то для любого $E > 0$ найдется $x_E \in D_a^+$, для которого $f(x_E) > E$. Тогда для всех $a < x < x_E$ $(x \in D)$

$$f(x) \geqslant f(x_E) > E.$$

$\square$

Глава 3
НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Локальные свойства непрерывных функций

1.1. Определение непрерывности

Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и $a \in D$. В отличие от определения предела функции $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где точка a могла не принадлежать области определения D, здесь требование $a \in D$ необходимо.

Определение 3.1 *Будем говорить, что функция f* ***непрерывна в точке*** *a, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

На языке окрестностей (3.1) выглядит так:

$$\forall U_{f(x_0)} \quad \exists U_a \quad f(U_a) \subset U_{f(x_0)}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим два возможных случая отношения a и D. Если a является предельной точкой области определения D, то определение (3.1) означает, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

или (более выразительно)

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right),$$

то есть "можно совершать предельный переход под знаком функции".

Если a не является предельной точкой для D, то в некоторой окрестности U_a этой точки нет других элементов из D (в таком случае точка a называется **изолированной точкой** множества D). Тогда условие (3.2) выполнено автоматически. Поэтому в изолированной точке своей области определения непрерывна любая функция.

1.2. Свойства функций непрерывных в точке

Теорема 3.1 *Пусть$f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Тогда если f непрерывна в точке a, то*

1) f локально ограничена в точке a (т.е. f ограничена в некоторой окрестности точки a),

2) если $f(a) \neq 0$, то f локально сохраняет знак $\operatorname{sign} f(a)$ в точке a (т.е. $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(a)$ в некоторой окрестности U_a).

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из части 2) теоремы 2.16.

Для доказательства 2) возьмем $\varepsilon = |f(a)|$, тогда для некоторой окрестности U_a

$$|f(x) - f(a)| < |f(a)|$$

при всех $x \in U_a$. Если, к примеру, $f(a) < 0$, то последнее неравенство влечет

$$f(x) - f(a) < -f(a)$$

и $f(x) < 0$ для $x \in U_a$. $\square$

1.3. Непрерывность и операции над функциями

Из теорем 2.17 и 2.18 соответственно вытекают следующие две теоремы, описывающие взаимодействие понятия непрерывности функции в точке с операциями над функциями.

Теорема 3.2 *Пусть $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Если f и g непрерывны в точке a, то функции $f \pm g$, $f \cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$ (если $g(a) \neq 0$) непрерывны в точке a.*

Теорема 3.3 (непрерывность композиции) *Пусть функция $f : D_f \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in D$, а функция $g : D_g \to \mathbb{R}$, $f(D_f) \subset D_g$, непрерывна в точке $b \quad f(a)$. Тогда композиция $f \circ g$ непрерывна в точке a.*

§ 2. Глобальные свойства непрерывных функций

Выше несколько раз встречался термин "локальный". Обычно локальными называют свойства функции, относящиеся к некоторой окрестности точки. Свойства, относящиеся ко всей области определения, называют обычно глобальными. Здесь мы рассмотрим глобальные свойства функций, непрерывных на отрезке. Они имеют большое значение для дальнейшего построения теории.

Определение 3.2 *Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и $X \subset D$. Будем говорить, что f непрерывна на множестве X, если она непрерывна в каждой точке множества X.*

Символом $C(D)$ обозначаем класс всех функций, непрерывных на множестве D.

2.1. Две теоремы Вейерштрасса

Теорема 3.4 (Вейерштрасс) *Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in [a, b]$ существует такая окрестность U_x этой точки, что $f(U_x \cap [a, b])$ — ограниченное множество. По лемме 2.2 из покрытия $\{U_x\}_{x\in[a,b]}$ сегмента $[a, b]$ интервалами можно выделить конечное подпокрытие $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Итак

$$f([a, b]) = \bigcup_{k=1}^{n} f(U_{x_k} \cap [a, b]).$$

Осталось заметить, что объединение конечного числа ограниченных множеств ограничено. □

Теорема 3.5 (Вейерштрасс) *Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $m = \inf f([a, b])$, $M = \sup f([a, b])$. Тогда существуют такие точки $\alpha, \beta \in [a, b]$, что*

$$f(\alpha) = m, \quad f(\beta) = M.$$

Доказательство. По определению точной нижней границы для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такая точка $x_n \in [a, b]$, что

$$m \leqslant f(x_n) < m + \frac{1}{n},$$

откуда $f(x_n) \to m$. Из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ по лемме 2.5 можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to \alpha \in [a, b]$. В силу непрерывности $f(x_{n_k}) \to f(\alpha)$. В силу единственности предела $f(\alpha) = m$.

Существование β доказывается аналогично. □

2.2. Теоремы о промежуточных значениях

Теорема 3.6 (Больцано-Коши) *Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, то существует точка $x_0 \in (a, b)$, для которой $f(x_0) = 0$.*

Доказательство. Положим $a_0 = a$, $b_0 = b$ и обозначим через $[a_1, b_1]$ ту из половин $[a_0, b_0]$, на концах которой f принимает значения разных знаков и т.д. По индукции построим последовательность $\{[a_n, , b_n]\}$ стягивающихся сегментов, на концах каждого из которых принимает значения разных знаков (если в одной из точек деления f обращается в 0, то все доказано). По лемме 2.1 Кантора существует точка x_0, принадлежащая всем сегментам.

Обозначим через x'_n тот из концов $[a_n, , b_n]$, для которого $f(x'_n) > 0$, а через x''_n — для которого $f(x''_n) < 0$. Тогда в силу непрерывности, $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \geqslant 0$ и $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) \leqslant 0$, следовательно, $f(x_0) = 0$. □

Теорема 3.7 (Больцано-Коши) *Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $m = \inf f([a, b])$, $M = \sup f([a, b])$. Тогда для любого $y \in [m, M]$ существует $x \in [a, b]$ со свойством*

$$f(x) = y.$$

Доказательство. Если $m = M$, то доказывать нечего. Если $m < M$, то найдем точки $\alpha, \beta \in [a,b]$ так, чтобы $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$ (см. теорему 3.5), и к функции $g(x) = f(x) - y$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ применим теорему 3.6. $\square$

Отметим, что все четыре последние теоремы можно объединить в одну.

Теорема 3.8 (о непрерывном образе отрезка) *Если $f \in C[a,b]$ и m $\inf f([a,b])$, $M = \sup f([a,b])$, то*

$$f([a,b]) \quad [m, M].$$

2.3. Равномерная непрерывность

Запишем подробно факт непрерывности функции $f : D \to \mathbb{R}$ на множестве D:

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x' \in D \quad |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Подчеркнем, что в этом определении δ зависит как от ε, так и от выбора точки $x \in D$. Может случиться так, что при фиксированном ε одно δ обслужить все точки $x \in D$ не сможет. Примером может служить функция $f(x) = 1/x$ на интервале $(0, 1)$.

Указанную зависимость δ от $x \in D$ можно устранить, передвигая квантор $\forall x \in D$ правее квантора $\exists \delta > 0$. Тем самым мы придем к новому понятию.

Определение 3.3 *Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется **равномерно непрерывной** на множестве D, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x', x'' \in D \quad |x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Конечно, если функция равномерно непрерывна на D, то она непрерывна на D. Обратное неверно (это показывает последний пример). При этом виной тому вовсе не неограниченность функции. Пример: $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$.

Теорема 3.9 (Кантор) *Если функция $f \in C[a,b]$, то она равномерно непрерывна на $[a,b]$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x'_n, x''_n \in [a,b] \quad |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Из ограниченной последовательности $\{x'_n\} \subset [a,b]$ по лемме 2.5 можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x'_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$. Тогда $x''_{n_k} \to x_0$. В силу непрерывности функции f в точке $x_0 \in [a,b]$ должно быть

$$\left|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\right| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

— противоречие. □

Для ограниченной функции $f : D \to \mathbb{R}$ и подмножества $X \subset D$ ее области определения введем обозначение

$$\omega_f(X) = \sup f(X) - \inf f(X) \tag{3.4}$$

и будем называть эту величину **колебанием функции** f **на множестве** X. Для неограниченной на функции пишем $\omega_f(X) = +\infty$.

Из теоремы вытекает следующее утверждение, которое будет полезным при рассмотрении определенного интеграла.

Теорема 3.10 *Если* $f \in C[a,b]$, *то*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall [x_1, x_2] \subset [a,b] \quad x_2 - x_1 < \delta \Longrightarrow \omega_f([x_1, x_2]) < \varepsilon.$$

2.4. Модуль непрерывности и классы Гельдера

Введем еще одно полезное понятие. **Модулем непрерывности** ограниченной функции называется

$$\omega(\delta, f) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : |x_1 - x_2| < \delta,\ x_1, x_2 \in [a,b]\}\,, \tag{3.5}$$

Можно показать, что условие $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega(\delta, f) = 0$ равносильно непрерывности функции f. По скорости убывания модуля непрерывности при можно классифицировать "качество" непрерывности функции. Простейшую классификацию задают классы Гельдера

$$H_\alpha = \{f : \omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha)\,,\ \delta \to 0\}\,. \tag{3.6}$$

Нетрудно показать, что если $\omega(\delta, f) = o(\delta)$ $(\delta \to 0)$, то f — тождественная постоянная. Поэтому классы H_α содержат нетривиальные функции только при $0 < \alpha \leqslant 1$.

Легко видеть также, что

$$H_1 \subset H_\alpha \subset H_\beta \subset C[a,b] \quad \text{при} \quad 0 < \beta < \alpha < 1.$$

§ 3. Непрерывность и монотонность

В этом параграфе мы рассмотрим следующие вопросы:

1) при каких условиях непрерывная функция имеют обратную,

2) что можно сказать о непрерывности обратной функции, если последняя существует.

3.1. Вспомогательные утверждения

Начнем со следующего очевидного утверждения, в котором функция не предполагается непрерывной.

Лемма 3.1 *Если функция $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, строго монотонна, то она является биекцией D на $f(D)$.*

Гораздо более интересным является то, что для непрерывных функций на отрезке верно и обратное.

Лемма 3.2 *Если функция $f \in C[a,b]$ инъективна, то она строго монотонна.*

Доказательство. Пусть, например, $f(a) < f(b)$. Покажем, что тогда f строго возрастает на $[a,b]$.

Заметим сначала, что

$$f(a) < f(x) < f(b), \quad x \in (a,b).$$

В самом деле, если $f(x) < f(a)$, то на (x,b) f должна принимать значение $f(a)$, а если $f(b) < f(x)$, то на (a,x) f должна принимать значение $f(b)$.

Если теперь $a < x_1 < x_2 < b$, то, повторяя это же рассуждение на отрезке $[a, x_2]$, получим $f(x_1) < f(x_2)$. $\Box$

Лемма 3.3 *Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ строго монотонна. Тогда следующие условия равносильны*

i) $f \in C[a,b]$,

ii) $f([a,b]) = [f(a), f(b)]^*$.

Доказательство. Рассмотрим, например, случай строго возрастающей функции.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Это утверждение вытекает из теоремы 3.8, так как сейчас

$$\sup f([a,b]) = f(b) \quad \text{и} \quad \inf f([a,b]) = f(a).$$

ii) $\Longrightarrow$ *i)* Предположим, что f разрывна в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$. Так как для монотонной функции существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ (см. теорему 2.25), то либо $f(x_0) > f(x_0 - 0)$, либо $f(x_0) < f(x_0 + 0)$. Тогда числа из $(f(x_0 - 0), f(x_0)) \subset [f(a), f(b)]$ (или из $(f(x_0), f(x_0 + 0)) \subset [f(a), f(b)]$) не входят в область значений функции f. $\Box$

3.2. Свойства обратной функции

Здесь $\langle a, b\rangle$ будет обозначать любой промежуток (возможны случаи $a = -\infty$ и $b = +\infty$). В случае, когда функция $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ не задана на концах промежутка $\langle a,b\rangle$, условимся понимать $f(a)$ как $\lim_{x\to a+0} f(x)$, а $f(b)$ как $\lim_{x\to b-0} f(x)$. Это соглашение используется в следующей теореме.

Теорема 3.11 *Пусть функция $f \in C\langle a,b\rangle$. Следующие условия равносильны*

i) f взаимно однозначна,

ii) f строго монотонна.

Если f строго монотонна, то f^{-1} также строго монотонна (в том же смысле, что и f) и непрерывна на $\langle f(a), f(b)\rangle^*$.

Доказательство. Сначала пусть $\langle a,b\rangle = [a,b]$. Эквивалентность условий i) и ii) вытекает непосредственно из лемм 3.1 и 3.2. Строгая монотонность обратной функции очевидна, а ее непрерывность вытекает из леммы 3.3.

Если, например, $\langle a,b\rangle = (a,b]$, то надо взять последовательность $a_n \downarrow a$ и применить уже доказанное к отрезку $[a_n, b]$. Аналогично рассматриваются другие виды промежутков. □

3.3. Классификация разрывов

Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и $a \in D$ — точка ее области определения, которая является предельной точкой для D_{a+} и D_{a-} (см. (2.20)).

Если f разрывна в точке a, то возможны следующие случаи.

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует, но $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. В этом случае говорят, что a — **точка устранимого разрыва** для (если переопределить значение функции f в точке a, взяв его равным $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то новая функция будет непрерывной в точке a).

Если же $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует, то возможны два случая.

2) Существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$, но они не равны. Такие точки разрыва называются **разрывами 1-го рода** или **скачками**.

3) По крайней мере один из односторонних пределов $f(a-0)$ или $f(a+0)$ не существует. В этом случае a называется **разрывом 2-го рода**.

Для монотонной функции возможен только один из этих случаев — второй, причем разрывов не может быть очень много.

Теорема 3.12 *Монотонная функция $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ может иметь разрывы только 1-го рода, причем множество ее разрывов не более чем счетно.*

Доказательство. То, что точки разрыва являются скачками, вытекает из теоремы 2.25.

Пусть X — множество точек разрыва и $x \in X$, тогда

$$I_x = (f(x-0) - f(x+0))^* \neq \varnothing$$

и любые два таких интервала не пересекаются. Фиксируя точку $r_x \in I_a \cap \mathbb{Q}$, получаем взаимно однозначное отображение $x \to r_x$ множества X на некоторое подмножество в $\mathbb{Q}$. □

§ 4. Степенная, показательная и логарифмическая функции

4.1. Степени

Напомним, что при $a \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ степень a^n определяется индуктивно

$$a^0 = 1, \quad a^n = a \cdot a^{n-1},$$

а на показатели $n \in \mathbb{Z}$ распространяется равенством

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}, \quad n < 0, a \neq 0.$$

При этом выполнены основные свойства степени

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

Определим теперь понятие степени положительного числа на любые показатели.

При $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

Тогда $f \in C(\mathbb{R}_+)$ (как произведение непрерывных функций) и возрастает, так как при $0 < x_1 < x_2$ выполнены неравенства

$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1) \sum_{k=0}^{n-1} x_2^k x_1^{n-k-1} > 0.$$

Кроме того, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, поэтому

$$f_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+.$$

Отсюда и из теоремы 3.11 вытекает существование обратной функции f_n^{-1}, которая также возрастает и непрерывна на $\mathbb{R}_+$.

Для $a \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$a^{\frac{1}{n}} = f_n^{-1}(a), \quad a^{-\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.$$

Отметим ряд свойств дробных степеней: если $a > 0$, то

$$a^{-\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.9}$$

$$\left(a^{ml}\right)^{\frac{1}{nl}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n, l \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Теперь можно определить степень с любым рациональным показателем: если $a > 0$ и $r = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, то положим

$$a^r = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}. \tag{3.11}$$

Это определение корректно (не зависит от способа записи показателя в виде дроби), что следует из (3.10).

Докажем, что свойство (3.7) сохраняется и для рациональных показателей, то есть

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}, \quad a > 0 \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q}. \tag{3.12}$$

В самом деле, если $r_i = \dfrac{m_i}{n_i}$ $(i = 1, 2)$, то

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} \overset{(3.10)}{=} a^{\frac{m_1 n_2}{n_1 n_2}} \cdot a^{\frac{m_2 n_1}{n_2 n_1}} \overset{(3.9)}{=} \left(a^{\frac{1}{n_1 n_2}}\right)^{m_1 n_2} \cdot \left(a^{\frac{1}{n_1 n_2}}\right)^{m_2 n_1} \overset{(3.7)}{=}$$

$$= \left(a^{\frac{1}{n_1 n_2}}\right)^{m_1 n_2 + m_2 n_1} \overset{(3.9)}{=} a^{\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}} = a^{r_1 + r_2}.$$

Далее отметим, что

$$a^r > 1 \quad \text{при} \quad a > 1, \ r > 0. \tag{3.13}$$

Действительно, если $r = \frac{m}{n} > 0$, то $a^{1/n} > 1$ и $a^{\frac{m}{n}} > 1$, так как функция f_n^{-1} возрастает.

Отсюда следует, что функция $r \mapsto a^r$ $(r \in \mathbb{Q})$ возрастает при $a > 1$: если $r_1 < r_2$, то $a^{r_2} = a^{r_1 + (r_2 - r_1)} = a^{r_1} \cdot a^{r_2 - r_1} > a^{r_1}$.

4.2. Показательная функция

Теперь можно определить степень с любым показателем: если $a > 1$ и $x \in \mathbb{R}$, то положим

$$a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, \quad r < x\}.$$

Это определение корректно, так как множество $\{a^r : r \in \mathbb{Q}, \quad r < x\}$ ограничено сверху: если $r_0 > x$ — фиксировано, то при $r \leqslant x$ будет $a^r < a^{r_0}$.

Если $0 < a < 1$, то определим $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$. Наконец, пусть $1^x = 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Для фиксированного числа $a > 0$ функция

$$x \mapsto a^x, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

называется **показательной** с основанием a.

Теорема 3.13 *Пусть $0 < a \neq 1$. Показательная функция с основанием a обладает следующими свойствами*

1) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

2) строго возрастает при $a > 1$ и строго убывает при $0 < a < 1$,

3) непрерывна на $\mathbb{R}$,

4) если $a > 1$, то $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, если $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.

Доказательство. Пусть сначала $a > 1$.

1) Зафиксируем $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ и возьмем $r_i \in \mathbb{Q}$ так, чтобы $r_i \leqslant x_i$. Тогда $r_1 + r_2 \leqslant x_1 + x_2$ и

$$a^{x_1+x_2} \geqslant a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}.$$

Переходим здесь к точной верхней грани сначала по $r_1 \leqslant x_1$, а затем по $r_2 \leqslant x_2$: $a^{x_1+x_2} \geqslant a^{x_1} \cdot a^{x_2}$.

Для доказательства противоположного неравенства возьмем $r \in \mathbb{Q}$, $r < x_1 + x_2$ и найдем $r_1 \in \mathbb{Q}$ так, чтобы $r - x_2 < r_1 < x_1$. Тогда рациональное число $r_2 = r - r_1$ удовлетворяет неравенству $r_2 < x_2$. Поэтому

$$a^r = a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2} \leqslant a^{x_1} \cdot a^{x_2}.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по $r < x_1 + x_2$, получим $a^{x_1+x_2} \leqslant a^{x_1+x_2}$.

2) В силу (3.13) $a^r > 1$ при $r > 0$, следовательно, $a^x > 1$ при $x > 0$. Отсюда при $x_1 < x_2$

$$a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1} - 1\right) > 0.$$

3) Сначала доказываем непрерывность в точке $x_0 = 1$. По определению легко показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$. Отсюда $\lim\limits_{x\to+0} a^x = 1$ и $\lim\limits_{x\to-0} a^x = \lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{a^x} = 1$.

В общем случае

$$\lim_{x\to x_0} (a^x - a^{x_0}) = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right) = 0.$$

4) Вытекает из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.

В случае $0 < a < 1$ свойства показательной функции вытекают из ее определения и уже доказанного для $a > 1$. $\square$

4.3. Логарифмическая функция

Пусть $a > 0$, причем $a \neq 1$. Из теоремы 3.13 вытекает, что показательная функция $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$ с основанием a отображает $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}_+$ взаимно однозначно. Поэтому у нее есть обратная функция, которая называется **логарифмической** с основанием a. Значение этой функции в точке $x \in \mathbb{R}_+$ обозначаем, как обычно, $\log_a x$. Отсюда сразу следуют такие равенства

$$a^{\log_a x} = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

Таким образом, мы назвали логарифмической (с основанием a) функцию

$$x \mapsto \log_a x, \quad x \in \mathbb{R}_+ \tag{3.15}$$

В следующей теореме собрана коллекция основных свойств логарифмической функции.

Теорема 3.14 *Пусть $0 < a \neq 1$. Логарифмическая функция с основанием a обладает следующими свойствами*

1) $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$,

2) строго возрастает при $a > 1$ и строго убывает при $0 < a < 1$,

3) непрерывна на $\mathbb{R}_+$,

4) если $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$, если $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.

Доказательство. Для доказательства свойства 1) возьмем любые $x_1, x_2 > 0$ и пусть $y_k = \log_a x_k$ $(k = 1, 2)$. Последнее означает, что $x_k = a^{y_k}$ $(k = 1, 2)$. Поэтому в силу чвойства 2) теоремы 3.13

$$x_1 \cdot x_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_1} = a^{y_1 + y_2}.$$

Беря логарифмы от крайних частей этого равенства, получаем

$$\log_a x_1 \cdot x_2 = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Свойства 2) и 3) следует из теоремы 3.11 и соответствующих свойств показательной функции из теоремы 3.13. □

4.4. Степенная функция

Если $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 0)$, то функция

$$x \mapsto x^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

называется **степенной** с показателем α.

Так как $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, то степенная функция является непрерывной на всей области определения (как композиция непрерывных функций) и монотонной (возрастающей при $\alpha > 0$ и убывающей при $\alpha < 0$).

4.5. Некоторые важные пределы

Дополним теоремы 2.22 еще тремя замечательными пределами.

Теорема 3.15

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\quad a>0,\quad a\neq 1, \tag{3.16}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad a>0, \tag{3.17}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}, \tag{3.18}$$

Доказательство. Для доказательства (3.16) рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{при } 0<x\neq 0,\\ e & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Она непрерывна в точке 0. Поэтому по теореме 3.3 о непрерывности композиции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e.$$

Положим $a^x-1=t(x)$, тогда $x=\log_a(1+t(x))$ и $\lim\limits_{x\to 0}t(x)=0$. По теореме 2.18 о пределе композиции

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a.$$

(в силу (3.16)).

Если $\alpha\in\mathbb{R}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

Здесь снова была использована теорема 2.18 и равенства (3.16) и (3.17). $\square$

Глава 4
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Производная и дифференцируемость

Фраза "функция f задана в окрестности точки $a \in \mathbb{R}$" будет всегда означать, что некоторая окрестность U_a точки a содержится в области определения функции f.

1.1. Производная

Определение 4.1 *Пусть функция f задана в окрестности точки a. Если существует предел*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{4.1}$$

то он называется производной функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.

Геометрически выражение под знаком предела равно тангенсу угла наклона между прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(a+h, f(a+h))$ графика функции f, и осью Ox. Таким образом, существование предела (4.1) означает, что указанная прямая при $h \to 0$ "стремится" занять некоторое предельное положение — прямой, проходящей через точку $(a, f(a))$ на графике функции, с угловым коэффициентом $f'(a)$. Уравнение этой прямой имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Ее принято называть **касательной** к графику функции f в точке $(a, f(a))$.

Таким образом, по этому соглашению производная — это угловой коэффициент касательной (и в этом состоит геометрический смысл производной).

К понятию производной приводят многие задачи естествознания. Рассмотрим две из них.

Пусть материальная точка неравномерно движется по прямой и функция $s : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ и ее значения $s(t)$, $0 < t \leqslant T$ задает длину пути, пройденного точкой за время t. Если зафиксировать малое число $h > 0$, то отношение

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

отвечает нашим представлениям о средней скорости точки за промежуток времени $[t, t+h]$. И это соответствие тем точнее, чем меньше h. Поэтому предел такого отношения при $h \to 0$ естественно принять за значение "мгновенной" скорости точки в момент времени t. Этот пример наводит на мысль использовать производную $f'(a)$ функции f, как скорость изменения этой функции в точке a.

Другая задача — об определении плотности неоднородного стержня. Пусть функция $m : [0, l] \to \mathbb{R}_+$ задает массу неоднородного прямолинейного материального стержня $s(x)$ при $x \in (0, l]$ задает массу части стержня длины x, считая от его левого конца. Тогда отношение

$$\frac{m(x+h) - m(x)}{h}$$

является средней плотностью части стержня от 0 до x. Для получения плотности стержня в точке x нужно устремить h к 0.

Аналогичным образом можно рассмотреть вопрос об определении ускорения при движении материальной точки по прямой. И снова мы придем к необходимости рассмотрения предельных переходо, подобных тому, который участвует в определении производной.

1.2. Дифференцируемость

"Геометрический" и "физический" смысл производной уже обсуждался. Сейчас мы выясним, в чем состоит ее "математический" смысл.

Определение 4.2 *Функция f заданная в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ называется* ***дифференцируемой*** *в точке a, если существует такое $A \in \mathbb{R}$, что*

$$f(a+h) - f(a) - A \cdot h + o(h), \quad h \to 0. \tag{4.2}$$

Если обозначить $x \quad a + h$, то соотношение (4.2) можно записать в виде

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + o(x-a), \quad x \to a.$$

Другими словами, дифференцируемость функции f означает, что ее приращение $f(a + h) - f(a)$ асимптотически линейно в точке a: чем ближе h к 0, тем точнее линейная функция $a \cdot h$ приближает разность $f(a+h) - f(a)$.

Понятие дифференцируемости непосредственно связано с существованием производной.

Теорема 4.1 *Следующие условия равносильны*
i) f дифференцируема в точке a,
ii) существует производная $f'(a)$.
Если выполнено одно из этих условий, то $A - f'(a)$.

Доказательство. При $h \to 0$ соотношение

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

означает, что

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \quad o(1).$$

Умножая обе части на h, получим

$$f(a+h) - f(a) - f'(a)h = o(h)$$

или

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h)$$

и из ii) следует i). По этой цепочке можно пройти и обратно, заменив здесь $f'(a)$ на A. $\square$

Из этой теоремы, в частности, следует, что "математический" смысл существования производной состоит в возможности асимптотической "линеаризации" приращения функции.

В связи с близостью дифференцируемости и существования производной процесс нахождения производной обычно называют **дифференцированием**.

Определение 4.3 *Если функция f дифференцируема в точке a, то функция*

$$df(a) : h \to f'(a)h \tag{4.3}$$

называется ***дифференциалом*** *для f в точке a.*

Чтобы "уравновесить" определение дифференциала, дифференциал линейной функции $f_0(x) = x$ обозначают dx (то есть $dx(h) = h$ при всех h) и называют **дифференциалом независимой переменной**. Таким образом,

$$df(a) = f'(a)dx$$

или

$$f'(a) = \frac{df(a)}{dx}.$$

Смысл дифференциала состоит в том, что он является главной частью приращения функции

$$f(a+h) - f(a) = df(a)h + o(h)$$

что приводит к равенству,

$$f(a+h) - f(a) \approx df(a)h = f'(a)h,$$

которое можно использовать для приближенного вычисления $f(a+h)$ при малых h.

1.3. Производные элементарных функций

Используем теперь замечательные пределы из теорем 2.22 и 3.15 для вычисления производных основных элементарных функций.

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. В самом деле,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sum_{k=0}^{n-1}(x+h)^k x^{n-k-1}}{h}=nx^{n-1}.\square$$

2) $(a^x)'=a^x\ln a$ при $a>0$.

Доказательство. Действительно, используя равенство (3.17), получаем

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a.\square$$

3) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ при $a>0$, $a\neq 1$.

Доказательство. Здесь надо воспользоваться равенством (3.16) и теоремой 2.18 о пределе композиции

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x\ln a}.\square$$

4) $(\sin x)'=\cos x$.

Доказательство. В силу равенства (2.18) и теоремы 2.18 о пределе композиции

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos x.\square$$

Остальные элементарные функции будут рассмотрены ниже.

1.4. Дифференцирование и операции над функциями

Для изучения характера взаимодействия понятия производной с операциями над функциями мы будем часто использовать следующее простое, но важное утверждение.

Лемма 4.1 *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Это легко следует из определения

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+o(x-a)=o(1)$$

при $x\to a$. $\square$

Как показывает пример функции $f(x)=|x|$, $a=0$, обратное утверждение неверно.

Теорема 4.2 *Пусть функции $f,g:D\to\mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $a\in D$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Тогда функции λf, $f+g$, $f\cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$ (при дополнительном условии $g(a)\neq 0$) дифференцируемы в точке a и справедливы равенства*

$$(\lambda f)'(a)=\lambda f'(a),$$

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Доказательство стандартно. □

Теорема 4.3 *Пусть функция $f : D_f \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in D_f$, а функция $g : D_g \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $b = f(a)$, причем $f(D_f) \subset D_g$. Тогда композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке b и*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a). \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ — произвольная последовательность. Разобьем натуральный ряд на две последовательности $\mathbb{N} = \{n_k\} \cup \{m_k\}$ так, что

$$f(x_{n_k}) - f(a) = 0, \quad f(x_{m_k}) - f(a) \neq 0$$

Тогда, если $\{n_k\}$ содержит бесконечно много элементов, то $f'(a) = 0$ и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(f(x_{n_k})) - g(f(a))}{x_{n_k} - a} = 0 = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Кроме того, так как $f(x_{m_k}) \to f(a)$ по лемме 4.1, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(f(x_{m_k})) - g(f(a))}{x_{m_k} - a} = \lim_{k\to\infty} \frac{g(f(x_{m_k})) - g(f(a))}{f(x_{m_k}) - f(a)} \cdot \frac{f(x_{m_k}) - f(a)}{x_{m_k} - a} =$$
$$g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

и теорема доказана. □

Теорема 4.4 *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ имеет обратную, дифференцируема в точке $a \in D$, причем $f'(a) \neq 0$. Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $b = f(a)$ и*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Доказательство. Пусть $y_n \to b$, $y_n \neq b$, тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $x_n \in D_f$, что $f(x_n) = y_n$. Тогда $f^{-1}(y_n) = x_n$. При этом $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Запишем

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}}.$$

Совершая здесь предельный переход, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Отсюда следует утверждение нашей теоремы (см. также теорему 2.15). □

1.5. Производные тригонометрических функций

Теперь мы в состоянии вычислить производные остальных основных элементарных функций.

1) $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 4.3 о производной композиции

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.\square$$

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Доказательство. Здесь также используем теорему 4.3

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.\square$$

3) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказательство. Пусть $y = \arcsin x$. Тогда по теореме 4.4 о производной обратной функции

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\square$$

4) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказательство. Это вытекает из предыдущей формулы и равенства $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.\square$

5) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Доказательство. Формула получается применением правила дифференцирования частного из теоремы 4.2. $\square$

6) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Доказательство. Здесь надо использовать теорему 4.4 и равенство $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.\square$$

1.6. Производные высших порядков

Если функция $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема на некотором множестве $X \subset D$ (то есть дифференцируема в каждой точке $x \in X$), то мы можем рассмотреть новую функцию

$$f' : X \to \mathbb{R}$$

(производная функция) и поставить вопрос о существовании производной у этой функции и т.д.

Производные высших порядков определяются индуктивно

$$f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a).$$

Подчеркнем, что для существования n-й производной в точке a, необходимо потребовать существования всех предыдущих производных $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(x)$ для x из некоторой окрестности точки a.

По индукции нетрудно установить следующие формулы для производных элементарных функций

$$((1+x)^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \tag{4.5}$$

$$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}((n-1)!)(1+x)^{-n}, \tag{4.6}$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \tag{4.7}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \tag{4.8}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right). \tag{4.9}$$

Эти формулы верны при любом $n \in \mathbb{N}$.

§ 2. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

2.1. Экстремумы и лемма Ферма

Определение 4.4 *Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки a. Тогда a называется точкой*
локального максимума*, если* $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a \quad f(x) \leqslant f(a)$,
локального минимума*, если* $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a \quad f(x) \geqslant f(a)$,
строгого локального максимума*, если* $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a^\circ \quad f(x) < f(a)$,
строгого локального минимума*, если* $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a^\circ \quad f(x) > f(a)$.

Общее название для всех видов максимума и минимума — **экстремумы**.

Лемма 4.2 (Ферма) *Пусть функция f дифференцируема в точке a. Тогда если a является точкой экстремума, то $f'(a) = 0$.*

Доказательство. Пусть, например, a — точка минимума (для максимумов рассуждение аналогичное). Заметим, что

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x < a \quad \text{и} \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x > a$$

откуда

$$0 \leqslant \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \lim_{x\to a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0.$$

Следовательно, $f'(a) = 0$. $\square$

Лемма Ферма дает лишь необходимое условие экстремума, которое не является достаточным. В качестве примера достаточно рассмотреть функцию $f(x) = x^3$ в окрестности точки $a = 0$.

Геометрически утверждение $f'(a) = 0$ означает, что касательная к графику дифференцируемой функции в точке экстремума параллельна оси Ox, а "физически" это означает, что скорость изменения функции f в точке a равна 0. Поэтому в случае $f'(a) = 0$ говорят обычно, что a — **стационарная точка** функции f[1].

2.2. Формула конечных приращений

Теорема 4.5 (Ролль, о нуле производной) *Пусть функция $f \in C[a,b]$ дифференцируема на интервале (a,b), причем $f(a) = f(b)$. Тогда существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Если f — тождественная постоянная, то доказывать нечего. Если f не является тождественно постоянной, то по крайней мере одно из значений $M = \sup f([a,b])$ или $m = \inf f([a,b])$ принимается (по теореме 3.5) в некоторой точке $\xi \in (a,b)$ и эта точка является экстремумом функции f. В силу леммы 4.2 $f'(\xi) = 0$. $\square$

Теорема 4.6 (Лагранж) *Пусть функция $f \in C[a,b]$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{4.10}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \quad x \in [a,b],$$

которая удовлетворяет условиям теоремы 4.5. Поэтому существует точка $\xi \in (a,b)$, для которой

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0. \square$$

Доказанная теорема является чрезвычайно важной и часто используемой. Ее смысл состоит в том, что она выражает приращение функции через производную, предвосхищая, тем самым, стратегию использования производной для исследования поведения функции. Часто ее называют "формулой конечных приращений".

Теорема 4.6 является первой из семейства так называемых теорем о среднем значении, которые, уточняя форму (4.10) теоремы Лагранжа, приведут

[1]Хотя очень распространен и термин "критическая точка", который представляется нам гораздо менее естественным

нас к основным техническим средствам математического анализа — формулам Ньютона-Лейбница и Тейлора.

Следующая теорема является обобщение теоремы 4.6 на случай двух функций.

Теорема 4.7 (Коши) *Пусть функции $f, g \in C[a, b]$ дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$.*

Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Доказательство такое же, как и в предыдущей теореме, но с функцией

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)), \quad x \in [a, b].\square$$

Конечно, если $g(x) \equiv x$, то из теоремы 4.7 мы снова получаем теорему 4.6.

§ 3. Правила Лопиталя для раскрытия неопределенностей

Здесь мы научимся вычислять пределы отношений, когда и числитель и знаменатель являются одновременно или бесконечно большими или бесконечно малыми. Будет показано также, как к таким неопределенностям сводятся некоторые другие.

3.1. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Теорема 4.8 ($\frac{0}{0}$-правило Лопиталя) *Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности U_a°, причем $g'(x) \neq 0$ и*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0. \tag{4.12}$$

Тогда если существует предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

то существует предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

и он также равен l.

Доказательство. Доопределим функции f и g в точке a равенством $f(a) = g(a) = 0$ и применим к ним теорему 4.7 для каждого $x \in U_a^\circ$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)},$$

где $\xi_x \in (a, x)^*$. Так как $\lim\limits_{x \to a} \xi_x = a$, то наше утверждение следует из теоремы 2.19. □

Отметим, что в теореме 4.8 вместо базы $x \to a$, по которой берется предел, можно взять также базы $x \to a \pm 0$ или $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Для первых двух доказательство не изменяется. Для остальных рассмотрим другую пару функций

$$f_1(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \quad g_1(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

в проколотой окрестности нуля. Тогда к паре f_1, g_1 можно применить уже доказанную теорему 4.8 и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{g_1'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3.2. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Аналогичное утверждение справедливо и для неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, но доказательство будет сложнее.

Теорема 4.9 ($\frac{\infty}{\infty}$-правило Лопиталя) *Теорема 4.8 сохраняет силу при замене условия (4.12) на*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty. \tag{4.13}$$

Доказательство. Возьмем число $\delta > 0$ (его выбор будет указан ниже) и $a < x < x_0 = a + \delta$. Тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} + \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot \left[\frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}} - 1\right],$$

где $\xi_x \in (x, x_0)$ определяется по теореме 4.7.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad a < \xi < x_0 = a + \delta$$

и $\left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| < |l| + 1$.

В силу условия (4.13)

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x_0)}{f(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{g(x_0)}{g(x)} = 0$$

и найдется такое $\delta_1 > 0$, что

$$\left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}\right| \cdot \left|\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $a < x < x_1 = a + \delta_1$. Поэтому $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon$ при $a < x < x_1$.

Точно также рассматривается предел слева. □

В теореме 4.9 также вместо базы $x \to a$ можно взять также базы $x \to a \pm 0$ или $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

3.3. Другие виды неопределенностей

Кроме неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ возможны и другие, например, $0 \cdot \infty$, 1^∞, $\infty - \infty$. Для их раскрытия также можно использовать правила Лопиталя, предварительно преобразовав исследуемые выражения.

Например,

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}, \quad 1^\infty = e^{\infty \ln 1}.$$

§ 4. Формула Тейлора

4.1. Асимптотическая формула Тейлора

Рассмотрим задачу о локальном представлении функции в виде многочлена

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

При $n = 1$ такая задача привела нас к понятию дифференцируемости функции.

Легко видеть, что алгебраический многочлен можно записать с помощью его производных в некоторой точке

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Естественно рассмотреть многочлен такого типа для произвольной функции:

$$T_n(x, a\,; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{4.14}$$

Будем называть этот многочлен **полиномом Тейлора n-го порядка для f в точке** a. Для его существования необходимо существование $f^{(n)}(a)$ (а тогда производные $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(n-1)}(x)$ должны существовать в некоторой окрестности точки a).

Разность

$$r_n(x) = f(x) - T_n(x, a\,; f) \tag{4.15}$$

будем называть n**-м остатком Тейлора для f в точке** a.

Теорема 4.10 (формула Тейлора с остатком Пеано) *Если функция f n раз дифференцируема в точке a, то*

$$r_n(x) = o((x-a)^n)\,, \quad x \to a.$$

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ наше утверждение следует из определения дифференцируемости и существования производной.

Далее заметим, что

$$T_n'(x, a\,; f) = T_{n-1}(x, a\,; f')$$

Поэтому, используя правило Лопиталя (теорема 4.8), получаем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x, a\,; f)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_n'(x, a\,; f)}{n(x-a)^{n-1}} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}(x, a\,; f')}{n(x-a)^{n-1}} = 0$$

в силу предположения индукции, примененного к производной f'. □

4.2. Асимптотические формулы для элементарных функций

Применение теоремы 4.10 к основным элементарным функциям приводит к следующим асимптотическим соотношениям при $x \to 0$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k + o(x^n)\,,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k + o(x^n)\,,$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^k + o(x^n)\,,$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\, x^{2k-1} + o\big(x^{2n}\big)\,,$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(2k)!}\, x^{2k} + o\big(x^{2n+1}\big)\,,$$

Конечно, здесь были использованы формулы (4.5)–(4.9) для производных элементарных функций.

4.3. Общая форма остатка Тейлора

Здесь мы приведем другую форму остатка в формуле Тейлора, по которой, в частности, можно будет судить о поведении остатка $r_n(x)$ при $n \to \infty$.

В дальнейшем мы часто будем обозначать $C^n[a,b]$ класс функций, имеющих непрерывные производные до порядка n включительно в каждой точке $x \in [a,b]$ (в определении производной в крайних точках a и b следует рассматривать соответствующий односторонний предел).

Теорема 4.11 (общая форма остатка Тейлора) *Пусть* $f \in C^n[a,x]^*$ *имеет* $(n+1)$*-ю производную на* $(a,x)^*$. *Пусть еще задана функция* $\varphi \in C[a,,x]^*$, *дифференцируемая на* $(a,x)^*$, *причем* $\varphi'(x) \neq 0$.

Тогда существует такая точка $\xi \in (a,x)^*$, *что*

$$r_n(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n. \tag{4.16}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - T_n(x,t\,;f)$$

Тогда

$$F'(t) = \left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)' =$$

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Применим к паре функций F и φ на $[a,x]^*$ теорему 4.7, согласно которой существует точка $\xi \in (a,x)^*$ со свойством

$$\frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Осталось подставить сюда выражение для $F'(\xi)$ и заметить, что $F(x) - F(a) = -r_n(x)$.$\square$

Выбирая конкретную функцию φ, получим некоторые специальные формы остатка Тейлора.

Пусть $\varphi(t) = x - t$, тогда

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a) \tag{4.17}$$

(**форма Коши остатка Тейлора**). Если $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, то

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{4.18}$$

(**форма Лагранжа остатка Тейлора**).

4.4. Поведение остатков при $n \to \infty$

Рассмотрим поведение остатков Тейлора для основных элементарных функций при $n \to \infty$.

Теорема 4.12

$$(1+x)^\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k\right), \quad |x| < 1,$$

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k, \quad |x| < 1,$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\, x^{2k-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(2k)!}\, x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

Доказательство. Для степенной функции рассмотрим остаток формулы Тейлора в форме Коши (4.17)

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}(1+\xi)^{\alpha-n}(x-\xi)^n x,$$

где $\xi \in (0,x)^*$. Отсюда следует, что

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| \leqslant \frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|} = 1 - \frac{1-|x|}{1-|\xi|} \leqslant 1 - \frac{1-|x|}{1-0} \leqslant |x|\,. \tag{4.19}$$

Используя (4.19), оценим остаток

$$|r_n(x)| \leqslant \left|\alpha\Big(1-\frac{\alpha}{1}\Big)\,\dots\,\Big(1-\frac{\alpha}{n}\Big)\right|(1+\xi)^{\alpha}|x|^{n+1}.$$

При увеличении n на единицу правая часть последнего неравенства умножается на $\left|\big(1-\frac{\alpha}{n+1}\big)\,x\right|$. Так как $|x|<1$, то найдется такое n_0, что $\left|\big(1-\frac{\alpha}{n+1}\big)\,x\right| < q < 1$ при $n \geqslant n_0$. Следовательно, $|r_n(x)| \leqslant |r_{n_0}(x)|\,q^{n-n_0}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Для логарифмической функции также используем форму Коши (4.17) для остатка

$$r_n(x) = (-1)^n\frac{(x-\xi)^n x}{(1+\xi)^{n+1}},$$

где $\xi \in (0,x)^*$. Так как $|1+\xi| \geqslant 1-|\xi| \geqslant 1-|x|$, то из неравенства (4.19) получаем $|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0$ при $n \to \infty$.

Для показательной функции, а также для синуса и косинуса, надо использовать форму Лагранжа. Рассуждения здесь одни и те же и мы рассмотрим только показательную функцию. Для нее в силу (4.18)

$$|r_n(x)| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leqslant e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

при $n \to \infty$. □

Рассмотрим еще один пример: пусть $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Ранее мы показали, что $f^{(n)}(0) = 0$ при всех $n = 0, 1, \dots$, поэтому $T_n(x,a;f) \equiv 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x,0;f) \neq f(x)$ при $x \neq 0$. Этот пример показывает, что последовательность полиномов Тейлора не обязана сходится к функции при $n \to \infty$.

4.5. Понятие о сходимости числовых рядов

Если задана последовательность $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$, то символ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называют **числовым рядом**. Но пока это — лишь символ, не имеющий определенного смысла, так как мы не знаем, как можно складывать бесконечно много слагаемых.

С каждым числовым рядом свяжем последовательность сумм

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

которые называются его **частичными суммами**.

Определение 4.5 *Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **сходящимся**, если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

*В этом случае число s называется **суммой ряда** и мы пишем $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.*

Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, то ряд называется **расходящимся**.

Например, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} aq^k$ сходится при $|q| < 1$ и $\sum_{k=1}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$.

В терминах сходимости рядов удобно переформулировать предыдущие результаты о разложениях элементарных функций по формуле Тейлора.

Теорема 4.13

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k, \quad |x| < 1,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k, \quad |x| < 1,$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\, x^{2k-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(2k)!}\, x^{2k-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

На самом деле язык рядов является чрезвычайно удобным при исследовании многих математических закономерностей. Поэтому позже в нашем курсе мы уделим теории рядов достаточно много внимания, учитывая их возможные применения в различных разделах математики.

§ 5. Монотонность и экстремумы

В этом параграфе мы начинаем изучение важной темы математического анализа — исследование функции с помощью производных.

5.1. Производная и монотонность

Теорема 4.14 *Пусть функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на (a,b). Тогда*

1) $f'(x) > 0$ на $(a,b) \Longrightarrow f$ строго возрастает на (a,b),
2) $f'(x) \geqslant 0$ на $(a,b) \Longleftrightarrow f$ возрастает на (a,b),
3) $f'(x) < 0$ на $(a,b) \Longrightarrow f$ строго убывает на (a,b),
4) $f'(x) \leqslant 0$ на $(a,b) \Longleftrightarrow f$ убывает на (a,b).

Доказательство. Утверждения "слева направо" во всех случаях вытекают из формулы Лагранжа (теорема 4.6). Обратные утверждения в случаях 2) и 4) вытекают непосредственно из определения производной. □

Отметим, что утверждения, обратные к 1) и 3) в теореме 4.14, неверны. Для 1) это показывает пример функции $f(x) = x^3$, $x \in (-1, 1)$.

5.2. Производная и экстремумы

Выше мы уже получили в лемме 4.2 необходимое условие экстремума дифференцируемой функции (это — равенство $f'(a) = 0$). Но он не является достаточным для этого. Сейчас мы приведем ряд достаточных условий для экстремумов и укажем способы определения вида экстремума.

Условимся говорить, что функция f, определенная в некоторой окрестности точки a, **меняет знак при переходе через точку** a "с $+$ на $-$" (или "с $-$ на $+$"), если существует такая окрестность U_a, что при $x \in U_a^\circ$ выполнено $\operatorname{sign} f(x) = -\operatorname{sign}(x-a)$ (соответственно $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign}(x-a)$).

Теорема 4.15 *Пусть функция f непрерывна в некоторой окрестности U_a точки a и дифференцируема в U_a°. Тогда если производная f' меняет знак при переходе через a, то a — точка экстремума:*

строгого минимума, если f' меняет знак "с $-$ на $+$",

строгого максимума, если f' меняет знак "с $+$ на $-$".

Доказательство. Пусть, например, f' меняет знак "с $-$ на $+$". Тогда для некоторой окрестности U_a°

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) > 0, \quad \xi \in (x, a) \cap U_a,$$

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) < 0 \quad \xi \in (a, x) \cap U_a.$$

по теореме 4.6. □

Теорема 4.16 *Пусть функция f дифференцируема в точке a n раз, $n \in \mathbb{N}$, причем*

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда

1) если n четное, то a — точка строгого максимума при $f^{(n)}(a) < 0$ и a точка строгого минимума при $f^{(n)}(a) > 0$,

2) если n нечетное, то a не является точкой экстремума.

Доказательство. По формуле Тейлора с остатком Пеано (теорема 4.10)

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \alpha(x)(x-a)^n,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Поэтому найдется такая окрестность U_a, что

$$\operatorname{sign}\left[f^{(n)}(a) + \alpha(x)\right] = \operatorname{sign}\left[f^{(n)}(a)\right], \quad x \in U_a^\circ.$$

Следовательно, если n четное, то

$$\operatorname{sign}[f(x) - f(a)] = \operatorname{sign} f^{(n)}(a).$$

Если n нечетное, то $(x-a)^n$ меняет знак при переходе через a, а тогда и $f(x) - f(a)$ меняет знак при переходе через a. □

5.3. Поиск глобальных экстремумов

Пусть функция $f \in C[a, b]$. Рассмотрим задачу отыскания величин

$$m = \inf f([a, b]), \quad M = \sup f([a, b]),$$

которые существуют по теореме 3.4.

Если f дифференцируема на (a, b), то удобно пользоваться следующим алгоритмом:

1) найти все стационарные точки функции (то есть решения уравнения $f'(a) = 0$),

2) найти значения функции в стационарных точках,

3) найти значения $f(a)$ и $f(b)$,

4) среди найденных значений функции выбрать наименьшее и наибольшее — это и будут m и M.

Если нетрудно определить, какие из стационарных точек являются экстремумами, то в 2) достаточно искать значения лишь в точках экстремума.

Выгода в использовании такого алгоритма состоит в том, что, как правило, приходится вычислять значения функции в небольшом количестве точек.

§ 6. Выпуклые функции

6.1. Определение выпуклости

Если $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in (0, 1)$, то число $(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$ называется **выпуклой комбинацией** точек x_0 и x_1.

Множество

$$\{(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 : \lambda \in (0, 1)\}$$

всех выпуклых комбинаций — это интервал (x_0, x_1). Выпуклые комбинации участвуют ниже в определении выпуклой функции.

Определение 4.6 *Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется **выпуклой** на (a, b), если для любых $a < x_0 < x_1 < b$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ выполнено неравенство выпуклости*

$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \leqslant (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1). \tag{4.20}$$

*Если это неравенство — строгое, то f называется **строго выпуклой** на (a, b).*

Если знаки неравенств изменить на противоположные, то получим двойственные определения.

Определение 4.7 *Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется* ***вогнутой*** *на (a, b), если для любых $a < x_0 < x_1 < b$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ выполнено неравенство выпуклости*

$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \geqslant (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1). \tag{4.21}$$

Если это неравенство строгое, то f называется ***строго вогнутой*** *на (a, b).*

Ясно, что достаточно изучать либо выпуклые функции, либо вогнутые, так как изучение одних сводится к изучению других. Мы рассматриваем ниже только выпуклые функции.

Геометрически выпуклость означает, что для любых точек $a < x_0 < x_1 < b$ отрезок, соединяющий точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$ графика функции, лежит не ниже (для строго выпуклой функции — выше) этого графика на (x_0, x_1).

Придадим условию (4.20) из определения несколько иную форму. Обозначим, $x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$ тогда

$$\lambda = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{4.22}$$

и λ можно исключить из (4.20), получая

$$f(x) \leqslant \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1). \tag{4.23}$$

Перепишем это неравенство в виде

$$\left[\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right] f(x) \leqslant \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

и сгруппируем значения функций с одинаковыми коэффициентами

$$\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}[f(x) - f(x_0)] \leqslant \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}[f(x) - f(x_0)]\,.$$

Сокращая на знаменатели и деля обе части на $(x_1 - x)(x - x_0)$, получим

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \tag{4.24}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4} \tag{4.25}$$

при любых $a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < b$.

Преобразуем далее неравенство (4.23) другим способом, записывая его сначала в виде

$$f(x) \leqslant \left[1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right] f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

а затем в виде

$$f(x) \leqslant \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) + \left[1 - \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\right] f(x_1).$$

Группируя здесь, как и при доказательстве (4.24), значения функции с одинакоывми коэффициентами, мы приходим к неравенствам

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \tag{4.26}$$

Полезно рассмотреть геометрический смысл неравенств (4.20) (4.26)

Конечно, для строгой выпуклости эквивалентные неравенства (4.20) (4.26) носят строгий характер.

Лемма 4.3 *Если функция f выпукла (строго выпукла) на (a, b), то для любого фиксированного $x \in (a, b)$ функция*

$$t \to \frac{f(x) - f(t)}{x - t}, \quad t \in (a, b), \quad t \neq x.$$

возрастет (строго возрастает).

Доказательство. Доказательство непосредственно вытекает из неравенств (4.26). □

6.2. Свойства выпуклых функций

Определение 4.8 *Односторонние пределы*

$$f'_{\pm}(a) - \lim_{x \to a \pm 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

будем называть односторонними производными функции в точке a ($f'_{-}(a)$ — левая производная, $f'_{+}(a)$ правая производная).

Из теоремы 2.23 вытекает, что существование $f'(a)$ равносильно существованию обеих односторонних производных $f'_{\pm}(a)$ и их равенству.

Кроме того, из существования односторонней производной вытекает соответствующая односторонняя непрерывность

Теорема 4.17 *Если функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ выпукла (строго выпукла) на (a, b), то*

1) для любого $x \in (a, b)$ существуют односторонние производные $f'_{\pm}(x)$,

2) для любых $a < x_1 < x_2 < b$ выполнены неравенства

$$f'_{-}(x_1) \leqslant f'_{+}(x_1) \leqslant f'_{-}(x_2) \leqslant f'_{+}(x_2),$$

в частности, односторонние производные $f'_{\pm}$ возрастают (строго возрастают) на (a, b), *3) производная $f'(x)$ существует всюду на (a,b), кроме, быть может, не более чем счетного множества точек, и f' возрастает (строго возрастает) на множестве существования,*

4) f непрерывна на (a,b).

Доказательство. Существование односторонних производных $f'_\pm(x)$ следует непосредственно из леммы 4.3.

Неравенство $f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_1)$ вытекает из (4.24).

Для доказательства неравенства $f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2)$ с помощью (4.25) запишем

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \leqslant \frac{f(x_2-h)-f(x_2)}{-h}$$

с достаточно малым $h>0$ (в (4.25) надо заменить x_2 на x_1+h, x_3 на x_2-h, x_4 на x_2 соответственно) и совершим предельный переход при $h\to+0$.

По теореме 3.12 возрастающая функция f'_- имеет не более чем счетное множество точек разрыва первого рода. Если $x\in(a,b)$ — точка непрерывности для f'_- и $h>0$, то в силу уже доказанного утверждения 2)

$$f'_-(x) \leqslant f'_+(x) \leqslant f'_-(x+h)$$

и при $h\to 0$ получаем $f'_-(x)=f'_+(x)$, то есть x — точка дифференцируемости.

Непрерывность f слева и справа в каждой точке интервала (a,b) вытекает из односторонней дифференцируемости. □

Отметим, что выпуклая функция не обязана быть дифференцируемой всюду. Это показывает пример выпуклой функции $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$, не имеющей производной в точке 0.

6.3. Условия выпуклости

Выясним теперь каким образом можно проверять выпуклость функции. Из теоремы 4.17 вытекает, что возрастание производной (при условии ее существования) является необходимым для выпуклости функции. Обратное утверждение также верно, и мы приходим к следующему критерию выпуклости.

Теорема 4.18 *Пусть функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ дифференцируема на (a,b). Тогда*

1) f выпукла на $(a,b) \Longleftrightarrow f'$ возрастает на (a,b),

2) f строго выпукла на $(a,b) \Longleftrightarrow f'$ строго возрастает на (a,b).

Доказательство. Как только что отмечалось, утверждение 1) ⇒ 2) вытекает из части 2) теоремы 4.17.

Докажем обратное утверждение. Для этого обозначим для краткости $x_\lambda = (1-\lambda)x_0+\lambda x_1$ и запишем разность

$$\Delta = (1-\lambda)f(x_0)+\lambda f(x_1)-f(x_\lambda)$$

в виде

$$\Delta = (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) - [(1-\lambda) + \lambda]f(x_\lambda) =$$
$$= \lambda[f(x_1) - f(x_\lambda)] - (1-\lambda)[f(x_\lambda) - f(x_0)].$$

По формуле Лагранжа (4.10) найдутся точки $\xi_0 \in (x_0, x_\lambda)$ и $\xi_1 \in (x_\lambda, x_1)$, для которых

$$\Delta = \lambda(x_1 - x_\lambda)f'(\xi_1) - (1-\lambda)(x_\lambda - x_0)f'(\xi_0).$$

Как нетрудно видеть

$$x_1 - x_\lambda = (1-\lambda)(x_1 - x_0), \quad x_\lambda - x_0 = \lambda(x_1 - x_0),$$

Δ можно переписать в виде

$$\Delta = \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_0)[f'(\xi_1) - f'(\xi_0)].$$

Осталось воспользоваться возрастанием производной. □

Из теорем 4.18 и 4.14 получаем условия выпуклости в терминах второй производной.

Теорема 4.19 *Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема на (a, b). Тогда*

1) f выпукла на $(a, b) \iff f''(x) \geqslant 0$ на (a, b),

2) $f''(x) > 0$ на $(a, b) \Longrightarrow f$ строго выпукла на (a, b).

Утверждение, обратное к части 2) теоремы 4.19, неверно. Это показывает пример строго выпуклой функции $F(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, производная которой в точке 0 обращается в нуль.

Рекомендуем в качестве упражнения сформулировать и доказать аналоги всех утверждений этого параграфа для вогнутых функций.

6.4. Выпуклость элементарных функций

1) Знак выпуклости степенной функции $f_\alpha(x) = x^\alpha$, $x > 0$, зависит от показателя α:

— если $\alpha > 1$, то f_α строго выпукла на $(0, +\infty)$,

если $0 < \alpha < 1$, то f_α строго выпукла снизу на $(0, +\infty)$,

— если $\alpha < 0$, то f_α строго выпукла на $(0, +\infty)$.

2) Знак выпуклости логарифмической функции $f_a(x) = \log_a x$, $x > 0$, зависит от основания $0 < a \neq 1$:

— если $a > 1$, то f_a строго выпукла снизу на $(0, +\infty)$,

если $0 < a < 1$, то f_a строго выпукла на $(0, +\infty)$.

3) Показательная функция $f_a(x) = a^x$ является строго выпуклой на $\mathbb{R}$.

6.5. Некоторые полезные неравенства

Следующая теорема дает обобщение неравенства (4.20) из определения выпуклой функции.

Теорема 4.20 *Если функция f выпукла на (a, b), то для любых $x_k \in (a, b)$ $(k = 1, \ldots, n)$ и $\lambda_k \in (0, 1)$ $(k = 1, \ldots, n)$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, выполнено неравенство*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)\,. \tag{4.27}$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n, начиная со случая $n = 2$, который является определением выпуклости. Далее для выпуклой комбинации из $(n + 1)$ точки в силу предположения индукции, получаем

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f\left((1 - \lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \leqslant$$

$$(1 - \lambda_{n+1})\, f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant$$

$$(1 - \lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$$

и теорема доказана. □

Если $\lambda_k \in (0, 1)$ $(k = 1, \ldots, n)$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, то $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ называется **выпуклой комбинацией** точек x_k $(k = 1, \ldots, n)$ (это — обобщение понятия выпуклой комбинации на случай любого количества точек).

В таких терминах неравенство Йенсена (4.27) приобретает простую трактовку: значение выпуклой функции от любой выпуклой комбинации точек не превосходит соответствующей (с теми же коэффициентами) выпуклой комбинации значений функции в этих точках.

Примером применения неравенства Йенсена может служить **неравенство Юнга**

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \quad x_k > 0, \quad \lambda_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1. \tag{4.28}$$

Для доказательства надо использовать вогнутость функции $\ln x$:

$$\ln \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ln x_k = \ln \prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k}$$

При $\lambda_k = \frac{1}{n}$ $(k = 1\ \ldots, n)$ из неравенства Юнга получаем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad x_k > 0.$$

Далее с помощью неравенства Юнга мы докажем два важных и часто используемых неравенства. Если $p > 1$, то число p', определяемое равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \tag{4.29}$$

называется **сопряженным** к p. Очевидно, что $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Теорема 4.21 (неравенство Гельдера) *Пусть $p > 1$. Тогда для любых $x_k, y_k \geqslant 0$ $(k = 1, \dots, n)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} y_k x_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{4.30}$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство (4.30) при дополнительном предположении

$$X = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} = 1, \quad Y = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = 1. \tag{4.31}$$

Запишем неравенство Юнга при $n = 2$, $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{p'}$

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p'}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{p'},$$

возьмем здесь $a = x_k^p$ и $b = y_k^{p'}$ $(k = 1, \dots, n)$ и сложим полученные неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} y_k x_k \leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} x_k^p + \frac{1}{p'} \sum_{k=1}^{n} y_k^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

в силу (4.31).

Чтобы избавиться от предположения (4.31), надо применить уже доказанный случай к наборам $\frac{x_k}{X}$ и $\frac{y_k}{Y}$ (для них условие (4.31) выполнено). $\Box$

При $p = 2$ неравенство (4.30) называют неравенством Коши или неравенством Коши-Буняковского-Шварца.

Теорема 4.22 (неравенство Минковского) *Пусть $p \geqslant 1$. Тогда для любых $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots, n)$ справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.32}$$

Доказательство. При $p = 1$ доказательство сразу следует из неравенства треугольника.

Пусть $p > 1$. Сначала преобразуем выражение

$$S = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k| |x_k + y_k|^{p-1},$$

а затем применим к каждому слагаемому неравенство (4.30):

$$S \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Теперь надо вынести за скобки общий множитель справа и разделить на него обе части неравенства. □

Часть II

2 семестр

Глава 5

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл

1.1. Класс первообразных

Мы введем здесь понятие, обратное, в определенном смысле, к понятию производной функции. Пусть функции F и f заданы на интервале (a, b).

Определение 5.1 *Функция F называется* ***первообразной*** *для f на (a, b), если*

1) F дифференцируема на (a, b),

2) $\forall\, x \in (a, b) \quad F'(x) = f(x)$.

Подчеркнем, что зависимость понятия первообразной от рассматриваемого интервала (a, b) может оказаться существенной. Например, для любого интервала, не содержащего точку 0, функция $|x|$ является первообразной для функции $\operatorname{sign} x$ на этом интервале. С другой стороны, на любом интервале, содержащем точку 0, функция $\operatorname{sign} x$ не имеет первообразной на нем.

В приведенном примере условие 2) не выполняется во всех точках. Поэтому полезно слегка расширить понятие первообразной.

Определение 5.2 *Функция F называется* ***обобщенной первообразной*** *для f на (a, b), если*

1) F дифференцируема всюду на (a, b), кроме, быть может, конечного множества точек $E \subset (a, b)$,

2) $\forall\, x \in (a, b) \setminus E \quad F'(x) = f(x)$,

3) F непрерывна на (a, b).

На любом интервале, содержащем точку 0, функция $1/x$ не имеет даже обобщенной первообразной на нем. Это происходит потому, что "подходящая" для этого функция $\ln |x|$ не является непрерывной в точке 0.

Чаще всего ниже мы будем иметь дело с первообразной, чем с обобщенной первообразной. Тем не менее, рекомендуем следить за тем, остается ли справедливым то или иное утверждение для обобщенных первообразных.

Если функция f имеет первообразную F на (a, b), то, ясно, что для любой постоянной $C \in \mathbb{R}$ функция $x \mapsto F(x) + C$ также является первообразной для f.

Обратно, пусть F и Φ — две первообразные для f на (a, b). Обозначим $R(x) = F(x) - \Phi(x)$, тогда $R'(x) = 0$ на (a, b) и по теореме 4.6

$$R(x) - R(x_0) = R'(\xi)(x - x_0) = 0$$

и $R(x) \equiv R(x_0)$. Другими словами, любые две первообразные функции f отличаются на постоянную функцию.

Таким образом, класс всех первообразных функции f на (a, b) задается формулой $F + C$, где F — какая-нибудь первообразная для f на (a, b), а C — любая постоянная функция.

Определение 5.3 *Класс всех первообразных функции f на (a, b) называется неопределенным интегралом этой функции на (a, b) и обозначается*

$$\int f(x)\, dx \tag{5.1}$$

Таким образом,

$$\int f(x)\, dx = F + C,$$

где F — какая-нибудь первообразная для f, а C — любая постоянная функция.

Обозначение (5.1) для неопределенного интеграла будет объяснено значительно позже. Но уже скоро мы убедимся в том, что такое обозначение является очень удобным.

1.2. Свойства неопределенного интеграла

Если под производной неопределенного интеграла понимать производную любой функции из этого класса, то справедливо равенство

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f.$$

Кроме того, далее часто будет использоваться равенство двух первообразных. Оно всегда будет пониматься, как совпадение соответствующих множеств.

Следующая теорема вытекает непосредственно из определения первообразной и из свойства линейности производной (теорема 4.2).

Теорема 5.1 *1) Если функция f дифференцируема на (a, b), то ее производная f' имеет первообразную на (a, b) и*

$$\int f'(x)\, dx = f + C.$$

2) Если функции f и g имеют первообразные на (a, b), то их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) также имеет первообразную на (a, b) и

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

Мы оставим на некоторое время в стороне вопрос о том, при каких условиях функция имеет первообразную (позже мы вернемся к этому важному вопросу), а сейчас изучим основные технические методы нахождения неопределенного интеграла.

Сразу следует отметить, что операция нахождения неопределенного интеграла сложна уже потому, что первообразная элементарной функции не обязана быть элементарной функцией. При этом под элементарной функцией мы понимаем функции, полученные из функций

$$x^\alpha, \quad \log_a x, \quad a^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arctg} x \tag{5.2}$$

с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций. Примерами функций, первообразные которых не являются элементарными, могут служить уже такие простые, как

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad e^{-x^2}.$$

1.3. Таблица неопределенных интегралов

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$$

1.4. Основные методы интегрирования

Общих методов интегрирования немного. Здесь мы рассмотрим два важнейших из них. Они связаны с правилами дифференцирования сложной функции и произведения.

Теорема 5.2 (интегрирование по частям) *Если функции u, v имеют непрерывные производные на (a, b), то uv' и $u'v$ имеют первообразные на (a, b) и*

$$\int u(x)v'(x)\, dx = uv - \int u'(x)v(x)\, dx. \tag{5.3}$$

Доказательство. Существование первообразных для функций uv' и $u'v$ мы отложим до следующей главы, где будет доказано, что любая непрерывная функция имеет первообразную.

Формула (5.3) вытекает непосредственно из правила дифференцирования произведения (теорема 4.2). □

Теорема 5.3 (замена переменной) *Пусть функция F является первообразной для f на (a, b) и функция $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$, причем $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$. Тогда $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ имеет первообразную на (α, β) и*

$$\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = F \circ \varphi + C \tag{5.4}$$

Доказательство. Доказательство сразу следует из правила дифференцирования сложной функции (теорема 4.3). □

Формулу чаще записывают в таком виде

$$\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int f(x)\, dx$$

и применять ее можно двумя способами: "слева направо" и "справа налево". При применении "слева направо" ее называют формулой подстановки, при этом найдя первообразную для f, следует вернуться к "старой" переменной t. При использовании этого равенства "справа налево" его называют формулой замены переменной, тогда, найдя первообразную для $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, следует вернуться к переменной x.

§ 2. Определенный интеграл Римана

2.1. Математические задачи, приводящие к конструкции интеграла Римана

Сначала рассмотрим три задачи, имеющие различные цели, в каждой из которых появляется некоторая общая конструкция.

1) Задача нахождения первообразной. Пусть требуется вычислить значения первообразной в точке $x \in (a, b)$ для функции f. Для этого отметим некоторые точки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x$ и запишем

$$F(x) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} [F(x_k) - F(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

Точки ξ_k определяются по формуле Лагранжа (4.10), которая не дает способа их вычисления, а утверждает лишь существование. Поэтому мы можем ξ_k взять произвольно, но тогда нам выгоднее брать более мелкие разбиения интервала, так как точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ будут определяться точнее.

2) Задача определения пути. Пусть точка движется по числовой оси с мгновенной скоростью $v(t)$ и $s(t)$ — ее координата в момент времени t. Чтобы вычислить путь, пройденный за промежуток $[0, T]$, разобьем его на части точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Считая среднюю скорость на малом промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ примерно постоянной и беря в качестве ее приближенного значения $v(\tau_k)$, где $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, получим приближенное значение длины пути

$$s = \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)(t_k - t_{k-1})\,.$$

Такой способ рассуждений кажется нам тем точнее, чем мельче мы разбиваем отрезок$[0, T]$.

3) Задача определения площади криволинейной трапеции. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная положительная функция f. Для вычисления площади криволинейной трапеции

$$\{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b$ и заменим суммой площадей прямоугольников

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,,$$

где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

Наше интуитивное представление о площади требует измельчения разбиения отрезка $[a, b]$, для того чтобы последнее равенство было точнее. Такой способ вычисления площади впервые применил Архимед (метод исчерпывания Архимеда), который рассматривал случай $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.

2.2. Определение интеграла Римана

Пусть задан отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.

Определение 5.4 ***Разбиением*** *отрезка называется любой упорядоченный набор различных точек из этого отрезка, включающий его концы:*

$$\Pi : a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b.$$

Рангом разбиения *называется число*

$$\lambda = \lambda_\Pi = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (x_k - x_{k-1})\,.$$

Разбиение отрезка $[a,b]$ дает его представление в виде объединения

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k]\,.$$

Отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$ будем называть **частичными**. Ранг разбиения характеризует степень измельчения отрезка точками разбиения.

Определение 5.5 *Если задано разбиение* Π *отрезка* $[a,b]$ *и на каждом частичном отрезке зафиксирована точка*

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\,, \quad k = 1, \ldots, n,$$

то обозначим $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n)$ *и пару* (Π, ξ) *назовем* ***разбиением с отмеченными точками***.

Определение 5.6 *Пусть задана функция* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *и разбиение* (Π, ξ) *отрезка* $[a,b]$ *с отмеченными точками, то сумма*

$$s = s_f(\Pi, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{5.5}$$

называется ***интегральной суммой*** *(Римана) функции* f, *соответствующей разбиению* (Π, ξ).

Определение 5.7 (основное) *Пусть функция* f *задана на отрезке* $[a,b]$. *Число* I *называется* ***пределом интегральных сумм***, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \Longrightarrow |s_f(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon. \tag{5.6}$$

Краткая запись этого: $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} s$.

Если такой предел существует, то он называется ***определенным интегралом (Римана)*** *функции* f *по отрезку* $[a,b]$ *и обозначается*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f\,dx. \tag{5.7}$$

В этом случае говорим также, что функция f ***интегрируема (по Риману)*** *на* $[a,b]$.

Класс всех интегрируемых на $[a,b]$ *функций обозначаем* $R[a,b]$.

В обозначении определенного интеграла (5.7) a называется **нижним пределом интегрирования** , b — **верхним пределом интегрирования**, f — **подинтегральной функцией** и $f(x)\,dx$ — **подинтегральным выражением**.

Замечание 5.1 Если функция не является ограниченной на $[a, b]$, то при фиксированном разбиении интегральная сумма может быть сделана сколь угодно большой за счет выбора одной из отмеченных точек. Поэтому в таком случае предел интегральных сумм не существует и неограниченные функции не входят в класс $R[a, b]$.

Другими словами, ограниченность функции f на $[a, b]$ является необходимым условием интегрируемости. Но достаточным условием оно не является. Это показывает пример функции Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{при} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}. \tag{5.8}$$

При любом фиксированном разбиении Π отрезка $[0, 1]$ будет $s_D(\Pi, \xi) = 1$, если $\xi_k \in \mathbb{Q}$ и $s_D(\Pi, \xi) = 0$, если $\xi_k \notin \mathbb{Q}$. Следовательно, ограниченная функция Дирихле не является интегрируемой на $[0, 1]$.

§ 3. Условия существования интеграла

В этом параграфе мы изучим условия, которые следует налагать на функцию, чтобы она была интегрируемой. Для этого нам понадобятся некоторые специальные понятия.

3.1. Суммы Дарбу и их свойства

Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена на $[a, b]$.

Определение 5.8 *Пусть* Π *— произвольное разбиение отрезка* $[a, b]$. *Величины*

$$s_*(\Pi) = \inf_{\xi} s(\Pi, \xi), \quad s^*(\Pi) = \sup_{\xi} s(\Pi, \xi) \tag{5.9}$$

называются соответственно ***нижней и верхней суммами Дарбу*** *для* f, *отвечающими заданному разбиению* Π.

Подчеркнем, что суммы Дарбу определены корректно лишь для ограниченных функций.

При заданном разбиении Π суммы Дарбу показывают возможную степень разброса интегральных сумм, получаемую за счет свободы в выборе отмеченных точек ξ_k (ниже мы придадим этому высказыванию точный смысл).

Суммы Дарбу не являются, вообще говоря, интегральными суммами. Но если функция непрерывна на $[a, b]$, то с помощью теоремы Вейерштрасса о достижении точных границ (теорема 3.5) можно показать, что суммы Дарбу являются интегральными суммами, соответствующими некоторому выбору отмеченных точек.

Нетрудно показать, что суммы Дарбу можно записать в виде, близком к виду интегральных сумм:

$$s_*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \quad s^*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}), \tag{5.10}$$

где

$$m_k = \inf f([x_{k-1}, x_k]), \quad M_k = \sup f([x_{k-1}, x_k]). \tag{5.11}$$

Пусть еще

$$\omega_k = M_k - m_k \tag{5.12}$$

— колебание функции f на k-м частичном отрезке. Обозначениями (5.11) и (5.12) мы будем пользоваться систематически.

Лемма 5.1 *Пусть функция f ограничена на $[a, b]$. Тогда*

1) $s_*(\Pi) \leqslant s(\Pi, \xi) \leqslant s^*(\Pi)$ для любого разбиения с отмеченными точками (Π, ξ),

2) если $\Pi \subset \Pi'$, то $s_*(\Pi) \leqslant s_*(\Pi')$, $s^*(\Pi') \leqslant s^*(\Pi)$,

3) $s_*(\Pi) \leqslant s^*(\Pi')$ для любых разбиений Π и Π'.

Доказательство. Свойство 1) вытекает непосредственно из определения 5.8.

Свойство 2) достаточно доказать в предположении, что разбиение Π' получается из разбиения Π добавлением одной точки $x \in [x_{l-1}, x_l]$ с некоторым $1 \leqslant l \leqslant n$. При этом мы ограничимся рассмотрением только нижних сумм Дарбу.

Если $m_l' = \inf f([x_{l-1}, x])$ и $m_l'' = \inf f([x, x_l])$, то

$$s_*(\Pi') - s_*(\Pi) = m_l'(x - x_{l-1}) + m_l''(x_l - x) - m_l(x_l - x_{l-1}) \geqslant$$

$$\geqslant m_l(x - x_{l-1} + x_l - x - x_l + x_{l-1}) = 0,$$

так как $m_l' \geqslant m_l$ и $m_l'' \geqslant m_l$.

Для доказательства 3) рассмотрим новое разбиение $\Pi \cup \Pi'$ и используем уже доказанное свойство 2):

$$s_*(\Pi) \leqslant s_*(\Pi \cup \Pi') \leqslant s^*(\Pi \cup \Pi') \leqslant s^*(\Pi'). \quad \square$$

Замечание 5.2 Отметим, для дальнейшего, что если $\Pi \subset \Pi'$, то

$$s_*(\Pi') - s_*(\Pi) \leqslant \Omega l, \quad s^*(\Pi) - s^*(\Pi') \leqslant \Omega l, \tag{5.13}$$

где l — сумма длин частичных отрезков разбиения Π', содержащих точки из Π, и Ω — колебание функции на отрезке $[a, b]$. Это легко усмотреть из доказательства леммы 5.1.

3.2. Интегралы Дарбу

Определение 5.9 *Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, то числа*

$$I_* = \sup_{\Pi} s_*(\Pi), \quad I^* = \inf_{\Pi} s^*(\Pi) \tag{5.14}$$

называются соответственно ***нижним и верхним интегралами Дарбу*** *функции f на отрезке $[a, b]$.*

Лемма 5.2 *Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, то для любых разбиений Π и Π'*

$$s_*(\Pi) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant s^*(\Pi').$$

Доказательство. Это сразу следует из части 3) леммы 5.1, надо перейти сначала к точной верхней грани по всем разбиениям Π, а затем — к точной нижней грани по всем разбиениям Π'. $\Box$

Лемма 5.3 *Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, то*

$$I_* = \lim_{\lambda \to 0} s_*(\Pi), \quad I^* = \lim_{\lambda \to 0} s^*(\Pi).$$

Доказательство. Докажем, например, первое равенство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем разбиение Π_ε так, чтобы $s_*(\Pi_\varepsilon) > I_* - \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть разбиение Π_ε содержит n_ε точек (не считая точки a и b). Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon \Omega}$ и возьмем любое разбиение Π, для которого $\lambda_\Pi < \delta$. Тогда в силу неравенства (5.13)

$$s_*(\Pi \cup \Pi_\varepsilon) - s_*(\Pi) < \Omega \lambda_\Pi n_\varepsilon.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant I_* - s_*(\Pi) = I_* - s_*(\Pi \cup \Pi_\varepsilon) + s_*(\Pi \cup \Pi_\varepsilon) - s_*(\Pi) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + [s_*(\Pi \cup \Pi_\varepsilon) - s_*(\Pi)] \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \Omega \lambda_\Pi n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \Box$$

3.3. Условия интегрируемости

Теорема 5.4 (критерий интегрируемости) *Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, то следующие условия равносильны*
i) f интегрируема на $[a, b]$,
ii) $\lim\limits_{\lambda \to 0} [s^*(\Pi) - s_*(\Pi)] = 0$,
iii) $I_* = I^*$.

Доказательство. $i) \Longrightarrow ii)$ Пусть I — интеграл функции f. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ так, чтобы для любого разбиения с отмеченными точками (Π, ξ), $\lambda_\Pi < \delta$, выполнялись неравенства

$$-\frac{\varepsilon}{2} < s(\Pi, \xi) - I < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Переходя здесь к $\sup\limits_{\xi}$ и к $\inf\limits_{\xi}$, получим неравенства

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant s^*(\Pi) - I \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad -\frac{\varepsilon}{2} \leqslant s_*(\Pi) - I \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

для любого разбиения Π с $\lambda_\Pi < \delta$. Из этих неравенств вытекает, что

$$-\varepsilon \leqslant s^*(\Pi) - s_*(\Pi) \leqslant \varepsilon.$$

Это и означает, что выполнено ii).

ii) $\Longrightarrow$ *iii)* Это утверждение вытекает непосредственно из леммы 5.2:

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant s^*(\Pi) - s_*(\Pi) \to 0 \quad (\lambda_\Pi \to 0)\,.$$

iii) $\Longrightarrow$ *i)* Пусть $I = I_* = I^*$ — общее значение интегралов Дарбу. Тогда неравенства

$$s(\Pi, \xi) - I \leqslant s^*(\Pi) - I^*, \quad s(\Pi, \xi) - I \geqslant s_*(\Pi) - I_*$$

и лемма 5.3 дают i). Теорема доказана полностью. □

Условие ii) теоремы 5.4 можно переписать в виде

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k (x_k - x_{k-1}) = 0. \tag{5.15}$$

(см. обозначение (5.12)). Поэтому обычно его называют условием интегрируемости в терминах колебаний.

Замечание 5.3 В дополнение приведем еще доказательство импликации *ii)* $\Longrightarrow$ *i)*, не зависящее от леммы 5.3. Это понадобится нам позже при изучении интеграла Стилтьеса.

Если условие ii) выполнено, то в силу леммы 5.2 $I_* = I^*$и, если обозначить их общее значение I, то для любого разбиения Π выполнены неравенства $s_*(\Pi) \leqslant I \leqslant s^*(\Pi)$. Из неравенства 1) леммы 5.1 и условия ii) теперь следует, что $|s(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon$, если $s^*(\Pi) - s_*(\Pi) < \varepsilon$. Последнее же неравенство выполнено для всех разбиений Π, если λ_Π достаточно мало. Следовательно, I является пределом интегральных сумм $s(\Pi, \xi)$.

Теорема 5.5 (классы интегрируемых функций) *1) Если функция ограничена и имеет конечное число точек разрыва, то она интегрируема.*

2) Непрерывная функция интегрируема.

3) Монотонная функция интегрируема.

Доказательство. 1) Пусть $x_1, \ldots, x_N$ — точки разрыва функции f. Для $\varepsilon > 0$ положим $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{8\Omega N}$ и пусть U_i δ_1-окрестность точки x_i, $(i = 1, \ldots, N)$, а $X = [a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^{N} U_k$. Ясно, что X является объединением конечного числа отрезков. Так как f непрерывна на каждом из отрезков, образующих X, то она равномерно непрерывна на каждом из них, и, значит, равномерно непрерывна на X. Поэтому найдется такое $\delta_2 > 0$, что для любого отрезка $\Delta \subset X$ с длиной, не превосходящей δ_2, выполнено неравенство

$$\omega(\Delta) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и пусть Π — любое разбиение, для которого $\lambda_\Pi < \delta$. Пусть еще

$$A = \{k : 1 \leqslant k \leqslant n, [x_{k-1}, x_k] \subset X\} \qquad B = \{1, \ldots, n\} \setminus A.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k \in A} + \sum_{k \in B} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k \in A} (x_k - x_{k-1}) + \Omega \sum_{k \in B} (x_k - x_{k-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \Omega(\delta + 2\delta_1 + \delta)\, N = \varepsilon.$$

2) Это вытекает непосредственно из 1).

3) Для $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \frac{\varepsilon}{\Omega}$. Тогда если $\lambda_\Pi < \delta$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k (x_k - x_{k-1}) < \delta \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \delta\Omega = \varepsilon. \square$$

§ 4. Свойства определенного интеграла

4.1. Линейность

Теорема 5.6 (линейность интеграла) *Если функции f, g интегрируемы на $[a, b]$, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a, b]$ и справедливо равенство*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx. \tag{5.16}$$

Доказательство. Запишем интегральные суммы для любого разбиения с отмеченными точками (Π, ξ)

$$\sum_{k=1}^{n} [\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)](x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

В силу интегрируемости функций f и g существует предел правой части, поэтому существует и предел левой части. Это означает интегрируемость линейной комбинации. Для доказательства (5.16) в последнем равенстве надо перейти к пределу при $\lambda_\Pi \to 0$. $\square$

4.2. Аддитивность

Теорема 5.7 (аддитивность интеграла) *1) Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ она интегрируема на $[\alpha, \beta]$.*

2) Если $c \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5.17}$$

Доказательство. Если Π — любое разбиение $[\alpha, \beta]$, то его можно "достроить" до разбиения P отрезка $[a, b]$ с тем же рангом. Следовательно,

$$s^*(\Pi, [\alpha, \beta]) - s_*(\Pi, [\alpha, \beta]) \leqslant s^*(P, [a, b]) - s_*(P, [a, b])$$

и утверждение 1) следует из критерия интегрируемости.

Для доказательства равенства (5.17) надо записать интегральные суммы, включив точку c в разбиение

$$\Pi : a = x_0 < \ \dots \ < x_i = c < \ \dots \ < x_n = b.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{i} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=i+1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

и интегральные суммы сходятся к соответствующим интегралам из (5.17). □

4.3. Интеграл по ориентированному промежутку

Сейчас удобно ввести следующее соглашение.

Определение 5.10 *Если $a > b$ и функция f интегрируема на $[b, a]$, то положим*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, .$$

Кроме того, пусть

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

При таком соглашении равенство (5.17) остается справедливым при любом расположении точек a, b и c друг относительно друга, лишь бы f была интегрируема на отрезке, содержащем все эти точки.

Теорема 5.8 (монотонность интеграла) *Если функции f, g интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \leqslant g(x)$ при $x \in [a, b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \tag{5.18}$$

Доказательство. Доказательство получается предельным переходом в неравенстве

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \,.\square$$

Свойство монотонности является очень важным, несмотря на его простоту. В следующем параграфе мы придадим этому свойству ряд других форм, которые будут полезны при использовании интеграла в различных вопросах.

§ 5. Теоремы о среднем значении

5.1. Неравенства для интеграла

Одним из важнейших свойств интеграла является возможность получения оценок для него. Первичным в этом смысле является свойство монотонности (теорема 5.8). Исходя из него, мы получим сейчас ряд так называемых теорем о среднем значении, которые и позволят нам успешно проводить оценки интегралов. Начнем с простого следствия из свойства монотонности.

Теорема 5.9 *Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то*
1) если $f(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

2) если $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $[a,b]$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

3) $|f|$ интегрируема на $[a,b]$ и справедливо неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказательство. Утверждения 1) и 2) вытекают из предыдущей теоремы непосредственно. Интегрируемость модуля вытекает из критерия интегрируемости (теорема 5.4 и (5.15)) и неравенства

$$\omega_{|f|}(\Delta) \leqslant \omega_f(\Delta)$$

(см. еще (3.4)). Наконец, предельный переход в неравенстве

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|(x_k - x_{k-1})$$

дает неравенство утверждения 3). $\square$

5.2. Непрерывность интеграла с переменным пределом

Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то по теореме 5.7 она интегрируема также на любом отрезке $[a,x] \subset [a,b]$, $x \in [a,b]$. Следовательно, в таком случае определена новая функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b], \tag{5.19}$$

которая называется **интегралом с переменным верхним пределом** для f. Из теоремы 5.9 мы можем вывести свойство непрерывности этой функции.

Теорема 5.10 *Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то ее интеграл с переменным верхним пределом (5.19) непрерывен на $[a,b]$.*

Доказательство. Так как $f \in R[a,b]$, то f ограничена на $[a,b]$ и существует такое M, что $|f| \leqslant M$ на $[a,b]$. Поэтому, используя теорему 5.7, получаем для любых $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_a^{x_2} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt\right| \leqslant M(x_2 - x_1).$$

Таким образом мы показали даже, что $F \in H^1$ (см (3.6)). $\square$

5.3. Первая теорема о среднем

Теорема 5.11 (первая теорема о среднем) *Пусть функции f, g интегрируемы на $[a,b]$, g сохраняет знак на $[a,b]$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M$ при $x \in [a,b]$. Тогда существует такое число $\mu \in [m,M]$, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

В частности, если $f \in C[a,b]$, то существует точка $\xi \in [a,b]$, для которой

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx$$

Доказательство. Пусть, например, $g(x) \geqslant 0$. Тогда для любого разбиения (Π, ξ) с отмеченными точками выполнено неравенство

$$m\sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leqslant M\sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Переходя здесь к пределу, получаем

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Если интеграл от функции g равен нулю, можно взять любое μ. Иначе обе части последнего неравенства можно разделить на интеграл от g.

В случае, когда f непрерывна на $[a,b]$ надо воспользоваться теоремой Больцано-Коши о промежуточных значениях (см. теорему 3.7). $\square$

Беря в теореме 5.11 $g(x) \equiv 1$, получаем следующее.

Следствие 5.1 *Если $f \in C[a,b]$, то существует точка $\xi \in [a,b]$, для которой*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Теоремы, приведенные выше в этом параграфе, дают различные неравенства или представления для величины

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.20}$$

Она имеет специальное название — **среднее значение** функции f на отрезке $[a,b]$.

5.4. Вторая теорема о среднем (формулы Бонне)

Теорема 5.12 (вторая теорема о среднем) *Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$. Тогда*

1) если функция g неотрицательна и убывает на $[a,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx,$$

2) если функция g неотрицательна и возрастает на $[a,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

3) если функция g монотонна на $[a,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{5.21}$$

Доказательство. 1) Для доказательства возьмем любое разбиение Π и рассмотрим

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x)-g(x_{k-1})]\,dx \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Вторая из этих сумм Σ_2 оценивается следующим образом

$$|\Sigma_2| \leqslant M[f] \sum_{k=1}^{n} \omega_k(g)(x_k - x_{k-1}) \to 0,$$

если $\lambda_\Pi \to 0$. Конечно, здесь были использованы часть 2) теоремы 5.5 и критерий интегрируемости (теорема 5.4).

Для оценки первой суммы Σ_1 преобразуем ее, используя обозначение (5.19) и свойство аддитивности (теорема 5.7)

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})[F(x_k) - F(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})F(x_k) - \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})F(x_{k-1}) =$$

$$= F(b)g(x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)[g(x_{k-1}) - g(x_k)] - F(a)g(a) =$$

$$= F(b)g(x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)[g(x_{k-1}) - g(x_k)]\,.$$

Отсюда и из предположений о функции g вытекают неравенства

$$mg(a) \leqslant \Sigma_1 \leqslant Mg(a),$$

где $m = \inf F([a,b])$, $M = \sup F([a,b])$. Кроме того, так как $\lim\limits_{\lambda\to 0} \Sigma_2 = 0$, то, переходя к пределу в последнем неравенстве, получим

$$mg(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant Mg(a).$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из непрерывности F (теорема 5.10) и теоремы Больцано-Коши о промежуточных значениях (теорема 3.7).

2) Это утверждение доказывается точно так же, как и 1).

3) Если, например, функция g убывает, то надо применить часть 1) к функции $g - g(b)$ вместо g:

$$\int_a^b f(x)[g(x)-g(b)]\,dx = [g(a)-g(b)] \int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

Отсюда с помощью свойства аддитивности интеграла (теорема 5.7) выводим

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_a^b f(x)\,dx + g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx - g(b)\int_a^\xi f(x)\,dx =$$

$$= g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.\square$$

Равенство (5.21) часто называется **формулой Бонне**.

§ 6. Формула Ньютона-Лейбница

6.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом

Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$. Тогда, как отмечалось в предыдущем параграфе, определен интеграл с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b],$$

который является непрерывной функцией на $[a,b]$ по теореме 5.10.

Лемма 5.4 *Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$. Тогда ее интеграл с переменным верхним пределом F имеет производную в точке x_0 и*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Конечно, если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то в формулировке леммы речь идет об односторонней производной функции F. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ так, чтобы при $|t - x_0| < \delta$ выполнялось неравенство $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Тогда если $0 < h < \delta$, то

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt < \varepsilon.$$

Здесь последовательно использовались свойства аддитивности (теорема 5.7), линейности (теорема 5.6), неравенства 3) и 2) теоремы 5.9.

При $-\delta < h < 0$ рассуждение такое же. $\square$

Теорема 5.13 *Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то у нее существует первообразная на (a,b). Любая первообразная для f имеет вид*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C, \quad x \in [a,b],$$

где C — некоторая постоянная.

Доказательство. Это утверждение вытекает непосредственно из леммы 5.4 и описания класса первообразных, которое было дано в определении 5.3. □

Теорема 5.14 (формула Ньютона-Лейбница) *Если f функция непрерывна на $[a,b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) \equiv \Phi(x)|_a^b, \tag{5.22}$$

где Φ — любая первообразная для f.

Доказательство. По теореме 5.13 для любой первообразной Φ найдется такая постоянная C, что

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C, \quad x \in [a,b].$$

Для определения положим здесь $x = a$, тогда $C = \Phi(a)$ и

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \Phi(a), \quad x \in [a,b].$$

Положим здесь $x = b$ и получим (5.22). □

Отметим, что если функция f ограничена и имеет лишь конечное число точек разрыва на $[a,b]$, то для нее существует обобщенная первообразная (см. определение 5.2)— определенный интеграл с переменным верхним пределом (он непрерывен по теореме 5.10). Следовательно, для таких функций сохраняют силу с тем же доказательством как теорема 5.13, так и формула Ньютона-Лейбница (5.22).

Формула Ньютона-Лейбница 5.22 является основной для интегрального исчисления, так как она связывает понятия первообразной и определенного интеграла. Кроме того, ее важность обусловлена огромным количеством приложений.

§ 7. Основные методы интегрирования

Теорема 5.15 (интегрирование по частям) *Если функции u и v непрерывны и имеют непрерывные производные на $[a,b]$. Тогда*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx. \tag{5.23}$$

Доказательство. В силу формулы дифференцирования произведения (см. теорему 4.2)

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Поэтому, используя формулу Ньютона-Лейбница и свойство линейности интеграла (5.16), получаем

$$uv|_a^b = \int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b uv'\,dx + \int_a^b u'v\,dx.\Box$$

Как первое приложение формулы Ньютона-Лейбница укажем новую форму остатка для формулы Тейлора.

Теорема 5.16 (формула Тейлора) *Пусть функция f имеет $n+1$ непрерывную производную на отрезке $[a,x]^*$. Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \tag{5.24}$$

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f(t)\,dt.$$

Теперь последний интеграл надо проинтегрировать по частям n раз. $\Box$

Теорема 5.17 (замена переменной) *Пусть функция φ непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta]$, причем $\varphi([\alpha,\beta]) = [a,b]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда если функция f непрерывна на $[a,b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{5.25}$$

Доказательство. Пусть F — первообразная для f. Она существует по теореме 5.13. По формуле Ньютона-Лейбница

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Кроме того, по формуле дифференцирования композиции (4.4) функция $F\circ\varphi$ является первообразной для $f\circ\varphi\cdot\varphi'$ и снова по формуле Ньютона-Лейбница

$$F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Из этих двух равенств вытекает (5.25). $\Box$

§ 8. Приложения определенного интеграла

В настоящее время мы не располагаем достаточно общими определениями таких геометрических понятий, как длина, площадь, объем. Тем не менее, исходя из интуитивных представлений об этих понятиях, мы придем к некоторым формулам, выражающим эти понятия с помощью определенного интеграла. Их мы и будем использовать в качестве первичных определений. Позже вопросы измерения величин будут рассмотрены систематически и новые определения не будут противоречить старым.

8.1. Длина кривой

Пусть $\varphi, \psi \in C^1[\alpha, \beta]$. Тогда отображение

$$t \to (\varphi(t), \psi(t)) \quad (t \in [\alpha, \beta])$$

динамически описывает кривую на плоскости. Образ Γ отрезка $[\alpha, \beta]$ при таком отображении будем называть гладкой кривой, а пару функций (φ, ψ) параметризацией этой кривой.

Зададим произвольно разбиение $\Pi : \alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$ и найдем длину ломаной, вписанной в кривую в точках:

$$l(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} \left\{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2\right\}^{1/2}$$

Эта величина дает приближенное значение длины кривой, которое тем ближе к длине кривой (по нашим представлениям), чем меньше ранг разбиения. Преобразуем величину $l(\Pi)$:

$$l(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} \left\{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k')]^2\right\}^{1/2} (t_k - t_{k-1}),$$

где $\tau_k, \tau_k' \in [t_{k-1}, t_k]$ — некоторые отмеченные точки, определяемые по формуле Лагранжа. В таком виде $l(\Pi)$ напоминает интегральную сумму

$$s(\Pi, \tau) = \sum_{k=1}^{n} \left\{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2\right\}^{1/2} (t_k - t_{k-1})$$

для интеграла

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

С помощью элементарного неравенства $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$ легко оценить разность

$$|s(\Pi, \tau) - l(\Pi)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|[\psi'(\tau_k)]^2 - [\psi'(\tau_k')]^2\right|^{1/2} (t_k - t_{k-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \{2M(\psi')\,\omega(\lambda_\Pi, \psi')\}^{1/2}\,(\beta - \alpha) \to 0, \quad \lambda_\Pi \to 0.$$

Здесь $M(\psi') = \sup \psi'([\alpha, \beta])$. Определение модуля непрерывности см. п.2.4.

Таким образом, мы приходим к формуле для вычисления длины плоской кривой

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{5.26}$$

В частности, длина графика функции $f \in C^1[a, b]$ вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \tag{5.27}$$

Аналогично предыдущему можно определить длину пространственной кривой, задаваемой функциями $\varphi, \psi, \chi \in C^1[\alpha, \beta]$, как

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt. \tag{5.28}$$

8.2. Площадь криволинейной трапеции

Пусть $f \in C[a, b]$ — неотрицательная функция и

$$T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}.$$

Тогда площадь "криволинейной трапеции" T можно определить равенством

$$S(T) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.29}$$

Соображения, приводящие к этой формуле, описывались в п.2.1. Отметим, что если отказаться от требования неотрицательности функции f, то приходится считаться с тем, что "площади из нижней полуплоскости отрицательны".

Если заданы две функции $f_1, f_2 \in C[a, b]$, причем $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ $(x \in [a, b])$, то площадь множества

$$T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \quad f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\big\}$$

определяется равенством

$$S(T) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

Упражнение 5.1

1) Полярные координаты точки $(x, y) \neq (0, 0)$ на плоскости связаны с декартовыми равенствами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}. \tag{5.30}$$

Площадь криволинейного сектора

$$\{(\rho, \varphi) : \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\varphi)\}$$

($\rho \in C[\alpha, \beta]$ — положительная функция) вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

2) Площадь поверхности, полученной вращением графика положительной функции $f \in C^1[a, b]$ вокруг оси Ox вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\, dx.$$

3) Объем тела, полученного вращением графика положительной функции $f \in C[a, b]$ вокруг оси Ox вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

4) Более общий случай, чем в 3), получается, если нам известна площадь сечения $S(t)$ тела плоскостью $x = t$ и $S \in C[a, b]$. Тогда

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

§ 9. Несобственные интегралы

В этом параграфе мы покажем, каким образом можно расширить понятие интеграла, чтобы придать смысл интегралу от неограниченных функций и интегралу по неограниченному промежутку. Поскольку в обоих случаях мы будем исходить из одних и тех же идей, оба варианта будут рассмотрены одновременно.

9.1. Определение и свойства несобственного интеграла

Пусть на промежутке $[a, \omega)$ задана функция f. Здесь $\omega \in \mathbb{R}$ или $\omega = +\infty$. Условимся символ ω называть **особенностью** функции, если $\omega = +\infty$ или если $\omega \in \mathbb{R}$ и f не является ограниченной в любой проколотой окрестности точки ω.

Определение 5.11 *Если для любого $b \in (a, \omega)$ функция f интегрируема на $[a, b]$ и существует*

$$\lim_{b \to \omega -} \int_a^b f(x)\, dx,$$

то говорят, что f ***интегрируема в несобственном смысле*** *на $[a,\omega)$, а этот предел называется* ***несобственным интегралом*** *f на $[a,\omega)$ и обозначается*

$$\int_a^\omega f(x)\,dx. \tag{5.31}$$

В этом случае также говорят, что несобственный интеграл сходится.

Для того, чтобы подчеркнуть о каком виде особенности идет речь используют обычно следующую терминологию. Несобственный интеграл с особенностью $\omega = +\infty$ (или $\omega = -\infty$) называют несобственным интегралом **первого рода**, а интеграл с особенностью $\omega \in \mathbb{R}$ называют несобственным интегралом **второго рода**.

Отметим, что если $\omega \in \mathbb{R}$ и функция f интегрируема на $[a,\omega]$, то она интегрируема на $[a,\omega]$ также в несобственном смысле. Это вытекает из того, что тогда она ограничена на $[a,\omega]$ и в силу части 3) теоремы 5.9

$$\lim_{b\to\omega-}\int_b^\omega f(x)\,dx = 0.$$

В частности, не возникнет путаницы из-за того, что мы используем одно и то же обозначение для интеграла Римана и для несобственного интеграла.

Класс функций, интегрируемых в несобственном смысле на $[a,\omega]$, будем обозначать $R_*[a.\omega)$. Предыдущее замечание можно переформулировать так: если $\omega \in \mathbb{R}$, то

$$R[a.\omega] \subset R_*[a,\omega).$$

Для несобственного интеграла сохраняют силу основные свойства определенного интеграла.

Теорема 5.18 (свойства несобственного интеграла)

1) Несобственный интеграл обладает свойствами линейности, аддитивности и монотонности,

2) если функции u, v непрерывны, имеют непрерывные производные на $[a,\omega)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to\omega-0} u(x)v(x)$, то функции $u'v$ и uv' принадлежат или не принадлежат классу $R_*[a,\omega)$ одновременно, и

$$\int_a^\omega u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^{\omega-0} - \int_a^\omega u'(x)v(x)\,dx$$

(если $u'v, uv' \in R_*[a,\omega)$),

3) если $f \in R_*[a,\omega)$ и функция $\varphi \in C^1[\alpha,\gamma)$ строго монотонна, $\varphi(\alpha) - a$, $\lim\limits_{t\to\gamma-0}\varphi(t) = \omega$, то $f\circ\varphi\cdot\varphi' \in R_*[\alpha,\gamma)$ и

$$\int_a^\omega f(x)\,dx \qquad \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство. Все утверждения вытекают непосредственно из определения несобственного интеграла и соответствующих свойств интеграла Римана (см. теоремы 5.6, 5.7, 5.8, 5.15, 5.17). $\square$

9.2. Другие виды особенностей

Выше было дано определение несобственного интеграла, если "правый край" промежутка являлся особенностью функции. Изменения, которые следует сделать для рассмотрения случая, когда "левый край" являлся особенностью, очевидны. Мы не будем на этом останавливаться.

Если функция имеет несколько особенностей на промежутке интегрирования, то при определении интеграла следует исходить из принципа "разделения особенностей". Например,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если f не является ограниченной в любой окрестности внутренней точки $\omega \in (a,b)$ промежутка интегрирования, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\omega f(x)\,dx + \int_\omega^b f(x)\,dx.$$

Аналогично поступают, когда на (a,b) имеется любое конечное число особенностей функции.

Иногда, впрочем, используют следующий способ определения несобственного интеграла с "внутренней особенностью": если $\omega \in (a,b)$ — особенность функции, то полагают

$$v.p. \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_a^{\omega-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\omega+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right]$$

Такой несобственный интеграл называют интегралом в смысле **главного значения по Коши**. Его использование всегда оговаривается особо.

9.3. Условия сходимости несобственного интеграла

Определение сходимости несобственного интеграла (5.31) означает существование предела слева в точке ω для интеграла с переменным верхним пределом от f. Поэтому из критерия Коши существования предела функции сразу вытекает критерий сходимости для несобственного интеграла.

Теорема 5.19 (критерий Коши) *Пусть функция $f \in R_*[a,b)$ при любом $b \in (a,\omega)$. Тогда следующие условия равносильны*

i) $\int_a^\omega f(x)\,dx$ *сходится,*

ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b_\varepsilon \in (a,\omega) \quad \forall b_1, b_2 \in (b_\varepsilon,\omega) \quad \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$

Определение 5.12 *Будем говорить, что несобственный интеграл (5.31) **сходится абсолютно**, если сходится интеграл $\int_a^\omega |f(x)|\,dx$.*

*Будем говорить, что несобственный интеграл (5.31) **сходится условно**, если $\int_a^\omega f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int_a^\omega |f(x)|\,dx$ расходится.*

Из части 3) теоремы 5.9 и из теоремы 5.19 следует, что из абсолютной сходимости несобственного интеграла вытекает его сходимость. Обратное утверждение неверно.

Проверка абсолютной сходимости осуществляется весьма просто с помощью следующей теоремы.

Теорема 5.20 *Пусть функция f неотрицательна и $f \in R[a,b]$ при любом $b \in (a,\omega)$. Тогда следующие условия равносильны*

i) $\int_a^\omega f(x)\,dx$ сходится,

ii) функция $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ ограничена.

Доказательство. В самом деле, в силу неотрицательности f функция F возрастает и существование $\lim\limits_{x\to\omega-0} F(x)$ равносильно ее ограниченности (см. теорему 2.25). □

Теорема 5.21 (признак сравнения) *Пусть функции $f, g \in R[a,b]$ при любом $b \in (a,\omega)$ и $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ на $[a,\omega)$. Тогда*

1) из сходимости интеграла $\int_a^\omega g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^\omega f(x)\,dx$ и неравенство

$$\int_a^\omega f(x)\,dx \leqslant \int_a^\omega g(x)\,dx.$$

2) из расходимости интеграла $\int_a^\omega f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^\omega g(x)\,dx$.

Доказательство. Оба утверждения сразу следуют из предыдущей теоремы. □

Другими словами, теорему можно переформулировать так: интеграл (5.31) от неотрицательной функции сходится, если эта функция "не слишком велика".

Для условной сходимости значение имеют не только "размеры" функции, но и распределение ее положительных и отрицательных значений. Поэтому условия сходимости более сложны.

Теорема 5.22 (признак Абеля-Дирихле) *Пусть функция $f \in R[a,b]$ при любом $b \in (a,\omega)$ и g неотрицательна и монотонна на $[a,\omega)$. Тогда для сходимости интеграла $\int_a^\omega f(x)g(x)\,dx$ достаточно выполнения любой пары условий*

1) $\int_a^\omega f(x)\,dx$ сходится,

2) g ограничена

или

1)′ $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ограничена,

2)′ $\lim\limits_{x\to\omega-0} g(x) = 0$.

Доказательство. В обоих случаях доказательство проводим с помощью критерия Коши (теорема 5.19) и формул Бонне (теорема 5.12): если $a < b_1 < b_2 < \omega$, то существует точка $\xi \in (b_1, b_2)$, для которой

$$\int_{b_1}^{b_2} fg\,dx = g(b_1)\int_{b_1}^{\xi} f\,dx + g(b_2)\int_{\xi}^{b_2} f\,dx.$$

Рассмотрим, например, случай $\omega \in \mathbb{R}$. Если выполнены условия 1) и 2), то пусть $|g(x)| \leqslant M_g$ $(x \in (a, \omega))$ и $\delta > 0$ выбрано для $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\left|\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M_g} \quad \text{при} \quad (\omega - \delta < \beta_1 < \beta_2 < \omega).$$

Тогда при $\omega - \delta < b_1 < b_2 < \omega)$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} fg\,dx\right| \leqslant M_g\left|\int_{b_1}^{\xi} f\,dx\right| + M_g\left|\int_{\xi}^{b_2} f\,dx\right| < \varepsilon.$$

Аналогично рассуждаем при условиях $1)'$, $2)'$. □

9.4. Интегральный признак Коши сходимости рядов

Следующая теорема показывает, между сходимостью рядов и несобственных интегралов существует тесная связь.

Теорема 5.23 (интегральный признак Коши) *Пусть функция f положительна и убывает на $[1, \infty)$. Тогда следующие условия равносильны*

i) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится,

ii) несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Доказательство. Для доказательства надо суммировать очевидные неравенства

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$$

по $k = 2, \ldots, n$:

$$\int_2^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_1^{n} f(x)\,dx.$$

Наше утверждение вытекает из теоремы 5.20. □

Глава 6
ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Основные понятия топологии

1.1. Топология, открытые множества

Пусть X — произвольное множество и τ — семейство его подмножеств.

Определение 6.1 *τ называется **топологией** на X, если*
1) $X, \varnothing \in \tau$,
2) $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \tau \quad \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$,
3) $\forall \{G_k\}_{k=1}^{n} \subset \tau \quad \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k \in \tau$.

Определение 6.2 *Элементы топологии τ называются **открытыми** (τ-открытыми) множествами в X.*

Пара (X, τ) в таком случае называется **топологическим пространством** (иногда мы будем сокращать обозначение и писать просто X).

Определение 6.3 *Если (X, τ) — топологическое пространство и $X_1 \subset X$, то*

$$\tau_1 = \{G \cap X_1 : G \in \tau\}$$

*— топология на X_1, которая называется **индуцированной** топологией.*

*В этом случае говорят также, что (X_1, τ_1) — **подпространство** топологического пространства (X, τ).*

Множество E называется **открытым относительно** множества $X_1 \subset X$, если оно представимо в виде $E = X_1 \cap G$, где $G \subset X$ — некоторое открытое множество. Иначе это означает, что E открыто в индуцированной топологии на X_1.

Определение 6.4 ***Окрестностью** точки в топологическом пространстве (X, τ) называется любое открытое множество, содержащее эту точку.*

*Если $G \in \tau$ — окрестность точки $x \in X$, то $G^\circ = G \setminus \{x\}$ называется **проколотой** окрестностью этой точки.*

Ясно, что открытое множество является окрестностью любой своей точки. Окрестности точки $x \in X$ будем обозначать, как правило, U_x, V_x, ...

Определение 6.5 *Точка называется* ***внутренней*** *для множества $E \subset X$, если существует окрестность этой точки, содержащаяся в E. Множество всех внутренних точек множества E называется его* ***внутренностью*** *и обозначается* $\operatorname{int} E$.

$\operatorname{int} E$ — это наибольшее (по включению) открытое множество, содержащееся в E. Другими словами, это означает, что $\operatorname{int} E$ является объединением всех открытых множеств, содержащихся в E.

Очевидно, что множество является открытым тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью.

1.2. Замкнутые множества

Определение 6.6 *Точка $x \in X$ называется* ***предельной*** *для множества E, если в любой проколотой окрестности этой точки есть точки из E.*

Точка множества, которая не является предельной для него, называется ***изолированной*** *точкой множества.*

Иначе, это означает, что в любой окрестности точки x есть точки из E, отличные от x. Подчеркнем, что здесь не требуется принадлежности точки x множеству E.

Множество всех предельных точек для E обозначается E'.

Определение 6.7 *Множество называется* ***замкнутым****, если оно содержит все свои предельные точки.*

Теорема 6.1 (закон двойственности) *Пусть (X, τ) — топологическое пространство и $E \subset X$. Тогда следующие условия равносильны*

i) E замкнуто,

ii) E^c открыто.

Доказательство. Оба утверждения будут доказаны от противного.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Пусть множество E замкнуто, но некоторая точка $x \in E^c$ дополнения не является внутренней для него. Тогда в любой окрестности точки x есть точки из E, не совпадающие с x ($x \in E^c$!). Поэтому x — предельная точка для E и должно быть $x \in E$, хотя это не так.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Обратно, если E^c открыто, но некоторая предельная точка для E не принадлежит E, то $x \in E^c$ и она должна быть внутренней для E^c. А тогда x не является предельной для E. $\square$

Теорема 6.2 (свойства замкнутых множеств) *Пусть (X, τ) — топологическое пространство и $E \subset X$. Тогда*

1) $X, \varnothing$ замкнуты,

2) если $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — любое семейство замкнутых множеств, то их пересечение $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ замкнуто, *3) если $\{F_k\}_{k=1}^{n}$ — любое конечное семейство замкнутых множеств, то их объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ замкнуто.*

Доказательство. Все утверждения вытекают непосредственно из предыдущей теоремы и правил Де Моргана (см. п.1.5). $\square$

Определение 6.8 ***Замыканием*** *множества E называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих E. Обозначение для замыкания $\overline{E}$.*

Другими словами, $\overline{E}$ — наименьшее (по включению) замкнутое множество, содержащее E.

Теорема 6.3 $\overline{E} = E \cup E'$.

Доказательство. Сначала докажем, что множество $E \cup E'$ замкнуто. Для этого установим, что его дополнение $(E \cup E')^c$ открыто. Если $x \notin E \cup E'$, то $x \notin E$ и x не является предельной для E. Тогда в некоторой окрестности U_x точки x нет точек из E. Но в этой же окрестности U_x нет точек из E'. Следовательно, $U_x \subset (E \cup E')^c$ и x — внутренняя для $(E \cup E')^c$.

Далее отметим, что если $x \in E'$ и $F \supset E$, то $x \in F'$. Следовательно, если F замкнуто и $F \supset E$, то $F \supset F' \supset E'$. Поэтому $E \cup E'$, содержится в любом замкнутом множестве, содержащем E. Но по доказанному множество $E \cup E'$ замкнуто, значит, оно и является замыканием E. $\square$

1.3. Граница множества

Определение 6.9 ***Границей*** *множества E в топологическом пространстве называется множество*

$$\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}. \tag{6.1}$$

Точки, принадлежащие границе множества, называются ***граничными*** *точками для него.*

Легко видеть, что точка x является граничной тогда и только тогда, когда в любой окрестности этой точки есть точки из E и из E^c. В частности, для любого множества E

$$\partial E \cap (\operatorname{int} E) = \varnothing. \tag{6.2}$$

Теорема 6.4 (свойства границы) *Пусть (X, τ) — топологическое пространство и $E \subset X$. Тогда*

1) $\partial E = \partial E^c$,

2) $E = (\partial E \cap E) \cup (\operatorname{int} E)$,

3) $\overline{E} = \partial E \cup (\operatorname{int} E)$,

4) E замкнуто $\iff \partial E \subset E$,

5) E открыто $\iff E \cap \partial E = \varnothing$.

Доказательство. 1) Это свойство очевидно, так как E и E^c входят в определение границы (6.1) равноправно.

2) Включение $(\partial E \cap E) \cup (\operatorname{int} E) \subset E$ очевидно.

Обратно, если точка $x \in E$ не является внутренней для E, то в любой ее окрестности есть точки из дополнения E^c и $x \in \overline{E^c}$. Следовательно, $x \in \partial E$ и $E \subset (\partial E \cap E) \cup (\operatorname{int} E)$.

3) Ясно, что $\partial E \subset \overline{E}$ и $\operatorname{int} E \subset \overline{E}$, поэтому $\partial E \cup (\operatorname{int} E) \subset \overline{E}$.

Для доказательства обратного включения в силу 2) достаточно доказать, что $E' \subset \partial E \cup (\operatorname{int} E)$. Пусть $x \in E'$, тогда либо $x \in \operatorname{int} E$, либо в любой окрестности этой точки есть точки из E^c и $x \in \overline{E^c}$. Следовательно, $x \in \overline{E} \cap \overline{E^c} = \partial E$.

4) Если E замкнуто, то по определению границы $\partial E \subset \overline{E} = E$. Обратное утверждение вытекает из 3): если $\partial E \subset E$, то $\overline{E} = \partial E \cup (\operatorname{int} E) \subset E$. Итак, $\overline{E} \subset E$ и E замкнуто.

5) Это утверждение следует сразу из (6.2) и 2). □

1.4. Предел последовательности

Пусть (X, τ) — топологическое пространство.

Определение 6.10 *Последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется* ***сходящейся*** *(в топологии τ) к $a \in X$ (краткая запись $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), если*

$$\forall U_a \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad a_n \in U_a \tag{6.3}$$

В общем случае мы не можем гарантировать единственность предела последовательности.

Определение 6.11 *Топологическое пространство называется* ***хаусдорфовым*** *(или отделимым), если любые две его точки имеют не пересекающиеся окрестности.*

Легко видеть, что в хаусдорфовом пространстве предел последовательности определяется однозначно.

§ 2. Метрические и нормированные пространства

В этом параграфе мы рассмотрим наиболее часто встречающиеся способы задания топологии.

2.1. Метрическое пространство

Пусть X — произвольное множество.

Определение 6.12 *Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется* ***метрикой*** *на X, если для любых $x, y, z \in X$ выполнены условия*

1) $d(x, y) \geqslant 0$, $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

2) $d(x, y) = d(y, x)$ (симметричность),

3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (неравенство треугольника).

Число $d(x, y)$ называется ***расстоянием*** *между x и y.*

Пара (X, d) называется ***метрическим пространством.***

Примером метрического пространства может служить, конечно, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с расстоянием

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{6.4}$$

Это метрическое пространство мы будем обозначать так же, как и множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Определение 6.13 *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Если $x \in X$ и $r > 0$, то множество*

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \tag{6.5}$$

называется ***открытым шаром*** *с центром в точке x радиуса r.*

Определение 6.14 *Множество $E \subset X$ в метрическом пространстве X называется* ***открытым****, если для любой точки $x \in E$ существует шар с центром в этой точке, содержащийся в E.*

Теорема 6.5 *Семейство открытых множеств в метрическом пространстве образует топологию.*

Доказательство. Свойство 1) из определения очевидно.

Свойство 2) следует из транзитивности операции включения множеств: если $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство открытых множеств и $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$, то $x \in G_{\alpha_0}$ для некоторого $\alpha_0 \in A$. Так как открыто G_{α_0}, то найдется $r > 0$ такое, что $B(x, r) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$.

3) Если $\{G_k\}_{k=1}^n$ — конечный набор открытых множеств и $x \in \bigcap\limits_{k=1}^n G_k$, то для каждого $k = 1, \ldots, n$ точка $x \in G_k$ и существует такое $r_k > 0$, что $B(x, r_k) \subset G_k$. Положим $r = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} r_k > 0$. Тогда $B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset G_k$ для каждого $k = 1, \ldots, n$ и $B(x, r) \subset \bigcap\limits_{k=1}^n G_k$. $\square$

Упражнение 6.1

1) $B(x, r)$ — открытое множество.

2) Топология метрического пространства хаусдорфова (см. определение 6.11)

3) Точка $x \in X$ в метрическом пространстве является предельной для множества $E \subset X$ тогда и только тогда, когда существует последовательность попарно различных точек из E, сходящаяся к x.

4) Точка $x \in X$ в метрическом пространстве является предельной для множества $E \subset X$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки x бесконечно много точек из E.

2.2. Ограниченные множества

Определение 6.15 *Подмножество метрического пространства называется* ***ограниченным****, если оно содержится в некотором шаре.*

Определение 6.16 ***Диаметром*** *множества называется*

$$\operatorname{diam} E = \sup\{d(x,y) : x, y \in E\}\,.$$

Определение 6.17 *Если $x \in X$ и $E \subset X$, то*

$$\operatorname{dist}(x,E) = \inf_{y \in E} d(x,y). \tag{6.6}$$

называется ***расстоянием*** *от элемента x до множества E.*

Определение 6.18 *Если $x \in X$ и $r > 0$, то множество*

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leqslant r\} \tag{6.7}$$

называется ***замкнутым шаром*** *с центром в точке x радиуса r.*

Упражнение 6.2
1) $\overline{B}(x,r)$ — замкнутое ограниченное множество.
2) Для любых $x \in X$ и $r > 0$ $\operatorname{diam} B(x,r) \leqslant \operatorname{diam} \overline{B}(x,r) \leqslant 2r$.
3) E ограничено $\iff \operatorname{diam} E < \infty$.
4) $\operatorname{dist}(x,E) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \overline{E}$.

2.3. Полные метрические пространства

Определение 6.19 *Последовательность $\{x_n\} \subset X$ точек метрического пространства X называется* ***фундаментальной*** *или* ***последовательностью Коши****, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant N_\varepsilon \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{6.8}$$

Как и в случае $\mathbb{R}$ легко видеть, что сходящаяся последовательность является фундаментальной. Но обратное, вообще говоря, не верно. Например, если $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$ — интервал с обычным расстоянием, то последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ фундаментальна, но не является сходящейся в X.

Определение 6.20 *Метрическое пространство называется* **полным**, *если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.*

Критерий Коши (теорема 2.7) теперь может быть переформулирована так: метрическое пространство $\mathbb{R}$ полно.

Теорема 6.6 *Пусть X — метрическое пространство. Тогда следующие условия равносильны*

i) X полное пространство,

ii) для любой последовательности замкнутых шаров

$$\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \dots \overline{B}_n \supset \dots \quad (\overline{B}_n = \overline{B}(x_n, r_n)), \quad r_n \to 0,$$

существует точка $x \in X$, принадлежащая всем шарам.

Доказательство. $i) \Longrightarrow ii)$ Так как

$$d(x_n, x_m) < r_n \quad \text{при} \quad m > n \geqslant 1,$$

то последовательность центров $\{x_n\}$ фундаментальна и в силу полноты X существует $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Так как $x_k \in \overline{B}(x_n, r_n)$ при $k \geqslant n$, а шар $\overline{B}(x_n, r_n)$ замкнут, то $x \in \overline{B}(x_n, r_n)$ для каждого n.

$ii) \Longrightarrow i)$ Если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, то найдется такая последовательность номеров $\{n_k\}$, что

$$d(x_n, x_{n_k}) < 2^{-k} \quad \text{при} \quad n \geqslant n_k.$$

Пусть $\overline{B}_k = \overline{B}\big(x_{n_k}, 2^{1-k}\big)$. Так как при $d\big(x, x_{n_{k+1}}\big) \leqslant 2^{-k}$ выполнено неравенство

$$d(x, x_{n_k}) \leqslant d\big(x, x_{n_{k+1}}\big) + d\big(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}\big) \leqslant 2^{1-k},$$

то $\overline{B}_{k+1} \subset \overline{B}_k$ $(k \geqslant 1)$. В силу условия ii) существует $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k$. Тогда при $n \geqslant n_k$

$$d(x, x_n) \leqslant d(x, x_{n_k}) + d(x_n, x_{n_k}) \leqslant 2^{1-k} + 2^{-k} = 3 \cdot 2^{-k}$$

и $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. □

§ 3. d-мерное евклидово пространство

3.1. Линейное нормированное пространство

В следующем определении Λ будет обозначать либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, либо поле действительных чисел $\mathbb{R}$.

Определение 6.21 *Пусть X — векторное пространство над полем Λ.* ***Нормой*** *на X называется функция $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ со свойствами*

1) $\forall x \in X \quad \|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

2) $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (однородность),

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Пара $(X, \|\cdot\|)$ в таком случае называется ***линейным нормированным пространством.***

Каждое линейное нормированное пространство становится метрическим пространством, если в нем ввести метрику с помощью равенства

$$d(x, y) \quad \|x - y\| . \tag{6.9}$$

В частности, линейное нормированное пространство является топологическим пространством. Введенные таким образом метрика и топология называются стандартными.

3.2. Евклидовы пространства

Мы будем изучать конкретные линейные нормированные пространства, которые сейчас будут введены.

Определение 6.22 *Пусть $d \in \mathbb{N}$. Множество*

$$\mathbb{R}^d \quad \left\{x \quad \left(x^1, \ldots, x^d\right) : x^k \in \mathbb{R}, \quad k \quad 1, \ldots, d\right\} \tag{6.10}$$

всех упорядоченных наборов из d действительных чисел [1], являющееся векторным пространством над $\mathbb{R}$ относительно операций

$$x + y = \left(x^1 + y^1, \ldots, x^d + y^d\right), \quad \lambda x = \left(\lambda x^1, \ldots, \lambda x^d\right)$$

и нормированным пространством с нормой

$$\|x\| \quad \|x\|_{\mathbb{E}^d} \quad \left(\sum_{k=1}^{d} \left|x^k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.11}$$

называется d-мерным евклидовым пространством.

Конечно, $\mathbb{R}^1 \quad \mathbb{R}$ в случае $d \quad 1$.

Проверка условий 1)–3) из определения нормы не представляет труда: первые два свойства очевидны, а третье вытекает из неравенства Минковского (см. неравенство 4.32 при $p = 2$). Ниже будет приведено другое доказательство неравенства треугольника, связанное с "происхождением" нормы евклидова пространства.

[1] Обращаем особое внимание на то, что **номера координат вектора пишутся как верхние индексы.**

Определение 6.23 *Набор векторов* $\{e_i\}_{i=1}^d$, *где* $e_i^k = \delta_{ik}$ $(i, k = 1, \dots, d)$ *называется* ***стандартным базисом*** *в* $\mathbb{R}^d$.

Любой вектор $x \in \mathbb{R}^d$ однозначно представим в виде линейной комбинации элементов базиса

$$x = \sum_{k=1}^{d} x^k e_k. \tag{6.12}$$

Определение 6.24 *Если* $x, y \in \mathbb{R}^d$, *то их* ***скалярным произведением*** *называется*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{d} x^k y^k. \tag{6.13}$$

Лемма 6.1 *Скалярное произведение в* $\mathbb{R}^d$ *обладает следующими свойствами*

1) $(x, y) = (y, x)$ *(симметричность),*

2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ *(линейность),*

3) $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0 \iff x = 0$,

4) $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$,

5)$|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$ *(неравенство Коши), 6)* $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(неравенство треугольника)*

Доказательство. Первые четыре свойства вытекают непосредственно из определения 6.24.

Для доказательства неравенства Коши рассмотрим неотрицательный квадратный трехчлен

$$0 \leqslant \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda(x, y) + \lambda^2 \|y\|^2$$

Его дискриминант не положителен

$$D = 4(x, y)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0,$$

а это и есть нужное неравенство.

Последнее утверждение вытекает из неравенства Коши:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 . \square$$

Норму 6.11 будем называть **евклидовой**, чтобы отличать ее от других норм. Это не единственный способ введения нормы на евклидовых пространствах. Часто полезным является использование других норм. Примером может служить

$$\|x\|^* = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} \left| x^k \right| . \tag{6.14}$$

Эта норма (ее обычно называют **равномерной**) связана с евклидовой двухсторонними неравенствами

$$\|x\|^* \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{d} \, \|x\|^* . \tag{6.15}$$

Лемма 6.2 *Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в $\mathbb{R}^d$. Следующие условия равносильны*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = x^k$ *(*$k = 1,\ldots,d$*).*

$\mathbb{R}^d$ *является полным пространством.*

Доказательство. Эквивалентность 1) и 2) сразу следует из неравенств (6.15). Полнота $\mathbb{R}^d$ вытекает из критерия Коши в $\mathbb{R}$ и из неравенств (6.15): из фундаментальности $\{x_n\}$ следует фундаментальность каждой координаты $\{x_n^k\}$, которые по теореме 2.7 сходятся. А тогда сходится и последовательность $\{x_n\}$. □

Утверждение 2) этой леммы называется **координатной сходимостью**, которая, таким образом, равносильна сходимости по норме.

Всюду в дальнейшем для обозначения евклидовой нормы в $\mathbb{R}^d$ будем использовать обозначение $|x|$ вместо $\|x\|$. Такое же обозначение мы продолжаем использовать и для абсолютной величины числа. Но это не должно вызывать путаницы — необходимо лишь каждый раз внимательно следить какой объект находится под знаком модуля.

3.3. Некоторые подмножества

В следующем определении понятия сегмента и интервала обобщаются на случай евклидовых пространств.

Определение 6.25 *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^d$. Тогда*

1) если $a^k \leqslant b^k$ ($k = 1,\ldots,d$), то множество

$$\overline{I} = \overline{I}_{a,b} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : a^k \leqslant x^k \leqslant b^k, \quad k = 1,\ldots,d\right\} \tag{6.16}$$

*называется **d-мерным сегментом**,*

2) если $a^k < b^k$ ($k = 1,\ldots,d$), то множество

$$I = I_{a,b} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : a^k < x^k < b^k, \quad k = 1,\ldots,d\right\} \tag{6.17}$$

*называется **d-мерным интервалом**,*

3) множество

$$[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R}^d : x = (1-t)a + tb, \quad t \in [0,1]\right\} \tag{6.18}$$

*называется **отрезком** (в $\mathbb{R}^d$), соединяющим точки a и b.*

Упражнение 6.3

1) Сегмент $\overline{I}$ замкнут и ограничен, интервал I открыт и ограничен.

2) $\operatorname{diam} \overline{I}_{a,b} = \operatorname{diam} I_{a,b} = |b-a|$.

3) Замыкание интервала $I_{a,b}$ — сегмент $\overline{I}_{a,b}$. Внутренность сегмента $\overline{I}_{a,b}$ — интервал $I_{a,b}$.

4) Отрезок $[a, b]$ замкнут и ограничен.

5) Определение ограниченного множества не изменится, если в нем шар заменить на сегмент или интервал.

6) Любая последовательность вложенных сегментов $\overline{I}_1 \supset \ldots \overline{I}_n \supset \ldots$ имеет не пустое пересечение.

§ 4. Непрерывные функции на топологических пространствах

4.1. Непрерывность

Пусть X и Y — топологические пространства, $D \subset X$ и заданы функция $f : D \to Y$, $a \in D'$ (предельная точка для D).

Определение 6.26 *Будем говорить, что $b \in Y$ называется пределом функции f в точке a (краткая запись $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$), если*

$$\forall V_b \quad \exists U_a \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_b. \tag{6.19}$$

Легко видеть, что если Y является хаусдорфовым (см. определение 6.11), то предел функции определяется однозначно.

Определение 6.27 *Функция $f : D \to Y$ называется* ***непрерывной в точке*** *$a \in D$, если*

$$\forall V_{f(a)} \quad \exists U_a \quad f(U_a \cap D) \subset V_{f(a)}. \tag{6.20}$$

Если a — предельная точка для D, то непрерывность f в точке a означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Если же a — изолированная точка для D, то условие непрерывности выполнено автоматически для любой функции.

4.2. Глобальный критерий непрерывности

Напомним (см. определение 3.2), что функция называется непрерывной на множестве (подмножестве области определения), если она непрерывна в каждой точке этого множества. Это определение мы можем теперь использовать для любого топологического пространства. Напомним также, что символом $C(D)$ мы всегда обозначаем класс всех функций, непрерывных на топологическом пространстве D.

Следующая теорема дает глобальный критерий непрерывности. Интересным является то, что этот критерий не использует понятие предела.

Теорема 6.7 *Следующие условия равносильны*

i) функция $f : D \to Y$ непрерывна на множестве D,

ii) для любого открытого множества $V \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(V)$ открыт относительно D.

Доказательство. $i) \Longrightarrow ii)$ Пусть f непрерывна на D и пусть $V \subset Y$ открыто, $f^{-1}(V) \neq \varnothing$. Для каждой точки $x \in f^{-1}(V)$ найдется окрестность U_x такая, что $f(U_x \cap D) \subset V$ или $U_x \cap D \subset f^{-1}(V)$. Таким образом,

$$\left(\bigcup_{x \in f^{\ 1}(V)} U_x \right) \bigcap D = f^{-1}(V).$$

$ii) \quad \Rightarrow i)$ Пусть $x \in D$ и V_y — окрестность точки $y \quad f(x)$. Тогда $f^{-1}(V_y)$ $U_x \cap D$, U_x содержит x и $f(U_x \cap D) \quad V_y$. $\square$

4.3. Компактные множества в метрическом пространстве

Семейство множеств $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется **покрытием** множества E, если

$$E \subset \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha.$$

Определение 6.28 *Множество в топологическом пространстве называется* ***компактным****, если из любого покрытия этого множества открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.*

Упражнение 6.4

1) Сегмент $[a, b] \subset \mathbb{R}$ является компактным.

2) Замкнутое подмножество компакта является компактным.

3) Свойство множества быть компактным является его внутренним свойством: оно не зависит от объемлющего пространства. Другими словами, если $Y \subset X$ — подпространство топологического пространства X, то $K \subset Y$ компактно в Y тогда и только тогда, когда K компактно в X.

4) Свойство множества быть замкнутым таковым не является: подмножество топологического пространства, не являющееся замкнутым, является замкнутым в индуцированной топологии.

Теорема 6.8 *Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Если $K \subset X$ — компактно и $x_0 \in X$ — любой фиксированный элемент, то семейство шаров $\{B(x_0, n)\}_{n=1}^{\infty}$ образует открытое покрытие K (оно покрывает даже все X). Из него можно выделить конечное подпокрытие $\{B(x_0, n_k)\}_{k=1}^{m}$. Тогда $K \subset B(x_0, n)$, где $n = \max\{n_1, \dots n_m\}$.

Чтобы доказать замкнутость K, докажем , что его дополнение K^c открыто. Если $x \in K^c$, то

$$\forall y \in K \quad \exists r_y > 0 \quad B(x, r_y) \cap B(y, r_y) \quad \varnothing.$$

Из открытого покрытия $\{B(y, r_y)\}_{y \in K}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{B(y_k, r_{y_k})\}_{k=1}^m$. Тогда если $r = \min\{r_{y_1}, \ldots, r_{y_m}\} > 0$, то $B(x, r) \subset K^c$ и x внутренняя точка для K^c. □

В случае евклидовых пространств это утверждение можно обратить.

Теорема 6.9 (Гейне-Бореля) *Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$. Тогда следующие условия равносильны*

i) K компактно,

ii) K замкнуто и ограничено.

Доказательство. $i) \Longrightarrow ii)$ Это утверждение верно для любого метрического пространства (теорема 6.8).

$ii) \Longrightarrow i)$ В силу упражнений 6.4.5) и 6.3.1) достаточно доказать, что сегмент компактен.

Предположим противное, то есть из некоторого открытого покрытия S сегмента $\overline{I}$ нельзя выделить конечное подпокрытие. Деля его ребра пополам, разобьем $\overline{I}$ на 2^d сегментов с непересекающимися внутренностями. Один из этих сегментов (обозначим его $\overline{I}_1$) также не покрывается конечным числом множеств из S. С $\overline{I}_1$ поступим точно так же.

Продолжая процесс по индукции, построим последовательность вложенных сегментов $\overline{I}_1 \supset \ldots \overline{I}_n \supset \ldots$, каждый из которых не покрывается конечным числом множеств из S. В силу упражнения 6.3.6) существует точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{I}_n$. Эта точка принадлежит одному из множеств $G \in S$ и является для него внутренней. Поэтому существует шар $B(x, r) \subset G$. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{diam} \overline{I}_n - 0$ и $x \in G$, то $\overline{I}_n \subset G$ для достаточно больших n. Таким образом $\overline{I}_n$, покрывается одним из множеств $G \in S$. Противоречие. □

4.4. Непрерывные образы множеств

Пусть X, Y — топологические пространства.

Теорема 6.10 *Пусть функция $f : X \to Y$ непрерывна на X. Тогда для любого компакта $K \subset X$ его образ $f(K)$ компактен.*

Доказательство. Если $\{V\}$ открытое покрытие $f(K)$, то $\{f^{-1}(V)\}$ открытое покрытие K (см. теорему 6.7), из которого можно выделить конечное подпокрытие $f^{-1}(V_1), \ldots, f^{-1}(V_m)$. Тогда $V_1, \ldots, V_m$ конечное подпокрытие $f(K)$. □

Отметим, что в случае $X - Y - \mathbb{R}$ мы получаем обобщение теорем Вейерштрасса (см. теоремы 3.4 и 3.5): непрерывный образ компакта ограничен и замкнут (по теореме 6.8), следовательно, содержит свои точные верхнюю и нижнюю границы.

Определение 6.29 *Множество E в топологическом пространстве X называется* ***связным****, если не существует таких двух открытых множеств $A \subset X$ и $B \subset X$, что*

$$A \cap B = \varnothing, \quad A \cap E \neq \varnothing, \quad B \cap E \neq \varnothing, \quad E \subset A \cup B.$$

Другими словами, связность множества означает, что его нельзя разбить на не пустые части, содержащиеся в не пересекающихся открытых множествах.

Теорема 6.11 *Пусть функция $f : X \to Y$ непрерывна на X. Тогда для любого связного множества $E \subset X$ его образ $f(E)$ связен.*

Доказательство. Пусть E связно, но $f(E) \subset V_1 \cup V_2$, где V_1 и V_2 открыты, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ и $f(E) \cap V_k \neq \varnothing$ $(k = 1, 2)$. Тогда $f^{-1}(V_1)$ и $f^{-1}(V_2)$ открыты (по теореме 6.7), не пересекаются и

$$E \subset f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2), \quad E \cap f^{-1}(V_k) \neq \varnothing \quad (k = 1, 2),$$

что невозможно, так как E связно. □

Отметим, что в случае $X = Y = \mathbb{R}$ мы получаем обобщение теорем Больцано-Коши (см. теоремы 3.6 и 3.7): связными множествами в $\mathbb{R}$ являются промежутки и только они (см. упражнение 6.5.4)).

4.5. Линейно связные и выпуклые множества

Определение 6.30 ***Путем*** *в топологическом пространстве X называется любое непрерывное отображение $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$ отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ в X.*

Образ $\gamma([\alpha, \beta])$ — ***след пути****, $a = \gamma(\alpha)$ и $b = \gamma(\beta)$ — соответственно* ***начало*** *и* ***конец*** *пути γ. В этом случае также говорят, что путь γ соединяет точки a и b.*

Определение 6.31 *Множество E в топологическом пространстве X называется* ***линейно связным****, если для любых двух его точек существует путь, соединяющий эти точки, след которого лежит в E.*

Определение 6.32 *Множество E в векторном пространстве X называется* ***выпуклым****, если для любых точек $a, b \in E$* ***отрезок***

$$[a, b] = \{x \in X : x = (1-t)a + tb, \quad t \in [0, 1]\},$$

соединяющий эти точки, содержится в E.

Упражнение 6.5

1) Линейно связное множество является связным.

2) Множество

$$\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : x \in (0, +\infty\right\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$$

в $\mathbb{R}^2$ связно, но не является линейно связным.

3) Непрерывный образ линейно связного множества линейно связен.

4) На числовой прямой $\mathbb{R}$ понятия связности и линейной связности совпадают. Связными множествами в $\mathbb{R}$ являются промежутки $\langle a, b\rangle$ и только они.

5) Для открытого множества $G \subset \mathbb{R}^d$ понятия связности и линейной связности совпадают. Иначе, в этом случае утверждение упражнения 1) обратимо.

6) Выпуклое множество в векторном топологическом пространстве линейно связно.

4.6. Равномерная непрерывность

Пусть X, Y — метрические пространства, $D \subset X$.

Определение 6.33 *Функция $f : D \to Y$ называется* ***равномерно непрерывной*** *на D, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x', x'' \in D \quad d_X(x', x'') < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon. \quad (6.21)$$

Нетрудно видеть, что из равномерной непрерывности функции на множестве вытекает ее непрерывность на этом множестве.

Теорема 6.12 (Кантора) *Пусть $K \subset X$ — компакт и функция $f : K \to Y$ непрерывна на K. Тогда она равномерно непрерывна на K.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и для каждой точки $x \in K$ найдем $r_x > 0$ так, чтобы

$$f(B(x, r_x)) \subset B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Положим

$$B_x = B\left(x, \frac{r_x}{2}\right),$$

тогда $\{B_x\}_{x\in K}$ — открытое покрытие компакта K и из него можно выделить конечное подпокрытие $B_{x_1}, \ldots, B_{x_m}$.

Пусть $\delta = \frac{1}{2}\min\{r_{x_1}, \ldots, r_{x_m}\} > 0$. Тогда если $x, x' \in K$ и $d(x, x') < \delta$, то $x \in B_{x_k}$ при некотором $1 \leqslant j \leqslant m$ и $x' \in B(x_j, r_j)$, поэтому

$$d(f(x_j), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(f(x_j), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно, $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. □

Упражнение 6.6

Пусть $d \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant k \leqslant d$. Определим функцию

$$\pi_k(x) = x^k, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{6.22}$$

которая называется k-й **проекцией** (проекцией на k-ю координату)

1) Пусть $f : D \to \mathbb{R}^{d_1}$ и a — предельная точка множества $D \subset \mathbb{R}^{d_0}$. Тогда следующие условия равносильны

i) $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$,

ii) $\forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to a,\ x_n \neq a \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$,

iii) $\forall\, k = 1, \ldots, d \quad b^k = \lim\limits_{x\to a} (\pi_k \circ f)\,(x)$.

2) Функция $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ не имеет предела в точке $(0,0)$.

3) Пусть $d_0, d_1 \in \mathbb{N}$, $f, g : D \to \mathbb{R}^{d_1}$, a — предельная точка множества $D \subset \mathbb{R}^{d_0}$, $u = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $v = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Тогда

$$\lim_{x\to a} [\alpha f + \beta g]\,(x) = \alpha u + \beta v, \quad \lim_{x\to a} (f,g)(x) = (u,v).$$

Если $d_1 = 1$ и $v \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{u}{v}.$$

4) Сформулировать и доказать аналоги двух последних упражнений для непрерывности.

5) Пусть $d_0, d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, функция $f : D_f \to \mathbb{R}^{d_1}$ непрерывна в точке $a \in D_f \subset \mathbb{R}^{d_0}$, функция $g : D_g \to \mathbb{R}^{d_2}$ непрерывна в точке $b = f(a)$, $f(D_f) \subset D_g$. Тогда функция $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}^{d_2}$ непрерывна в точке $a \in D_f$.

6) Функции

$$\pi_k, \quad f(x) = (x^k)^\alpha \quad (k = 1, \ldots, d), \quad f(x) = |x|\,,$$

$$P(x) = \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{\nu_d=0}^{n_d} c_{\nu_1,\ldots,\nu_d} (x^1)^{\nu_1} \ldots (x^d)^{\nu_d}$$

непрерывны на своих областях определения.

Глава 7
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Производная и частные производные

1.1. Сведения из линейной алгебры

Пусть X, Y — векторные пространства над полем $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Определение 7.1 *Отображение $A : X \to Y$ называется* ***линейным****, если*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \tag{7.1}$$

для любых $x, y \in X$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

В дальнейшем для линейных отображений образ элемента x при отображении A будем записывать как Ax вместо $A(x)$.

Определение 7.2 *Множество всех линейных отображений $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ назовем* ***сопряженным пространством*** *к $\mathbb{R}^d$ и будем обозначать $\left(\mathbb{R}^d\right)^*$.*

Лемма 7.1
1) Сопряженное пространство $\left(\mathbb{R}^d\right)^*$ является векторным пространством относительно естественных операций над отображениями

$$(A + B)x = Ax + Bx, \quad (\alpha A)x = \alpha Ax,$$

2) проекции $\{\pi_i\}_{i=1}^d$ образуют базис сопряженного пространства, связанный со стандартным базисом в $\mathbb{R}^d$ равенствами

$$\pi_i(e_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \ldots, d,$$

3) для любого $A \in \left(\mathbb{R}^d\right)^*$ существует такая постоянная $c > 0$, что

$$|Ax - Ay| \leqslant c|x - y|\,.$$

Доказательство. 1) Это утверждение очевидно.
2) Если $x \in \mathbb{R}^d$, то $x = \sum_{k=1}^d x^k e_k$ (см. (6.12))

$$Ax = A\left(\sum_{k=1}^d x^k e_k\right) = \sum_{k=1}^d x^k A e_k = \sum_{k=1}^d A e_k \pi_k(x),$$

следовательно, $A = \sum_{k=1}^d A e_k \pi_k$.

3) Так как $x = \sum_{k=1}^{d} x^k e_k$, то в силу неравенства Гельдера (4.30)

$$|Ax| = \left|A\left(\sum_{k=1}^{d} x^k e_k\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{d} x^k A e_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{d} |Ae_k|^2\right)^{1/2} |x| = c|x|\,.$$

Поэтому в силу линейности A

$$|Ax - Ay| = |A(x-y)| \leqslant c|x-y|\,.\square$$

В случае $d = 1$ можно отождествить $A \in (\mathbb{R}^1)^*$ и $\mathbb{R}$ с помощью отображения $A \leftrightarrow A(1)$.

Определение 7.3 *Если $A \in \left(\mathbb{R}^d\right)^*$ и $c \in \mathbb{R}$, то множество*

$$H = H_{A,c} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : Ax = c\right\}$$

называется ***гиперплоскостью*** *в $\mathbb{R}^d$. Если $c = 0$, то гиперплоскость называется* ***однородной***.

Нетрудно видеть, что однородная гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$ является $(d-1)$-мерным алгебраическим подпространством. Обратное также верно, каждое $(d-1)$-мерное подпространство в $\mathbb{R}^d$ является однородной гиперплоскостью

1.2. Дифференцируемость и касательная гиперплоскость

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$, $a \in \operatorname{int} D$ и задана функция $f : D \to \mathbb{R}$.

Определение 7.4 *Функция f называется* ***дифференцируемой*** *в точке a, если существует такое $A \in \left(\mathbb{R}^d\right)^*$, что*

$$f(a+h) - f(a) = Ah + o(|h|), \quad h \to 0. \tag{7.2}$$

Отображение $A \in \left(\mathbb{R}^d\right)^*$ называется (полной) ***производной*** *функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.*

Пусть $\varphi(x) - f(a) + A(x-a)$, тогда (7.2) равносильно тому, что

$$f(x) = \varphi(x) + o(|x-a|), \quad x \to a.$$

Этому можно дать геометрическую интерпретацию. Пусть Γ_f — график функции (см. 1.2). Рассмотрим гиперплоскость в $\mathbb{R}^{d+1}$

$$T = T_{f,a} = \left\{\left(x^1, \ldots, x^d, z\right) \in \mathbb{R}^{d+1} : z = \varphi(x)\right\}, \tag{7.3}$$

проходящую через точку $(a, f(a)) \in \Gamma_f$. Если $w = (x, \varphi(x))$, то

$$\operatorname{dist}(w, \Gamma_f) = \inf_{v \in \Gamma_f} |w - v| \leqslant |f(x) - \varphi(x)| = o(|x-a|)\,.$$

Это служит основанием для того, чтобы назвать $T_{f,a}$ **касательной гиперплоскостью** к графику функции Γ_f в точке $(a, f(a)) \in \Gamma_f$. Ее явное уравнение таково

$$z = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Лемма 7.2 *Пусть функция* $f : D \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $a \in \operatorname{int} D$. *Тогда*

1) производная $f'(a)$ *определяется однозначно,*

2) функция f *непрерывна в точке* a.

Доказательство. 1) Если $A_1, A_2 \in \left(\mathbb{R}^d\right)^*$ таковы, что

$$f(a+h) - f(a) = A_1 h + o(|h|) = A_2 h + o(|h|), \quad h \to 0,$$

то $A_1 h - A_2 h = o(|h|)$ при $h \to 0$. Положим $h = tx$, где $x \in \mathbb{R}^d$. Тогда

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{|A_1(tx) - A_2(tx)|}{|tx|} = \frac{|A_1(x) - A_2(x)|}{|x|}.$$

Откуда $A_1(x) - A_2(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^d$.

2) Это утверждение вытекает непосредственно из определения дифференцируемости (7.2) и части 3) леммы 7.1. □

Упражнение 7.1 Определить множества точек дифференцируемости следующих функций и найти производные:

1) $f(x) = Ax + c$, где $x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \left(\mathbb{R}^d\right)^*$, $c \in \mathbb{R}$,

2) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}^d$,

3) $f(x) = |x|^2$, $x \in \mathbb{R}^d$,

4) $f(x, y) = xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Лемма 7.3 *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^d$, $[a, b] \subset \operatorname{int} D$ *и функция* $f : D \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на* $[a, b]$. *Тогда функция одной переменной*

$$\varphi(t) = f(a + t(b-a)), \quad t \in [0, 1].$$

дифференцируема на $[0, 1]$ *и*

$$\varphi'(t) = f'(a + t(b-a))(b-a).$$

Доказательство. Если обозначить $x = a + t(b-a)$, то при $t \in (0, 1)$ и $\varepsilon \to 0$

$$\varphi(t+\varepsilon) - \varphi(t) = f(x + \varepsilon(b-a)) - f(x) =$$

$$= f'(x)(\varepsilon(b-a)) + o(|\varepsilon(b-a)|) = \varepsilon[f'(x)(b-a) + o(1)].$$

Откуда следует дифференцируемость φ и равенство для ее производной. □

Теорема 7.1 (Лагранж) *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^d$, $[a, b] \subset \operatorname{int} D$ *и функция* $f : D \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на* $[a, b]$. *Тогда существует такая точка* $\xi \in (a, b)$, *что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{7.4}$$

Доказательство. К функции φ из леммы 7.3 надо применить формулу конечных приращений (теорема 4.6). □

1.3. Частные производные

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$, $a \in \operatorname{int} D$ и задана функция $f : D \to \mathbb{R}$.

Определение 7.5 *Если* $1 \leqslant k \leqslant d$, *то предел*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_k)-f(a)}{t} \tag{7.5}$$

называется ***частной производной*** *функции* f *по* k*-й координате и обозначается* $D_k f(a)$ *или* $\frac{\partial f}{\partial x^k}(a)$ *или* $f'_{x^k}(a)$.

Проще говоря, $\frac{\partial f}{\partial x^k}(a)$ — производная функции f по k-й переменной x^k в точке a^k при фиксированных значениях остальных (понимаемая как обычная производная функции одной переменной).

Геометрически частная производная по k-й переменной — угловой коэффициент касательной к сечению графика функции гиперплоскостью $x_i = a_i$ $(k \neq i = 1, \ldots, d)$.

Лемма 7.4 *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^d$, $a \in \operatorname{int} D$ *и задана функция* $f : D \to \mathbb{R}$. *Тогда*

1) если функция f *дифференцируема в точке* a, *то она имеет все частные производные* $\frac{\partial f}{\partial x^k}(a)$ $(k = 1, \ldots, d)$ *и*

$$f'(a) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^k}(a)\pi_k, \tag{7.6}$$

2) если частные производные $\frac{\partial f}{\partial x^k}(a)$ $(k = 1, \ldots, d)$ *существуют в некоторой окрестности точки* a *и непрерывны в* a, *то функция* f *дифференцируема в* a.

Доказательство. 1) Для каждого $k = 1, \ldots, d$ положим $h = te_k$ в (7.2)

$$f(a+te_k) - f(a) = tf'(a)e_k + o(t), \quad t \to 0,$$

откуда

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_k)-f(a)}{t} = f'(a)e_k, .$$

Представление (7.6) получается теперь так же, как и в доказательстве части 2) леммы 7.1.

2) Обозначим для $k = 1, \ldots, d$

$$a_k = a + \sum_{i=1}^{k} h^i e_i, \quad g_k(t) = f(a_{k-1} + te_k)\,.$$

Тогда ясно, что $g_k'(t) = \frac{\partial f}{\partial x^k}(a_{k-1} + te_k)$ и по формуле Лагранжа (теорема 4.6)

$$f(a_k) - f(a_{k-1}) = g_k(h^k) - g_k(0) = g_k'(\tau_k)h^k = \frac{\partial f}{\partial x^k}(\xi_k)h^k.$$

Следовательно,

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{d} [f(a_k) - f(a_{k-1})] = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^k}(\xi_k) h^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^k}(a) h^k + \sum_{k=1}^{d} \left[\frac{\partial f}{\partial x^k}(\xi_k) - \frac{\partial f}{\partial x^k}(a) \right] h^k.$$

Второе слагаемое справа есть $o(|h|)$ в силу неравенства Коши (6.1) и непрерывности частных производных. $\square$

Примеры из следующего упражнения показывают, что утверждение 2) леммы 7.4 без требования непрерывности частных производных неверно.

Упражнение 7.2 Исследовать на дифференцируемость в точке следующие функции и найти их частные производные в этой точке.

1) $f(x,y) = 1$ при $xy = 0$ и $f(x,y) = 0$ при $xy \neq 0$.

2) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

Определение 7.6 *Если $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, то будем обозначать $C^1(G)$ класс функций, все частные производные которых непрерывны на множестве G.*

Из утверждения 2) леммы 7.4 вытекает, что функции класса $C^1(G)$ дифференцируемы на G и (в силу 2) леммы 7.2) непрерывны на G.

1.4. Производные по направлению и градиент

Определение 7.7 *Пусть $v \in \mathbb{R}^d$, $|v| = 1$ — единичный вектор.* ***Производной по направлению*** *v функции f в точке a называется*

$$D_v f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}. \tag{7.7}$$

Упражнение 7.3

1) $D_{e_k} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x^k}(a)$ $(k = 1, \ldots, d)$.

2) Если функция f дифференцируема в точке a, то она имеет в этой точке производную по любому направлению v и

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a)v = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^k}(a) v^k. \tag{7.8}$$

Определение 7.8 *Если функция f имеет в точке a все частные производные, то вектор*

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^d}(a) \right) \tag{7.9}$$

называется ***градиентом*** *этой функции в точке a.*

Таким образом, равенство (7.8) можно переписать в терминах градиента

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (\nabla f(a), v) \tag{7.10}$$

Следующая лемма раскрывает геометрический смысл градиента.

Лемма 7.5 *Пусть функция f имеет в точке a производную по любому направлению и $v_0 = \nabla f(a)|\nabla f(a)|^{-1}$. Тогда*

$$D_{v_0} f(a) = \sup_{|v|=1} D_v f(a) = |\nabla f(a)|\,. \tag{7.11}$$

Доказательство. В силу неравенства Коши (лемма 6.1)

$$D_v f(a) \leqslant |\nabla f(a)||v| = |\nabla f(a)|\,.$$

Кроме того,

$$D_{v_0} f(a) = \left(\nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}\right) = |\nabla f(a)|\,.$$

□

Таким образом, направление градиента — направление наибольшего возрастания функции.

§ 2. Частные производные высших порядков. Формула Тейлора

2.1. Производные высших порядков

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$, $a \in \operatorname{int} D$ и задана функция $f : D \to \mathbb{R}$.

Определение 7.9 *Пусть задан набор $\{i_l\}_{l=1}^n$, $1 \leqslant i_l \leqslant d$.* ***Частная производная*** *функции f в точке a порядка n по переменным $x^{i_1}, \ldots, x^{i_n}$ определяется индуктивно*

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_n}}(a) = \frac{\partial}{\partial x^{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_{n-1}}}\right)(a), \tag{7.12}$$

при этом предполагается, что все предыдущие производные $\frac{\partial^l f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_l}}(x)$, $l = 1, \ldots, n-1$ существуют в некоторой окрестности точки a.

Пример из следующего упражнения показывает, что частная производная зависит, вообще говоря, от порядка, в котором выполняется дифференцирование, то есть зависит от порядка индексов в наборе $\{i_l\}_{l=1}^n$.

Упражнение 7.4 Показать, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

в точке $(0,0)$ имеет частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, но $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

При дополнительных предположениях все же можно утверждать, что частная производная не зависит от порядка дифференцирования.

Теорема 7.2 (Шварца) *Пусть* $1 \leqslant i,j \leqslant d$ *и для функции* $f : D \to \mathbb{R}$ *в некоторой окрестности точки* $a \in \operatorname{int} D$ *существуют частные производные* $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, $\frac{\partial f}{\partial x^j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *и* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$, *причем две последние непрерывны в точке* a. *Тогда*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(a).$$

Доказательство. Ясно, что достаточно рассмотреть случай функции двух переменных. При $h \neq 0$ рассмотрим выражение

$$\Delta(h) = \left[f(a^1+h, a^2+h) - f(a^1+h, a^2)\right] - \left[f(a^1, a^2+h) - f(a^1, a^2)\right]$$

и обозначим

$$\Delta_1(x^1) = f(x^1, a^2+h) - f(x^1, a^2).$$

Дважды применяя одномерную формулу Лагранжа (теорема 4.6), получим

$$\Delta(h) = \Delta_1(a^1+h) - \Delta_1(a^1) = \Delta_1'(a^1+\theta_1 h)h =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}(a^1+\theta_1 h, a^2+h) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(a^1+\theta_1 h, a^2)\right] h = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(a^1+\theta_1 h, a^2+\theta_2 h)h^2$$

при некоторых $0 < \theta_1 < 1$ и $0 < \theta_2 < 1$.

С другой стороны, если

$$\Delta_2(x^2) = f(a^1+h, x^2) - f(a^1, x^2),$$

то $\Delta(h) = \Delta_2(a^2+h) - \Delta_2(a^2)$. Поэтому, рассуждая аналогично, получим

$$\Delta(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}(a^1+\theta_3 h, a^2+\theta_4 h)h^2$$

при некоторых $0 < \theta_3 < 1$ и $0 < \theta_4 < 1$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(a^1+\theta_1 h, a^2+\theta_2 h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}(a^1+\theta_3 h, a^2+\theta_4 h).$$

Отсюда при $h \to 0$ из непрерывности производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}$ получим требуемое. $\square$

Определение 7.10 *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество. Класс $C^r(G)$ состоит из функций $f : G \to \mathbb{R}$, все частные производные которых порядка $\leqslant r$ существуют и непрерывны на G.*

При $r = 1$ это определение совпадает с определением 7.6.

В силу теоремы 7.2 для функции $f \in C^r(G)$ значение любой частной производной порядка $\leqslant r$ не зависит от порядка, в котором выполняется дифференцирование.

2.2. Мультииндексы

Введем обозначение $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Мультииндексом будем называть любой вектор $\nu \in \mathbb{R}^d$, для которого $\nu^k \in \mathbb{N}_0$ $(k = 1, \ldots, d)$. Другими словами, мультииндекс — вектор с неотрицательными целочисленными координатами.

Длиной мультииндекса называется

$$|\nu| = \sum_{k=1}^{d} \nu^k. \tag{7.13}$$

Если $\nu \in \mathbb{N}_0^d$ — мультииндекс и $h \in \mathbb{R}^d$, то положим

$$h^\nu = \prod_{k=1}^{d} \left(h^k\right)^{\nu^k}, \quad \nu! = \prod_{k=1}^{d} \nu^k! \tag{7.14}$$

Подобным образом вводятся **дифференциальные мономы**

$$\mathbf{D}^\nu = \prod_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)^{\nu^k} \tag{7.15}$$

и будем использовать это обозначение для частных производных функций класса $C^r(G)$ — для функций этого класса не важен порядок, в котором производится дифференцирование. Важно знать лишь то, сколько дифференцирований производилось по каждой переменной — на это указывают координаты мультииндекса.

Далее введем формальные дифференциальные операторы

$$\mathbf{D}_h^r f(a) = \left(\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^k} h^k\right)^r f(a) = \sum_{k_1=1}^{d} \cdots \sum_{k_r=1}^{d} \frac{\partial^r f}{\partial x_{k_1} \cdots \partial x_{k_r}}(a) h^{k_1} \cdots h^{k_r} \tag{7.16}$$

В предположении $f \in C^r(G)$ частные производные не зависят от порядка, в котором выполняется дифференцирование. Поэтому, группируя одинаковые слагаемые в последней сумме и используя мультииндексные обозначения, его можно записать в виде

$$\mathbf{D}_h^r f(a) = \sum_{|\nu|=r} \frac{r!}{\nu!} \mathbf{D}^\nu f(a) h^\nu \tag{7.17}$$

2.3. Формула Тейлора

Обозначения, которые только что были введены позволяют кратко записывать многомерный полином Тейлора

$$T_n(x,a;f) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} \left(\sum_{k=1}^{d} \left(x^k - a^k\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^r f(a) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} \mathbf{D}_{x-a}^r f(a) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \sum_{|\nu|=r} \frac{1}{\nu!} \mathbf{D}^\nu f(a)(x-a)^\nu = \sum_{|\nu|\leqslant n} \frac{1}{\nu!} \mathbf{D}^\nu f(a)(x-a)^\nu \qquad (7.18)$$

Формулой Тейлора будем называть равенство

$$f(x) = T_n(x,a;f) + R_n(x,a;f). \qquad (7.19)$$

Величина $R_n(x,a;f)$, определяемая этим равенством, называется **остатком** формулы Тейлора.

Теорема 7.3 *1) Если $f \in C^n(U_a)$, то*

$$R_n(x,a;f) = o\left(|x-a|^n\right), \quad x \to a$$

(форма Пеано для остатка Тейлора).

2) Если $f \in C^{n+1}(U_a)$, то для любого $x \in U_a$, $[a,x] \subset U_a$, существует $\xi \in [a,x]$ со свойством

$$R_n(x,a;f) = \frac{1}{(n+1)!} \mathbf{D}_{x-a}^{n+1} f(\xi)$$

(форма Лагранжа для остатка Тейлора).

3) Если $f \in C^{n+1}(U_a)$, то для любого $x \in U_a$, $[a,x] \subset U_a$,

$$R_n(x,a;f) = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \mathbf{D}_{x-a}^{n+1} f(a+t(x-a))\, dt$$

(интегральная форма для остатка Тейлора).

Доказательство. В случаях 2) и 3) надо применять одномерную формулу Тейлора с соответствующим видом остатка (см. соответственно равенства (4.18) и (5.24)) к функции

$$\varphi(t) = f(a+t(x-a)), \quad t \in [0,1],$$

и использовать леммы 7.3 и 7.4, из которых вытекает, что при всех $r = 1, \ldots, n$

$$\varphi^{(r)}(t) = \mathbf{D}_{x-a}^r f(a+t(x-a)).$$

Для доказательства 1) нам понадобится легко проверяемое равенство

$$\frac{\partial}{\partial x^i} R_n(x,a;f) = R_{n-1}\left(x,a;\frac{\partial f}{\partial x^i}\right). \tag{7.20}$$

В самом деле, в силу (7.18)

$$\frac{\partial}{\partial x^i} T_n(x,a;f) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{|\nu|=r} \frac{1}{\nu!}\mathbf{D}^\nu f(a)\frac{\partial}{\partial x^i}(x-a)^\nu =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\sum_{|\nu|=r} \frac{\nu^i}{\nu!}\mathbf{D}^\nu \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i-a^i)^{\nu^i-1}\prod_{k=1,k\neq i}^{d}(x^k-a^k)^{\nu^k}.$$

Выполним здесь замену мультииндекса $\mu = \nu - e_i$, тогда $|\mu| = |\nu| - 1$, и мы приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x^i} T_n(x,a;f) = T_{n-1}\left(x,a;\frac{\partial f}{\partial x^i}\right).$$

Отсюда и следует (7.20).

Доказательство 1) проводим индукцией по n. База индукции (случай $n = 1$) вытекает из определения дифференцируемости (7.4) и леммы 7.4.

Предположим, что наше утверждение доказано для $n-1$, и докажем его для n. Рассмотрим функцию одной переменной

$$\varphi(t) = R_n(a + t(x-a), a; f).$$

Тогда по лемме 7.3, примененной к этой функции, получаем с помощью (7.20)

$$R_n(x,a;f) = R_n(x,a;f) - R_n(a,a;f) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^k} R_n(a+t(x-a),a;f)(x^k-a^k)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{d} R_{n-1}\left(a+t(x-a),a;\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)(x^k-a^k)\,dt =$$

$$= R_{n-1}\left(a+\theta(x-a),a;\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)(x^k-a^k)$$

при некотором $\theta \in [0,1]$ по первой теореме о среднем (теорема 5.11). Последнее выражение есть $o(|x-a|^n)$ в силу предположения индукции. □

§ 3. Локальные экстремумы

3.1. Квадратичные формы

Напомним некоторые сведения из высшей алгебры.

Если $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{d}$ — матрица, где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, то функция

$$Q : h \to \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} h^i h^j, \quad h \in \mathbb{R}^d \tag{7.21}$$

называется **квадратичной формой** на $\mathbb{R}^d$. Матрица $\{a_{ij}\}$ называется **матрицей квадратичной формы**. Главные миноры матрицы будем обозначать Δ_i $(i = 1, \ldots, d)$.

Квадратичная форма называется **положительно определенной**, если $Q(h) > 0$ для всех $h \neq 0$. Квадратичная форма называется отрицательно определенной, если $Q(h) < 0$ для всех $h \neq 0$. Объединяющий термин — **знакоопределенная форма**.

Критерий знакоопределенности дает следующая теорема, доказательство которой имеется в курсах алгебры, и мы его не приводим.

Теорема 7.4 (критерий Сильвестра) *Квадратичная форма Q является положительно определенной тогда и только тогда, когда $\Delta_i > 0$ $(i = 1, \ldots, d)$.*

Квадратичная форма Q является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда $(-1)^i \Delta_i > 0$ $(i = 1, \ldots, d)$.

Лемма 7.6 *Если квадратичная форма Q является положительно определенной, то существует такое $\alpha > 0$ что для всех $h \in \mathbb{R}^d$ выполнено неравенство*

$$Q(h) \geqslant \alpha |h|^2 .$$

Доказательство. Рассмотрим единичную сферу в $\mathbb{R}^d$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$$

Тогда S — замкнутое и ограниченное множество. По теореме 6.9 оно является также компактным. Так как $Q \in C(S)$, то $Q(S)$ — компакт и Qдостигает свое своей точной нижней грани на S в некоторой точке $h_0 \in S$:

$$\inf Q(S) = Q(h_0) = \alpha > 0.$$

Если $h \neq 0$, то $h|h|^{-1} \in S$ и

$$|h|^{-2} Q(h) = Q\left(\frac{h}{|h|}\right) \geqslant \alpha > 0.\square$$

3.2. Экстремумы

Определение экстремумов фактически совпадает с определением 4.4 в одномерном случае. Отличие состоит лишь в том, что рассматриваемые окрестности — подмножества из $\mathbb{R}^d$.

Определение 7.11 *Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^d$. Тогда a называется точкой*

***локального максимума**, если $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a \quad f(x) \leqslant f(a)$,*
***локального минимума**, если $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a \quad f(x) \geqslant f(a)$,*
***строгого локального максимума**, если $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a^\circ \quad f(x) < f(a)$,*
***строгого локального минимума**, если $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a^\circ \quad f(x) > f(a)$.*

Общее название для всех видов максимума и минимума — **экстремумы**.

Следующая лемма дает необходимые условия экстремума и аналогична лемме Ферма (см. лемму 4.2).

Лемма 7.7 *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ и $a \in \operatorname{int} D$ — точка локального экстремума. Тогда*

1) если f имеет производную $D_v f(a)$ по некоторому направлению $v, |v| = 1$, то $D_v f(a) = 0$,

2) если f дифференцируема в точке a, то $\nabla f(a) = 0$ и $f'(a) = 0$.

Доказательство. 1) Функция одной переменной $\varphi(t) = f(a + tv), |t| < \delta$, имеет в точке $t = 0$ локальный экстремум. По лемме 4.2

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = 0.$$

2) Это вытекает из утверждения 1) и леммы 7.4, так как сейчас $\frac{\partial f}{\partial x^k}(a) = 0, k = 1, \ldots, d$. □

Эта лемма дает необходимые условия экстремума. Как и в случае функций одной переменной, если $f'(a) = 0$, то точка a называется **стационарной** точкой для функции.

На примере $f(x, y) = x^2 - y^2$ в точке $(0, 0)$ нетрудно убедиться, что стационарная точка не обязана быть точкой экстремума.

Для получения достаточных условий рассмотрим квадратичную форму

$$Q_{f,a}(h) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a) h^i h^j, \quad h \in \mathbb{R}^d. \tag{7.22}$$

Теорема 7.5 (достаточное условие экстремума) *Пусть $f \in C^2(U_a)$, a — стационарная точка для f. Тогда*

1) если форма $Q_{f,a}$ отрицательно определена, то a — точка строгого максимума,

2) если форма $Q_{f,a}$ положительно определена, то a — точка строгого минимума,

3) если $Q_{f,a}$ не является знакоопределенной, то a не является точкой экстремума.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся формулой Тейлора с остатком в форме Пеано (см. теорему 7.3), учитывая также то, что a — стационарная точка

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x^k}(a)h^k+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(a)h^ih^j+R_2(a+h,a;f)=$$

$$=Q_{f,a}(h)+o\big(|h|^2\big)=|h|^2\left[\frac{Q_{f,a}(h)}{|h|^2}+o(1)\right].$$

Теперь утверждения 1) и 2) вытекают непосредственно из леммы 7.6.

3) Если $Q_{f,a}(h_1)>0$ и $Q_{f,a}(h_2)<0$, то при $t>0$ из предыдущего равенства следует, что

$$f(a+th_i)-f(a)=t^2[Q_{f,a}(h_i)+o(1)]\,,\quad i=1,2,$$

и в любой окрестности точки a разность $f(x)-f(a)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. □

Глава 8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Дифференцируемые отображения

1.1. Сведения из линейной алгебры

Мы рассмотрим здесь необходимую информацию из курса линейной алгебры, относящуюся к линейным отображениям из одного евклидова пространства в другое (общее понятие линейного отображения двух векторных пространств см. в определении 7.1).

Если $d_0, d_1 \in \mathbb{N}$, то класс всех линейных отображений из $\mathbb{R}^{d_0}$ в $\mathbb{R}^{d_1}$ будем обозначать $L\big(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\big)$.

Пусть $A \in L\big(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\big)$ и $x \in \mathbb{R}^{d_0}$, тогда, раскладывая x по стандартному базису в $\mathbb{R}^{d_0}$, получим

$$Ax = A\left(\sum_{j=1}^{d_0} x^j e_j\right) = \sum_{j=1}^{d_0} Ae_j x^j.$$

Обозначим

$$a_{ij} = (Ae_j)^i, \quad i = 1, \ldots, d_1,\ j = 1, \ldots, d_0. \tag{8.1}$$

Тогда

$$(Ax)^i = \sum_{j=1}^{d_0} a_{ij} x^j, \quad i = 1, \ldots, d_1. \tag{8.2}$$

Таким образом, с отображением $A \in L\big(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\big)$ и $x \in \mathbb{R}^{d_0}$ можно связать матрицу (8.1), которую назовем **матрицей отображения**. Действие отображения A на вектор x выражается в умножении его матрицы справа на транспонированный вектор (также рассматриваемый как матрица).

Обратно, если задана матрица a_{ij} размеров $d_1 \times d_0$, то она порождает по формулам (8.2) линейное отображение $A \in L\big(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\big)$.

Следовательно, мы можем отождествлять линейные отображения $A \in L\big(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\big)$ с их матрицами размеров $d_1 \times d_0$. Если $d_0 = d_1 = d$, то определитель матрицы отображения $A \in L\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\big)$ будем обозначать $\det A$.

Определение 8.1 ***Нормой*** *отображения* $A \in L\big(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\big)$ *называется число*

$$\|A\| = \sup\big\{|Ax| : |x| \leqslant 1, x \in \mathbb{R}^{d_0}\big\}. \tag{8.3}$$

Норма линейного отображения характеризует его "размеры". Образ единичного шара из $\mathbb{R}^{d_0}$ при отображении A содержится в шаре радиуса $\|A\|$ с центром в $0 \in \mathbb{R}^{d_1}$ и это — наименьший шар с таким свойством.

Лемма 8.1 *Если $A \in L\big(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\big)$, то*
1) $\|A\| < \infty$,
2) $|Ax| \leqslant \|A\| \cdot |x|$ при $x \in \mathbb{R}^{d_0}$,
3) $|Ax - Ay| \leqslant \|A\| \cdot |x-y|$ при $x, y \in \mathbb{R}^{d_0}$, в частности, A равномерно непрерывно.

Доказательство. Для доказательства 1) воспользуемся равенством (8.2) и неравенством Коши

$$|Ax| = \left(\sum_{i=1}^{d_1} \big[(Ax)^i\big]^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{d_1} \left|\sum_{j=1}^{d_0} a_{ij} x^j\right|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_0} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{d_0} (x^j)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_0} a_{ij}^2\right)^{1/2} |x| \, .$$

Отсюда, в частности, вытекает следующая оценка нормы линейного отображения через элементы его матрицы

$$\|A\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_0} a_{ij}^2\right)^{1/2} . \tag{8.4}$$

Для доказательства 2) возьмем произвольно $0 \neq x \in \mathbb{R}^{d_0}$, тогда $\left|\frac{x}{|x|}\right| = 1$ и по определению нормы

$$\frac{|Ax|}{|x|} = \left|A\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leqslant \|A\| \, .$$

3) следует из 2): $|Ax - Ay| = |A(x-y)| \leqslant \|A\| \cdot |x-y|$. $\square$

Лемма 8.2 *Если $A \in L\big(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\big)$ и $B \in L\big(\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{R}^{d_2}\big)$, то $B \circ A \in L\big(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_2}\big)$ и $\|B \circ A\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|$.*

Доказательство. Доказательство следует из утверждения 2) леммы 8.1: $|B(Ax)| \leqslant \|B\| \cdot |Ax| \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \cdot |x|$. $\square$

1.2. Дифференцируемые отображения

Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}^{d_1}$, $D \subset \mathbb{R}^{d_0}$. Для $i = 1, \ldots, d_1$ будем стандартно обозначать

$$f^i = \pi_i \circ f \tag{8.5}$$

и называть f^i i-й **компонентой** функции f.

Определение 8.2 *Функция f называется **дифференцируемой** в точке $a \in \operatorname{int} D$, если существует такое $A \in L(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1})$, что*

$$f(a+h) - f(a) = Ah + o(|h|), \quad h \to 0. \tag{8.6}$$

*Отображение $A \in L(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1})$ называется **производной** функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.*

Конечно, при $d_1 = 1$ мы получаем старое определение 7.4.

Лемма 8.3 *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}^{d_1}$, $D \subset \mathbb{R}^{d_0}$ дифференцируема в точке $a \in \operatorname{int} D$. Тогда*
1) производная $f'(a)$ определяется однозначно,
2) функция f непрерывна в точке a.

Доказательство. Доказательство такое же, как и в лемме 7.2. □

Лемма 8.4 *Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}^{d_1}$, $D \subset \mathbb{R}^{d_0}$, $a \in \operatorname{int} D$. Тогда следующие условия равносильны*
i) f дифференцируема в точке a,
ii) для каждого $i = 1, \dots, d_1$ i-я компонента f^i дифференцируема в точке a.
При этом $\pi_i \circ f'(a) = (\pi_i \circ f)'(a)$

Доказательство. □

Определение 8.3 *Если $G \subset \mathbb{R}^{d_0}$ — открытое множество, то класс функций, все компоненты которых принадлежат классу $C^1(G)$ (см. определение 7.6) будем обозначать $C^1(G, \mathbb{R}^{d_1}) = C^1(G)$.*

Определение 8.4 *Если функция f дифференцируема в точке $a \in \operatorname{int} D_f$, то матрица ее производной $f'(a)$ называется **матрицей Якоби** для f и обозначается $\mathbf{J}f(a)$.*

*Если $d_0 = d_1$, то $\mathbf{J}f(a)$ — квадратная матрица и $\det \mathbf{J}f(a)$ называется **якобианом** (определителем Якоби) для f в точке a.*

Упражнение 8.1 1) Пусть $f(x) = Ax + c$, где $x \in \mathbb{R}^{d_0}$, $A \in L(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1})$, $c \in \mathbb{R}$. Доказать, что f дифференцируема в каждой точке $a \in \mathbb{R}^{d_0}$ и $f'(a) = A$.
2) Найти производную функции $f(x) = (x^1)^2, \dots, (x^{d_0})^2$, $x \in \mathbb{R}^{d_0}$.
3) Функция класса $C^1(G, \mathbb{R}^{d_1})$ дифференцируема в каждой точке из G.
4) $\mathbf{J}f(a) = \left\{\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right\}_{i=1\dots d_1, j=1\dots d_0}$

Теорема 8.1 *Пусть функция $f : D_f \to \mathbb{R}^{d_1}$, $D_f \subset \mathbb{R}^{d_0}$ дифференцируема в точке $a \in \operatorname{int} D_f$, функция $g : D_g \to \mathbb{R}^{d_2}$, $f(D_f) \subset D_g$ дифференцируема в точке $b = f(a) \in \operatorname{int} D_g$.*

Тогда композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке a и

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a). \tag{8.7}$$

Доказательство. Запишем условия дифференцируемости

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\varepsilon_1(h)|h|\,, \quad \text{где } \varepsilon_1(h)=o(1) \quad \text{при} \quad h\to 0,$$

$$g(b+k)-g(b)=g'(b)k+\varepsilon_2(k)|k|\,, \quad \text{где } \varepsilon_2(k)=o(1) \quad \text{при} \quad k\to 0,$$

и обозначим $k=f(a+h)-f(a)$. Тогда (см. 2) в лемме 8.3) $k\to 0$ при $h\to 0$.

Рассмотрим

$$g(f(a+h))-g(f(a))=g(f(a)+k)-g(f(a))=g'(f(a))k+\varepsilon_2(k)|k|=$$

$$=g'(f(a))(f'(a)h+\varepsilon_1(h)|h|)+\varepsilon_2(k)|k|=$$

$$=g'(f(a))\circ f'(a)h+|h|\,g'(f(a))\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(k)|k|\,.$$

Далее в силу леммы 8.1

$$|g'(f(a))\varepsilon_1(h)|\leqslant \|g'(b)\||\varepsilon_1(h)|=o(1)$$

и

$$\varepsilon_2(k)|k|=o(|h|),$$

следовательно,

$$g(f(a+h))-g(f(a))=g'(f(a))\circ f'(a)h+o(|h|).\square$$

Равенство (8.7) удобно записывать в скалярной форме, в терминах частных производных компонент: если обозначить $F=g\circ f$, то

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(a)=\sum_{k=1}^{d_1}\frac{\partial g^i}{\partial x^k}(f(a))\frac{\partial f^k}{\partial x^j}(a) \tag{8.8}$$

где $i=1,\dots,d_2$, $j=1,\dots,d_0$.

§ 2. Теорема об обратной функции

2.1. Гомеоморфизмы

Пусть X,Y — топологические пространства. Взаимно однозначное отображение $f:X\to Y$ называется **гомеоморфизмом** (между X и Y), если f и f^{-1} непрерывны.

Наличие гомеоморфизма между двумя топологическими пространствами означает, что эти пространства ”топологически одинаковы”.

Упражнение 8.2

1) Если существует линейный гомеоморфизм между $\mathbb{R}^{d_0}$ и $\mathbb{R}^{d_1}$, то $d_0=d_1$.

2) Отображение $A\in L\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d\big)$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда оно не вырождено, то есть $\det A\neq 0$.

Теорема 8.2 (Браудера) *Если $d_0 \neq d_1$,то не существует гомсоморфизма между не пустыми открытыми множествами $E_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$ $(i = 0, 1)$.*

Эта замечательная теорема (которую мы не будем доказывать) говорит нам о том, что размерность является топологическим инвариантом, так как не меняется при гомеоморфных преобразованиях.

2.2. Теорема об обратной функции

В одномерном случае критерий обратимости был дан в теореме 3.11. Применяя его к непрерывно дифференцируемой функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $((a, b) \subset \mathbb{R})$ одной переменной, можно рассуждать так: если $f'(x_0) \neq 0$ в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$, то f' сохраняет знак в некоторой окрестности этой точки. По теореме 4.14 f строго монотонна и взаимно однозначна в этой окрестности. Важным в этом рассуждении является то, что мы не налагаем на функцию условий монотонности, которые имеют смысл только в одномерном случае. Поэтому для функций многих переменных мы можем попытаться вывести существование обратной функции, исходя из условий вида $f'(x_0) \neq 0$.

Теорема 8.3 *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $a \in G$ и функция $f : G \to \mathbb{R}^d$ принадлежит классу $C^1(G)$ и*

$$\det \mathbf{J}f(a) \neq 0. \tag{8.9}$$

Тогда существует окрестность U точки a со свойствами
1) $f|_U$ — биекция,
2) $V = f(U)$ — открытое множество,
3) $f^{-1} \in C^1(V)$ и для любого $y \in V$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(f'\right)^{-1}(x), \quad \text{где} \quad x = f^{-1}(y). \tag{8.10}$$

Доказательство. 1 шаг. Обозначим для краткости $A = f'(a)$ и рассмотрим разность $\varphi = f - A$. Тогда $\varphi \in C^1(G)$ и $\varphi'(a) = 0$ и найдется такая окрестность U точки a, что выполнены неравенства

$$\det \mathbf{J}f(x) \neq 0, \quad x \in U, \tag{8.11}$$

$$\left|\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2d\,\|A^{-1}\|}, \quad x \in U. \tag{8.12}$$

В силу (8.12), неравенства Коши и теоремы Лагранжа 7.1 для любых $x_1, x_2 \in U$

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = \left(\sum_{i=1}^{d} \left|\varphi^i(x_1) - \varphi^i(x_2)\right|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{d} \left|\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(\xi_i)(x_1^j - x_2^j)\right|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left| \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(\xi_i) \right|^2 \right)^{1/2} |x_1 - x_2| \leqslant \frac{1}{2\,\|A^{-1}\|} |x_1 - x_2|\,.$$

Отсюда и из неравенства $|Ax_1 - Ax_2| \geqslant \|A^{-1}\|^{-1} |x_1 - x_2|$ (см. 3) в лемме 8.1) получаем

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant |Ax_1 - Ax_2| - |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \geqslant \frac{1}{2\,\|A^{-1}\|} |x_1 - x_2|\,.$$

Следовательно, $f|_U$ — биекция U на $V = f(U)$.

Обозначим $\alpha = \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$, тогда последнее неравенство можно переписать в виде

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \alpha |x_1 - x_2|\,, \quad x_1, x_2 \in U. \tag{8.13}$$

Отметим, что в терминах функции $f^{-1} : V \to U$, обратной к $f|_U$, неравенство (8.13) можно переписать в виде

$$\left| f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) \right| \leqslant \frac{1}{\alpha} |y_1 - y_2|\,, \quad y_1, y_2 \in V. \tag{8.14}$$

Отсюда, в частности, следует, что функция $f^{-1} : V \to U$ непрерывна на V.

2 шаг. Докажем, что V открыто. Пусть $y_0 \in V$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$ и $\overline{B}(x_0, r) \subset U$. Покажем, что $B\big(y_0, \frac{\alpha r}{2}\big) \subset V$.

Пусть $y \in B\big(y_0, \frac{\alpha r}{2}\big)$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(x) = |y - f(x)|^2 = \sum_{i=1}^{d} \left| y^i - f^i(x) \right|^2, \quad x \in G.$$

Тогда $\psi \in C^1(G)$ и на компакте $\overline{B}(x_0, r)$ функция ψ достигает своей точной нижней грани. Отметим, что

$$\sqrt{\psi(x_0)} = |y - f(x_0)| = |y - y_0| < \frac{\alpha r}{2},$$

а при $|x - x_0| = r$ в силу (8.13)

$$\sqrt{\psi(x)} = |y - f(x)| \geqslant |f(x) - f(x_0)| - |y - y_0| \geqslant \alpha |x - x_0| - \frac{\alpha r}{2} = \frac{\alpha r}{2}.$$

Следовательно, $\inf \psi\big(\overline{B}(x_0, r)\big)$ достигается в некоторой внутренней точке $x \in \overline{B}(x_0, r)$ и эта точка x является точкой экстремума. Отсюда по лемме 7.7 получаем

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x^j}(x) = -2 \sum_{i=1}^{d} \big[y^i - f^i(x) \big] \, \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x).$$

Условие (8.11) показывает, что эта система имеет только тривиальное решение. То есть $y = f(x)$ и $y \in f(B(x_0, r)) \subset V$.

3 шаг. Докажем дифференцируемость обратной функции и равенство (8.10).

Пусть $y \in V$ и $y + k \in V$, $x = f^{-1}(y)$, $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$. Тогда (см. (8.14))

$$|h| = \left|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)\right| \leqslant \frac{|k|}{\alpha}$$

и $h \to 0$ при $k \to 0$. Запишем соотношение дифференцируемости функции f

$$k = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \varepsilon(h)|h|\,, \quad \varepsilon(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0$$

и подействуем на обе части отображением $(f')^{-1}(x)$:

$$h = (f')^{-1}(x)k - (f')^{-1}(x)(\varepsilon(h)|h|)$$

или

$$f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = (f')^{-1}(x)k - (f')^{-1}(x)(\varepsilon(h)|h|)\,,$$

причем

$$\left|(f')^{-1}(x)(\varepsilon(h)|h|)\right| \leqslant \left\|(f')^{-1}(x)\right\| |\varepsilon(h)||h| = o(|h|) = o(|k|)$$

при $k \to 0$.

Осталось показать, что $f^{-1} \in C^1(V)$. Но это вытекает из теоремы 8.1 о производной композиции. Точнее из равенства (8.8), примененного к тождественному отображению $\mathbb{R}^d$ $I = f^{-1} \circ f$, получаем

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{d_1} \frac{\partial (f^{-1})^i}{\partial y^k}(y) \frac{\partial f^k}{\partial x^j}(f^{-1}(y)) = \delta_{ij} \\ \\ i, j = 1, \ldots, d \end{cases}.$$

Отсюда, решая эту систему, например, по правилу Крамера, видим, что частные производные $\frac{\partial (f^{-1})^i}{\partial y^k}(y)$ непрерывны на V. $\square$

Отметим, далее, что утверждение теоремы 8.3 носит локальный характер — оно справедливо в некоторой окрестности точки a. По аналогии с одномерным случаем, где соответствующее утверждение имело глобальный характер (см. теорему 3.11), может создаться впечатление, что, налагая ограничение (8.9) глобально, мы сможем утверждать глобальную дифференцируемость обратной функции.

Следующий пример показывает, что это не так. Для функции

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)\,, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

якобиан

$$\mathbf{J}f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

не вырожден на всем $\mathbb{R}^2$. В то же время, эта функция не является глобально взаимно однозначной.

§ 3. Теорема о неявной функции

3.1. Постановка задачи о неявной функции

Пусть на прямоугольнике $I = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$ задана функция $f : I \to \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$f(x, y) = 0 \tag{8.15}$$

Может оказаться, что для каждого фиксированного $x \in (a, b)$ уравнение (8.15) имеет единственное решение $y = g(x)$. Тогда этим уравнением однозначно определяется функция g на интервале (a, b), для которой имеет место равенство

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Эта функция называется неявной функцией, определенной уравнением (8.15).

Но однозначная разрешимость уравнения не обязательно имеет место. Может случиться так, что решение не является единственным или, вообще, не существует. Так обстоит дело уже с простейшими уравнениями. Например,

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Здесь при $|x| > 1$ решений относительно y нет. Чтобы обеспечить разрешимость, приходится сужать область изменения, ограничиваясь значениями $|x| \leqslant 1$. Но для любого $x \in (-1, 1)$ решение не является единственным — их два $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Задачу о существовании неявной функции, определяемой уравнением естественно поставить следующим образом: пусть при $x = x_0 \in (a, b)$ это уравнение имеет решение $y_0 \in (c, d)$. При каких условиях можно гарантировать, что для x близких к x_0 найдется единственное y вблизи y_0, удовлетворяющее уравнению (8.15).

Эта задача имеет наглядный геометрический смысл. Уравнение определяет кривую на плоскости и мы ищем условия, при которых в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) эта кривая выражается явным уравнением.

Дифференциальное исчисление позволяет предвидеть условия, при которых это можно пытаться доказать. Если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), то асимптотически уравнение (8.15) близко к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Это уравнение однозначно разрешимо относительно y при условии $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Конечно, задача может быть обобщена на случай, когда x и y принадлежат евклидовым пространствам.

Если $x \in \mathbb{R}^{d_0}$, $y \in \mathbb{R}^{d_1}$, то через (x, y) будем обозначать $(d_0 + d_1)$-мерный вектор $(x^1, \ldots, x^{d_0}, y^1, \ldots, y^{d_1})$. Рассмотрим векторное уравнение относительно y

$$f(x, y) = 0, \tag{8.16}$$

где f — отображение открытого множества $G \subset \mathbb{R}^{d_0+d_1}$ в $\mathbb{R}^{d_1}$. Это векторное уравнение равносильно системе скалярных уравнений

$$\begin{cases} f^1(x^1,\ldots,x^{d_0},y^1,\ldots,y^{d_1}) = 0 \\ \ldots \\ f^{d_1}(x^1,\ldots,x^{d_0},y^1,\ldots,y^{d_1}) = 0 \end{cases} \tag{8.17}$$

относительно $y^1,\ldots,y^{d_1}$. Поставленная выше задача обобщается на случай уравнения (8.17). Из приведенных выше соображений можно придти к предположению о том, что разрешимость системы уравнений связана с невырожденностью матрицы $\left(\frac{\partial f^i}{\partial y^j}\right)$.

Введем обозначение

$$\frac{\partial(f^1,\ldots,f^{d_1})}{\partial(y^1,\ldots,y^{d_1})}(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial y^{d_1}}(x,y) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^{d_1}}{\partial y^1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial f^{d_1}}{\partial y^{d_1}}(x,y) \end{vmatrix}$$

и будем его называть якобианом функций $f^1,\ldots,f^{d_1}$ по переменным $y^1,\ldots,y^{d_1}$ в точке (x,y).

3.2. Основная теорема

Теорема 8.4 *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{d_0+d_1}$ — открытое множество, функция $f : G \to \mathbb{R}^{d_1}$ принадлежит классу $C^1(G)$ и для некоторой точки $(a,b) \in G$*

$$f(a,b) = 0, \quad \frac{\partial(f^1,\ldots,f^{d_1})}{\partial(y^1,\ldots,y^{d_1})}(a,b) \neq 0. \tag{8.18}$$

Тогда существуют окрестность U_a точки a и окрестность V_b точки b, удовлетворяющие условиям

1) для любого $x \in U_a$ существует единственная точка $y = g(x) \in V_b$, для которой $f(x,g(x)) = 0$,

2) отображение $g : U_a \to V_b$ принадлежит классу $C^1(U_a)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное отображение $\varphi : G \to \mathbb{R}^{d_0+d_1}$

$$\varphi(x,y) = (x, f(x,y))$$

и вместо уравнения $f(x,y) = 0$ будем рассматривать равносильное ему

$$\varphi(x,y) = (x,0). \tag{8.19}$$

Функция φ принадлежит классу $C^1(G)$. Ее якобиан

$$\mathbf{J}\varphi(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{d_0}} & \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial y^{d_1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^{d_1}}{\partial x^1} & \dots & \dots & \frac{\partial f^{d_1}}{\partial x^{d_0}} & \frac{\partial f^{d_1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial f^{d_1}}{\partial y^{d_1}} \end{vmatrix}=\frac{\partial(f^1,\dots,f^{d_1})}{\partial(y^1,\dots,y^{d_1})}$$

отличен от нуля в точке (a,b) в силу второго условия (8.18). Таким образом, выполнены все условия теоремы об обратной функции (теорема 8.3). По этой теореме существует открытый куб (ясно, что в теореме об обратной функции в качестве U можно взять куб)

$$Q=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{d_0+d_1}:\left|x^i-a^i\right|<\delta,\ \left|y^i-b^i\right|<\delta\right\}$$

с центром в точке (a,b), для которого

a) сужение $\varphi|_Q$ взаимно однозначно,

b) образ $R=\varphi(Q)$ открыт,

c) обратное отображение $\varphi^{-1}:R\to Q$ принадлежит классу $C^1(R)$.

Очевидно, что отображение φ^{-1} имеет вид

$$\varphi^{-1}(s,t)=(s,\psi(s,t)),\quad (s,t)\in R,$$

где ψ отображение класса $C^1(R)$ (так как φ оставляет первые d_0 координат вектора (x,y) неизменными, то и обратное отображение обладает этим свойством).

Куб Q можно представить как прямое произведение $Q=Q_a\times Q_b$, где Q_a — открытый куб в $\mathbb{R}^{d_0}$ с центром в точке a, а Q_b — открытый куб в $\mathbb{R}^{d_1}$ с центром в точке b.

Докажем существование решения уравнения (8.19). При фиксированном $x\in Q_a$ это уравнение имеет решение $y\in Q_b$ в том и только том случае, когда точка $(x,0)$ содержится среди значений функции φ на Q, то есть если $(x,0)\in R$.

Пусть

$$S=\{x:(x,0)\in R\}$$

Так как R открыто в $\mathbb{R}^{d_0+d_1}$, то и его сечение S открыто в $\mathbb{R}^{d_0}$. Кроме того, $f(a,b)=0$, поэтому $a\in S$. Значит найдется окрестность U_a точки a, $U_a\subset S$. Итак, для каждой точки $x\in U_a$ существует точка $y\in Q_b$, для которой $f(x,y)=0$.

Теперь докажем единственность решения уравнения (8.19). Пусть для точки $(x,y)\in Q$ выполнено равенство (8.19). Тогда

$$(x,y)=\varphi^{-1}(x,0)=(x,\psi(x,0))$$

и $y=\psi(x,0)$. То есть $y=g(x)\in Q_b$ определен однозначно, причем g — функция класса $C^1(U_a)$, так как $\psi\in C^1(R)$. $\square$

Теорема о неявной функции является одной из важнейших теорем математического анализа, которая имеет многочисленные приложения.

3.3. Вычисление производных неявной функции

Отметим в заключение, что производную и частные производные неявной функции можно найти, применяя правило дифференцирования композиции (теорема 8.1) к равенству $f(x, g(x)) = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j} + \sum\limits_{k=1}^{d_1} \dfrac{\partial f^i}{\partial y^k}\dfrac{\partial g^k}{\partial x^j} = 0 \\ \\ i = 1, \ldots, d_1, \quad j = 1, \ldots, d_0 \end{cases} \tag{8.20}$$

Из этой системы уравнений можно определить частные производные компонент неявной функции $\frac{\partial g^k}{\partial x^j}$.

Глава 9
МНОГООБРАЗИЯ

§ 1. Гладкие многообразия

1.1. Аффинные многообразия

Здесь мы напомним некоторые определения и факты из линейной алгебры.

Рангом матрицы называется наибольший из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы.

Пусть $A \in L(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1})$. Тогда **рангом** линейного отображения называется ранг его матрицы и обозначается $\operatorname{rank} A$. Ранг отображения совпадает с размерностью образа $A(\mathbb{R}^{d_0})$.

Множество
$$\operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^{d_0} : Ax = 0\} \tag{9.1}$$
называется ядром линейного отображения $A \in L(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1})$, а размерность этого линейного подпространства называется **дефектом** линейного отображения.

Следующая теорема известна из курса линейной алгебры.

Теорема 9.1 *Для любого отображения $A \in L(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1})$ сумма ранга и дефекта равна d_0.*

Пусть, далее, $d, p \in \mathbb{N}$, $p < d$, $A \in L(\mathbb{R}^{d}, \mathbb{R}^{d-p})$, $y \in \mathbb{R}^{d-p}$. Множество
$$H = H_{A,y} = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax = y\}$$
называется тогда **плоскостью** размерности p в $\mathbb{R}^d$. Если $y = 0$, то плоскость называется **однородной**.

Плоскости в $\mathbb{R}^d$ называются также **аффинными многообразиями**. Термин "многообразие" мы употребляем как обобщающий для терминов "кривая", "поверхность" для пространства $\mathbb{R}^d$. Аффинные многообразия представляют собой наиболее простые среди них — плоские. Сейчас термину "многообразие" будет дан точный смысл.

1.2. Гладкие многообразия

Гладкое многообразие в $\mathbb{R}^d$ размерности p — это множество, устроенное в окрестности каждой своей точки почти так же, как p-мерная плоскость. В этом смысл следующего определения.

Определение 9.1 *Пусть $1 \leqslant p < d$. Не пустое множество $M \subset \mathbb{R}^d$ называется **многообразием** размерности p, если для любой точки $a \in M$ существует окрестность U_a этой точки и функция $\varphi \in C^1(U_a, \mathbb{R}^{d-p})$, для которых*

1) $\operatorname{rank}\varphi'(x) = d - p$ *при всех* $x \in U_a$,

2) $M \cap U_a = \{x \in U_a : \varphi(x) = 0\}$.

Пара (U_a, φ) *называется в таком случае* ***картой****, содержащей точку* a. *Совокупность* $\{(U_a, \varphi)\}_{a \in M}$ *всех карт называется* ***атласом*** *многообразия.*

Поскольку в определении многообразия функция φ принадлежит классу C^1, то мы (чтобы помнить об этом) будем говорить о непрерывно дифференцируемом или гладком многообразии (или еще короче C^1-многообразии).

Другими словами, многообразие локально задается уравнением вида $\varphi(x) = 0$, где $\operatorname{rank}\varphi'(x) = d - p$ на U_a. Или, иначе, окрестность U_a "вырезает из многообразия кусок", описываемый уравнением $\varphi(x) = 0$.

Каждое векторное уравнение равносильно системе скалярных уравнений

$$\begin{cases} \varphi^1(x^1, \ldots, x^d) = 0 \\ \ldots \\ \varphi^{d-p}(x^1, \ldots, x^d) = 0 \end{cases} \tag{9.2}$$

.

Обычно гладкое многообразие размерности 1 называется гладкой кривой, многообразие размерности 2 — гладкой поверхностью, для размерности $d - 1$ употребляют термин "гиперповерхность". Многообразие размерности p можно рассматривать, как пересечение $d - p$ гиперповерхностей (см. (9.2)). Основное предположение о ранге гарантирует, что в пересечении не окажется "слипшихся кусков" размерности больше p.

Для следующей формулировки нам понадобится обозначение. Если $d \in \mathbb{N}$, то через $\mathbb{P}_d$ обозначим множество всех перестановок множества $\{1, 2, \ldots, d\}$ (то есть биекций $\{1, 2, \ldots, d\}$ на себя).

Теорема 9.2 *Пусть* $M \subset \mathbb{R}^d$, $M \neq \varnothing$. *Тогда следующие условия равносильны*

i) M — *гладкое многообразие размерности* p,

ii) для любой точки $a \in M$ *существуют такие*

— *перестановка* $\sigma \in \mathbb{P}_d$,

— *функция* g *класса* C^1 *в некоторой окрестности точки* $\left(a^{\sigma(1)}, \ldots, a^{\sigma(p)}\right)$ *со значениями в* $\mathbb{R}^{d-p}$ *и*

— *окрестность* U_a *точки* a,

что $M \cap U_a$ *совпадает со множеством точек, удовлетворяющих уравнениям*

$$\begin{cases} x^{\sigma(i)} = g^{i-p}\left(x^{\sigma(1)}, \ldots, x^{\sigma(p)}\right) \\ \qquad\qquad i = p+1, \ldots, d \end{cases}.$$

Доказательство. Необходимость сразу следует из теоремы о неявной функции. Достаточность очевидна — в определении многообразия можно взять

$$\begin{cases} \varphi^{i-p}(x) = g^{i-p}\left(x^{\sigma(1)}, \ldots, x^{\sigma(p)}\right) - x^{\sigma(i)} \\ \qquad\qquad i = p+1, \ldots, d \end{cases} \qquad \square$$

Упражнение 9.1
1) Гипербола $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$.
2) Объединение гиперболы и одной из ее асимптот

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}.$$

3) Пара пересекающихся прямых $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$.
4) Лемниската Бернулли $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\right\}$.
5) Сфера $S^{d-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\right\}$ в $\mathbb{R}^d$.

§ 2. Касательное и нормальное пространства

2.1. Касательное пространство

Напомним (см. определение 6.17), что расстоянием между точкой $x \in \mathbb{R}^d$ и множеством $S \subset \mathbb{R}^d$ называется

$$\operatorname{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} |x - y|.$$

Определение 9.2 *Вектор $h \in \mathbb{R}^d$ называется* ***касательным*** *к многообразию $M \subset \mathbb{R}^d$ в точке $a \in M$, если*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{dist}(a + th, M)}{t} = 0. \tag{9.3}$$

Другими словами, это означает, что расстояние от точки $a + th$ до многообразия M есть величина бесконечно малая высшего порядка, нежели расстояние от $a + th$ до точки касания a.

Лемма 9.1 *Пусть $M \subset \mathbb{R}^d$ — гладкое многообразие и $h \in \mathbb{R}^d$. Тогда следующие условия равносильны*

i) h —касательный вектор к M в точке $a \in M$,

ii) существует функция $\gamma : \mathbb{R} \to M$, дифференцируемая в точке 0, для которой

$$\gamma(0) = a, \quad \gamma'(0) = h.$$

Доказательство. Пусть $h \in \mathbb{R}^d$ — касательный вектор к M в точке $a \in M$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ найдется $x_t \in M$ со свойством

$$|a + th - x_t| < t^2 + \operatorname{dist}(a + th, M)$$

Положим $\gamma(t) = x_t$ при $t \neq 0$ и $\gamma(0) = a$.

Так как $|a + th - x_t| = o(t)$ при $t \to 0$ и

$$\lim_{t \to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x_t - a}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x_t - a - th}{t} + h = h,$$

то $\gamma'(0) = h$.

Обратно, если функция γ с нужными свойствами существует, то по определению дифференцируемости

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \gamma'(0)t + o(t), \quad t \to 0,$$

и

$$\frac{\operatorname{dist}(a+th, M)}{t} \leqslant \frac{|a+th-\gamma(t)|}{t} = \frac{o(t)}{t} = o(1).\square$$

Определение 9.3 *Множество всех касательных векторов к гладкому многообразию M в точке $a \in M$ называется* ***касательным пространством*** *к M в точке $a \in M$ и обозначается $T_a = T_a(M)$.*

Теорема 9.3 *Пусть $M \subset \mathbb{R}^d$ — гладкое многообразие, $a \in M$ и (U_a, φ) — карта, содержащая a. Тогда*

$$T_a(M) = \operatorname{Ker}\varphi'(a). \tag{9.4}$$

Доказательство. Пусть $h \in T_a(M)$ и функция γ взята из леммы 9.1, то есть $\gamma(0) = a$ и $\gamma'(0) = h$.

Если $t \in \mathbb{R}$ мало, то $a + th \in U_a$. Так как $\gamma(t) \in M$, то $f(t) = \varphi(\gamma(t)) = 0$ при малых t, а по теореме о производной композиции 8.1 $\varphi'(\gamma(t)) \circ \gamma'(t) = 0$ и $\varphi'(a)h = \varphi'(\gamma(0)) \circ \gamma'(0) = 0$.

Обратно, пусть $\varphi'(a)h = 0$. Докажем, что $h \in T_a(M)$.

Можно считать, что отличен от нуля минор $\mathbf{J}\varphi(a)$, состоящий из последних столбцов. Условимся записывать векторы $x \in \mathbb{R}^d$ в виде

$$x = (x', x''), \quad x' = (x^1, \dots, x^p), \quad x'' = (x^{p+1}, \dots, x^d)$$

и положим

$$f(x) = (x', \varphi(x))$$

(как в доказательстве теоремы 8.4 о неявной функции). Тогда f удовлетворяет условиям теоремы об обратной функции (теорема 8.4) и найдется такая окрестность V_a точки a, что $f(V_a) = W$ — открытое множество и

$$|f(x) - f(y)| \geqslant \alpha|x - y|, \quad x, y \in V_a$$

(α — некоторое положительное число).

Так как $\varphi(a) = 0$, то $(a', 0) \in W$ и при малых t будет $(a' + th', 0) \in W$. Поэтому найдется $x_t \in V_a$ со свойством $f(x_t) = (a' + th', 0)$ и мы получаем

$$\operatorname{dist}(a+th, M) \leqslant |a+th-x_t| \leqslant \frac{1}{\alpha}|f(a+th) - f(x_t)| = \frac{|\varphi(a+th)|}{\alpha}.$$

Но $\varphi(a+th) = \varphi(a) + t\varphi'(a)h + o(t) = o(t)$ при $t \to 0$, так как $\varphi'(a)h = 0$ и $\varphi(a) = 0$. Следовательно, $t \in T_a(M)$. $\square$

Упражнение 9.2

1) Касательное пространство к многообразию размерности p — это p-мерное подпространство в $\mathbb{R}^d$.

2) Многообразие размерности p не может быть одновременно многообразием размерности q с $q \neq p$.

3) Каждое из следующих условий определяет все касательные векторы h:

$$\varphi'(a)h = 0,$$

$$\big(\nabla\varphi^i(a), h\big) = 0, \quad i = 1, \ldots, d-p,$$

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial\varphi^i}{\partial x^k}(a)h^k = 0, \quad i = 1, \ldots, d-p.$$

2.2. Нормальное пространство

Два вектора $a, b \in \mathbb{R}^d$ будем называть **ортогональными**, если $(a, b) = 0$. Краткая запись для этого $a \perp b$.

Вектор $a \in \mathbb{R}^d$ называется **ортогональным ко множеству** $E \subset \mathbb{R}^d$, если он ортогонален любому элементу из E (краткая запись $a \perp E$).

Если $L \subset \mathbb{R}^d$ — векторное подпространство, то множество всех векторов, ортогональных к L называется **ортогональным дополнением** к L и обозначается $L^\perp$.

Легко видеть, что $L^\perp$ — векторное подпространство в $L \subset \mathbb{R}^d$, причем

$$\dim L + \dim L^\perp = d.$$

Каждый вектор $x \in \mathbb{R}^d$ однозначно представим в виде $x = x' + x''$, где $x' \in L$, $x'' \in L^\perp$.

Определение 9.4 *Вектор $h \in \mathbb{R}^d$ называется* ***нормальным*** *к многообразию M в точке $a \in M$, если $h \perp T_a(M)$. Множество всех нормальных векторов называется* ***нормальным пространством*** *для многообразия M в точке a и обозначается $N_a(M)$.*

Другими словами, нормальное пространство — это ортогональное дополнение к касательному пространству.

Лемма 9.2 *Пусть $M \subset \mathbb{R}^d$ — C^1-многообразие размерности p, (U_a, φ) — карта, содержащая точку $a \in M$. Тогда векторы*

$$\nabla\varphi^i(a), \quad i = 1, \ldots d-p \tag{9.5}$$

образуют базис нормального пространства $N_a(M)$.

Доказательство. Действительно, координаты этих векторов образуют строки матрицы производной $\varphi'(a)$, имеющей ранг $d-p$. Следовательно, векторы (9.5) линейно независимы и образуют базис нормального пространства $N_a(M)$, имеющего размерность $d-p$. $\square$

2.3. Касательная плоскость

Определение 9.5 ***Касательной плоскостью*** *к многообразию M в точке $a \in M$ называется множество*

$$\Pi = \{x = a + h : h \in T_a(M)\}.$$

Если (U_a, φ) — карта, то касательная плоскость определяется уравнением

$$\varphi'(a)(x-a) = 0$$

или, что то же самое, системой уравнений

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k}(a)(x^k - a^k) = 0, \quad i = 1, \ldots, d-p.$$

Касательную плоскость можно было бы определить соотношением

$$\lim_{x \to a, x \in \Pi} \frac{\operatorname{dist}(x, M)}{|x-a|} = 0.$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

2.4. Касательные к кривым

Пусть $M \subset \mathbb{R}^d$ — гладкая кривая (многообразие размерности 1) и (U_a, φ) — карта для $a \in M$, то есть в окрестности U_a множество $M \cap U_a$ задается векторным уравнением

$$\varphi(x) = 0$$

или скалярными уравнениями

$$\begin{cases} \varphi^i(x) = 0, \\ i = 1, \ldots, d-1 \end{cases}$$

причем в каждой точке ранг производной $\varphi'(a)$ равен $d-1$, это равносильно тому, что векторы $\nabla\varphi^i(a)$ $(i = 1, \ldots, d-1)$ линейно независимы. Касательная прямая определяется системой уравнений

$$\begin{cases} (\nabla\varphi^i(a), x-a) = 0 \\ i = 1, \ldots, d-1 \end{cases}$$

Если размерность $d = 2$, то локальное уравнение кривой имеет вид $\varphi(x, y) = 0$. Уравнение касательной в точке (a, b)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b)(y-b) = 0.$$

Согласно предположению о ранге по крайней мере одна из компонент вектора

$$\nabla\varphi(a,b)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,b),\frac{\partial\varphi}{\partial y}(a,b)\right).$$

отлична от 0 и этот вектор является нормальным к кривой.

Если размерность $d=3$, то кривая локально определяется уравнениями

$$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$$

Тогда уравнения касательной прямой в точке (a,b,c)

$$\begin{cases}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y-b)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z-c)=0\\ \frac{\partial\psi}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial\psi}{\partial y}(y-b)+\frac{\partial\psi}{\partial x}(z-c)=0\end{cases}$$

(все частные производные вычислены в точке (a,b,c)). Нормальные векторы —

$$\nabla\varphi(a,b,c),\quad \nabla\psi(a,b,c).$$

Упражнение 9.3

1) Гипербола $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2-y^2=1\}$. Уравнение касательной в точке (a,b)

$$2a(x-a)-2b(y-b)=0$$

или $ax-by=1$.

2) Кривая Вивиани

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x^2+y^2=x\end{cases}\qquad (x\neq 1)$$

Уравнения касательной прямой (после упрощений) имеют вид

$$\begin{cases}ax+by+cz=0\\ (2a-1)x+2by=a\end{cases}$$

2.5. Касательная плоскость к поверхности

Пусть поверхность $M\subset\mathbb{R}^3$ в окрестности точки (a,b,c) определяется уравнением

$$\varphi(x,y,z)=0.$$

Тогда уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y-b)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z-c)=0.$$

Вектор $\nabla\varphi(a,b,c)$ является нормальным.

Например, для эллипсоида

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

уравнение касательной плоскости в точке (a, b, c)

$$\frac{ax}{\alpha^2} + \frac{by}{\beta^2} + \frac{cz}{\gamma^2} = 1.$$

В частном случае, когда поверхность задана явным уравнением $z = f(x, y)$, уравнение касательной плоскости в точке (a, b, c) преобразуется к виду

$$z = c + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

§ 3. Экстремум на многообразии (условный экстремум)

3.1. Определение условного экстремума

Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $M \subset G$ — C^1-многообразие размерности p и задана функция $f : G \to \mathbb{R}$. Рассмотрим вопрос об экстремальных значениях функции f на многообразии M.

Определение 9.6 *Будем говорить, что функция f имеет* ***условный максимум*** *в точке $a \in M$, если существует окрестность U_a точки a, для которой*

$$\forall x \in U_a \cap M \quad f(x) \leqslant f(a). \tag{9.6}$$

Если окрестность U_a можно выбрать так, что

$$\forall x \in U_a \cap M \quad f(x) < f(a). \tag{9.7}$$

то a называется точкой ***строгого условного максимума****.*

Заменяя в (9.6) и (9.7) знак неравенства на противоположный, получим определения условного минимума и строгого условного минимума.

Объединяющий термин для условного максимума и минимума — **условный экстремум**.

Важно подчеркнуть, что в определении условного экстремума учитываются только те значения функции из достаточно малой окрестности точки, которые лежат на многообразии . Если функция имеет в точке "безусловный" локальный экстремум, то она имеет и условный экстремум на любом многообразии, содержащем эту точку. Но обратное утверждение неверно. Это показывает следующий пример.

Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = xy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

и многообразие

$$M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}.$$

Так как $f(x,x) = x^2$, то в точке $(0,0)$ функция имеет строгий условный минимум. Аналогично на многообразии

$$M_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\right\}.$$

функция имеет строгий условный максимум. Следовательно, "безусловного" экстремума в точке $(0,0)$ функция не имеет.

Теорема 9.4 *Пусть функция f имеет условный экстремум в точке a многообразия M и дифференцируема в этой точке. Тогда*

$$\forall\, h \in T_a(M) \quad f'(a)h = 0. \tag{9.8}$$

Доказательство. Пусть $h \in T_a(M)$ — касательный вектор. По лемме 9.1 существует такая функция $\gamma : \mathbb{R} \to M$, что $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = h$. Так как f имеет в точке a условный экстремум, то функция $g = f \circ \gamma$ имеет экстремум в точке $t = 0$. Кроме того, по теореме 8.1 композиция g дифференцируема в точке $t = 0$ и $g'(0) = f'(a)\gamma'(0)$ Но тогда по лемме Ферма (лемма 4.2) $g'(0) = 0$, следовательно, $f'(a)h = 0$. □

3.2. Метод множителей Лагранжа

Здесь мы дадим обоснование практического метода нахождения точек условного экстремума, называемого методом множителей Лагранжа.

Теорема 9.5 *Пусть $M \subset \mathbb{R}^d$ — C^1-многообразие размерности p, (U_a, φ) — карта, содержащая точку $a \in M$. Пусть еще задана функция $f : U_a \to \mathbb{R}$, дифференцируемая в точке a.*

Тогда если f имеет в точке a условный экстремум на M, то существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-p}$, что производная функции

$$F(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{d-p} \lambda_k \varphi^k(x), \quad x \in U_a \tag{9.9}$$

в точке a равна 0.

Доказательство. В силу теоремы 9.3 для любого касательного вектора $h \in T_a(M)$ выполнено $f'(a)h = 0$, следовательно, $(\nabla f(a), h) = 0$ для всех $h \in T_a(M)$. Это означает, что $\nabla f(a)$ — нормальный вектор к многообразию M в точке a. По лемме 9.2 векторы $\nabla \varphi^k(a)$ $(k = 1, \ldots, d-p)$ образуют базис нормального пространства $N_a(M)$. Поэтому $\nabla f(a)$ можно разложить по этому базису и найдутся такие числа $\mu_1, \dots, \mu_{d-p}$, что

$$\nabla f(a) = \sum_{k=1}^{d-p} \mu_k \nabla \varphi^k(a).$$

Полагая $\lambda_k = -\mu_k$, получаем $\nabla F(a) = 0$, а это и означает, что $F'(a) = 0$. □

Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-p}$ из теоремы 9.5 называются **множителями Лагранжа**. Они определяются однозначно, так как вектор $\nabla f(a)$ однозначно разлагается по базису нормального пространства.

На этой теореме основан следующий метод, позволяющий найти все точки, в которых функция может иметь условный экстремум.

Многообразие задается уравнениями

$$\varphi^k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, d-p$$

(которые называют **уравнениями связи**). Точка a (удовлетворяющая уравнениям связи, то есть принадлежащая многообразию) условного экстремума функции f ищется следующим образом. Вводится вспомогательная функция

$$F(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{d-p} \lambda_k \varphi^k(x)$$

(**функция Лагранжа**), где $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-p}$ — неопределенные множители.

Координаты точки $x = (x^1, \dots, x^d)$ и множители $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-p}$ определяем из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) + \sum\limits_{k=1}^{d-p} \lambda_k \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}(x) = 0, & i = 1, \dots, d \\ \varphi^j(x) = 0, & j = 1, \dots, d-p \end{cases} \tag{9.10}$$

На самом деле нет необходимости решать эту систему полностью. Множители Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-p}$ играют лишь вспомогательную роль, их можно исключить и свести данную систему к системе из d уравнений, относительно d неизвестных — координат точки $x = (x^1, \dots, x^d)$.

3.3. Достаточные условия

Подчеркнем еще раз, что метод Лагранжа связан только с необходимыми условиями экстремума. Он позволяет определить такое множество точек $E \subset M$ (множество решений x системы (9.10)), что в $M \setminus E$ нет точек условного экстремума. Но не все точки из E обязаны быть точками условного экстремума.

Для решения вопроса, действительно ли эти точки являются точками условного экстремума, нужны дополнительные исследования. Это можно сделать следующим образом. По теореме 9.2 на многообразии в некоторой окрестности точки a, исследуемой на экстремум, часть координат можно выразить через остальные

$$\begin{cases} x^{\sigma(i)} = g^{i-p}\big(x^{\sigma(1)}, \ldots, x^{\sigma(p)}\big) \\ \qquad\qquad\qquad i = p+1, \ldots, d \end{cases}.$$

Подставив эти выражения в $f(x^1, \ldots, x^d)$, получим функцию $F(x^{\sigma(1)}, \ldots, x^{\sigma(p)})$ от p переменных. К этой функции в точке $\big(a^{\sigma(1)}, \ldots, a^{\sigma(p)}\big)$ можно применить уже известные достаточные условия обычного экстремума (см. теорему 7.5).

Часть III

3 семестр

Глава 10
ТЕОРИЯ РЯДОВ

§ 1. Основные понятия теории рядов

Мы уже знакомились с понятием сходимости числового ряда (см. определение 4.5). В этой главе мы будем изучать его систематически. Начнем с напоминания основных определений.

1.1. Основное определение

Если $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ — последовательность чисел, то символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{10.1}$$

называют **рядом**.

С каждым рядом (10.1) свяжем последовательность сумм

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

которые называются его **частичными суммами**.

Определение 10.1 *Ряд (10.1) называется* ***сходящимся****, если сходится последовательность его частичных сумм, то есть существует число $s \in \mathbb{R}$, для которого*

$$\lim_{n\to\infty} |s_n - s| = 0.$$

В этом случае s называется ***суммой ряда*** *и мы пишем $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.*

Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, то ряд называется **расходящимся**.

Итак, по определению вопрос о сходимости ряда сводится к вопросу о сходимости последовательности его частичных сумм. Обратно, если задана последовательность $\{s_k\} \subset \mathbb{R}$, то, полагая

$$a_1 = s_1, \quad a_k = s_k - s_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots),$$

получаем ряд, для которого $\{s_k\}$ является последовательностью частичных сумм. Таким образом, вопрос о сходимости последовательности — вопрос о сходимости некоторого ряда. Следовательно, рассмотрение рядов — это лишь новая форма изучения последовательностей. Но такой подход дает нам новые возможности как при установлении существования предела, так и при его вычислении. Мы увидим, что теория рядов является мощным средством как в математическом анализе, так и в его приложениях.

Упражнение 10.1

1) Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a$ с постоянными слагаемыми сходится тогда и только тогда, когда $a = 0$.

2) Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ (сумма геометрической прогрессии, $a \neq 0$) сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$. Если $|q| < 1$, то $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (гармонический ряд) расходится.

5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ расходится.

1.2. Абсолютная и условная сходимость

Определение 10.2 *Ряд (10.1) называется* ***сходящимся абсолютно****, если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \,. \tag{10.2}$$

Если ряд (10.1) сходится, а ряд (10.2) расходится, то говорят, что ряд (10.1) ***сходится условно****.*

1.3. Остатки

Сходимость ряда не меняется от добавления, удаления или изменения любого конечного числа его слагаемых. Придадим этому утверждению точный смысл.

Определение 10.3 *Для $m \in \mathbb{N}$ ряд $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ называется m-м* ***остатком*** *ряда (10.1).*

Если остаток $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ сходится, то его сумму будем обозначать r_m.

Упражнение 10.2

1) Если ряд (10.1) сходится, то сходится любой его остаток и $s = s_m + r_m$. Если сходится какой-либо из остатков ряда (10.1), то сходится и ряд (10.1).

2) Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходятся к a и b соответственно, то сходится любая их линейная комбинация $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha x_k + \beta y_k)$ и ее сумма равна $\alpha a + \beta b$.

3) Сходимость ряда (10.1) равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n > m \geqslant N_\varepsilon \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon. \tag{10.3}$$

(критерий Коши сходимости ряда).

4) Из абсолютной сходимости ряда (10.1) следует его сходимость. Обратное неверно.

5) Если ряд (10.1) сходится, то

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0. \tag{10.4}$$

Другими словами условие, (10.4) необходимо для сходимости ряда (10.1). Обратное утверждение неверно.

Сходимость ряда может быть обусловлена двумя главными причинами: во-первых, скоростью убывания $|a_k|$, во-вторых, "интерференцией" (взаимным сокращением) слагаемых a_k, имеющих различные знаки, в частичных суммах s_n, не позволяющей частным суммам колебаться слишком сильно.

Вопрос об абсолютной сходимости связан лишь с первой из этих причин и сводится к исследованию сходимости неотрицательных числовых рядов, которой мы и будем сейчас заниматься.

§ 2. Неотрицательные числовые ряды

В этом параграфе мы рассматриваем только ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k \geqslant 0. \tag{10.5}$$

2.1. Критерий сходимости

Для рядов (10.5)последовательность частичных сумм возрастает:

$$s_n = s_{n-1} + a_n \geqslant s_{n-1}.$$

Поэтому из теоремы 2.8 вытекает

Лемма 10.1 *Сходимость ряда (10.5) равносильна ограниченности последовательности частичных сумм (сверху).*

2.2. Признаки сравнения

Лемме 10.1 можно придать ряд других форм, более удобных для дальнейших приложений.

Теорема 10.1 (признак сравнения) *Если*

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geqslant k_0 \quad 0 \leqslant a_k \leqslant b_k, \tag{10.6}$$

то

1) из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$,

2) из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство. Конечно, можно считать, что неравенство (10.6) выполнено для всех $k \in \mathbb{N}$ (см. упражнение 10.2.3)). Следовательно, $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k$ $(n \in \mathbb{N})$ и надо применить лемму 10.1. □

Следующая теорема обычно называется признаком сравнения в предельной форме.

Теорема 10.2 *Если последовательности* $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ *положительны и существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \quad l > 0, \tag{10.7}$$

то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. При условии (10.7) существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\left|\frac{a_k}{b_k} - l\right| < \frac{l}{2} \quad (k \geqslant k_0).$$

Следовательно,

$$\frac{l}{2} b_k \leqslant a_k \leqslant \frac{3l}{2} b_k \quad (k \geqslant k_0)$$

и надо применить теорему 10.1. □

Лемма 10.2 *Если последовательности* $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ *положительны и*

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geqslant k_0 \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k}. \tag{10.8}$$

то

1) из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *следует сходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$,

2) из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *следует расходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство. Как и в теореме 10.1 можно считать, что неравенство из (10.8) выполнено для всех $k \geqslant 0$ (считаем $a_0 = b_0 = 1$). Почленно перемножая эти неравенства, получим $a_k \leqslant b_k$ $(k \geqslant 1)$. Утверждение леммы вытекает теперь из теоремы 10.1. □

2.3. Признаки сравнения с конкретными рядами

Выбирая в качестве одного из рядов некоторый конкретный ряд, сходимость или расходимость которого нами уже установлена, мы можем получать различные условия сходимости рядов. Иллюстрацией может служить

Следствие 10.1 (признак Коши с корнем) *Если* $a_k \geqslant 0$ *и*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} - C, \tag{10.9}$$

то

1) при $C < 1$ *ряд (10.5) сходится,*

2) при $C > 1$ *ряд (10.5) расходится,*

3) при $C = 1$ *признак не работает.*

Доказательство. 1) Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q = C + \varepsilon < 1$. Тогда (см. теорему 2.11) начиная с некоторого номера выполнено неравенство $\sqrt[k]{a_k} < C + \varepsilon = q$ или $a_k \leqslant q^k$. Наше утверждение следует теперь из упражнения 10.1.2).

2) По теореме 2.11 $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[k_i]{a_{k_i}} = C$ для некоторой последовательности $\{k_i\} \subset \mathbb{N}$, следовательно, $a_{k_i} \geqslant 1$, начиная с некоторого номера, и не выполнено необходимое условие сходимости ряда (см. упражнение 10.2.4)).

3) Упражнения 10.1.3) и 10.1.4) показывают, что при $C = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться. □

Теорема 10.3 (Куммера) *Пусть $c_k > 0$ и*

$$K_k = c_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1}.$$

Тогда

1) если существует такое $\delta > 0$, что начиная с некоторого номера $K_k \geqslant \delta$, то ряд (10.5) сходится,

2) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c_k}$ расходится и начиная с некоторого номера $K_k \leqslant 0$, то ряд (10.5) расходится.

Доказательство. 1) Так как $K_k \geqslant \delta$ $(k \geqslant k_0)$, то

$$a_{k+1} \leqslant \frac{1}{\delta}(a_k c_k - a_{k+1} c_{k+1}).$$

Сложим эти неравенства

$$\sum_{k=k_0+1}^{n} a_k \leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{k=k_0}^{n-1} (a_k c_k - a_{k+1} c_{k+1}) = \frac{1}{\delta}(a_{k_0} c_{k_0} - a_n c_n) \leqslant \frac{a_{k_0} c_{k_0}}{\delta}.$$

Следовательно, частные суммы ряда (10.5) ограничены.

2) В этом случае

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant \frac{1/c_{k+1}}{1/c_k} \quad (k \geqslant k_0)$$

и утверждение вытекает из леммы 10.2. □

Следствие 10.2 (признак Даламбера) *Пусть существует предел*

$$D = \lim_{k\to\infty} D_k, \quad D_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Тогда

1) при $D < 1$ ряд (10.5) сходится,

2) при $D > 1$ ряд (10.5) расходится,

3) при $D = 1$ признак не работает.

Доказательство. В признаке Куммера надо взять $c_k = 1$, тогда

$$K_k = \frac{1}{D_k} - 1$$

и все вытекает из теоремы 10.3. □

Следствие 10.3 (признак Раабе) *Пусть существует предел*

$$R = \lim_{k\to\infty} R_k, \quad R_k = k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right).$$

Тогда

1) при $R > 1$ ряд (10.5) сходится,

2) при $R < 1$ ряд (10.5) расходится,

3) при $R = 1$ признак не работает.

Доказательство. В признаке Куммера надо взять $c_k = k$, тогда

$$K_k = k\frac{a_k}{a_{k+1}} - (k+1) = k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) - 1 = R_k - 1$$

и опять все вытекает из теоремы 10.3. □

Следствие 10.4 (признак Бертрана) *Пусть существует предел*

$$B = \lim_{k\to\infty} B_k, \quad B_k = \ln k\left[k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) - 1\right].$$

Тогда

1) при $B > 1$ ряд (10.5) сходится,

2) при $B < 1$ ряд (10.5) расходится,

3) при $B = 1$ признак не работает.

Доказательство. В признаке Куммера надо взять $c_k = k\ln k$, тогда

$$\sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k\ln k} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k\ln k} \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2(i+1)} \to \infty.$$

Кроме того,

$$K_k = k\ln k\frac{a_k}{a_{k+1}} - (k+1)\ln(k+1) = B_n - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

и опять все вытекает из теоремы 10.3. □

2.4. Ряды с монотонными слагаемыми

Здесь мы рассмотрим ряды с монотонными слагаемыми и докажем для них два специальных признака.

Теорема 10.4 (Коши) *Пусть $a_k \geqslant 0$ и $a_k \downarrow$. Тогда ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \sum_{i=0}^{\infty} 2^i a_{2^i}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Доказательство основано на "разбиении на двоичные блоки". Для заданного $n \in \mathbb{N}$ найдем так $m \in \mathbb{N}$, чтобы $2^m < n \leqslant 2^{m+1}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{2^{m+1}} a_k = a_1 + \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} a_k \leqslant a_1 + \sum_{i=0}^{m} 2^i a_{2^i}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant a_1 + \sum_{k=2}^{2^m} a_k \geqslant a_1 + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} a_k \geqslant a_1 + \sum_{i=0}^{m-1} 2^i a_{2^{i+1}} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} 2^i a_{2^i}.$$

Осталось применить лемму 10.1. $\square$

Напомним также признак сходимости, связанный с несобственными интегралами (см. теорему 5.23).

Теорема 10.5 (интегральный признак Коши) *Пусть функция f положительна и убывает на $[1, \infty)$. Тогда следующие условия равносильны*

i) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится,

ii) несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Доказательство. Для доказательства надо суммировать очевидные неравенства

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$$

по $k = 2, \ldots, n$:

$$\int_2^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_1^{n} f(x)\,dx.$$

Наше утверждение вытекает из теоремы 5.20 и леммы 10.1. $\square$

Полезно отметить, что рассуждение, проведенное при доказательстве теоремы 5.23 даст возможность оценить при ее условиях скорость убывания остатков ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ в случае его сходимости

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_n^{\infty} f(x)\,dx. \qquad (10.10)$$

и роста его частных сумм в случае его расходимости:

$$\int_2^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)\,dx. \tag{10.11}$$

Упражнение 10.3
1) Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1},$$

расходится при $\alpha < 1$ и

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

2) Ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \sim \frac{(\ln n)^{1-\alpha}}{\alpha-1},$$

расходится при $\alpha < 1$ и

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \sim \frac{(\ln n)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

§ 3. Признаки условной сходимости

В этом параграфе мы будем рассматривать здесь сходимость рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k, \tag{10.12}$$

где $\{a_k\} \subset \mathbb{R}, \{b_k\} \subset \mathbb{R}$

3.1. Преобразование Абеля

Рассмотрим один важный технический прием, который часто встречается при оценке осциллирующих сумм и является дискретным аналогом интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пусть $B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$, тогда при $n > m \geqslant 0$

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m+1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} B_k =$$

$$= a_n B_n - a_{m+1} B_m + \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.$$

Итак, мы получили тождество

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_{m+1} B_m + \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k, \tag{10.13}$$

которое называется **преобразованием Абеля**. В нем $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, но вместо таких сумм можно рассмотреть любые B_n, удовлетворяющие условиям $B_k - B_{k-1} = b_k$. В частности, в (10.13) можно взять

$$B_k = \sum_{i=l+1}^{k} b_i, \tag{10.14}$$

где $0 \leqslant l \leqslant m-1$ — фиксированный номер.

3.2. Признаки Дирихле и Абеля

Использование преобразование Абеля является главной частью доказательства следующей важной теоремы.

Теорема 10.6 (признак Дирихле) *Пусть* $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$, $\{b_k\} \subset \mathbb{R}$ *и выполнены условия*
1) $a_k \downarrow 0$,
2) $\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |\sum_{k=1}^{n} b_k| \leqslant M$.
Тогда ряд (10.12) сходится.

Доказательство. Используя преобразование Абеля (10.13) с $B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$, получаем

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k x_k\right| \leqslant a_n |B_n| + a_{m+1}|B_m| + \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})|B_k| \leqslant 2M a_{m+1}.$$

В силу критерий Коши сходимости ряда (упражнение 10.2.3)), из которого вытекает требуемое. □

Доказательство показывает также, что при условиях теоремы Дирихле справедливы следующие оценки для остатков ряда (10.12)

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k\right| \leqslant 2M a_{n+1}. \tag{10.15}$$

Следующая теорема, близкая к теореме 10.6, несколько отличается от нее условиями.

Теорема 10.7 (признак Абеля) *Пусть для последовательностей* $\{b_k\} \subset X$, $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ *выполнены условия*

1) $\{a_k\}$ *монотонна и ограничена,*

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится.*

Тогда ряд (10.12) сходится.

Доказательство. Дело сводится к признаку Дирихле: запишем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a)\, b_k + a \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

где $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$. К первому ряду справа применима теорема 10.6, а второй сходится по условию □

Следствие 10.5 (признак Лейбница) *Пусть* $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ *и* $a_k \downarrow 0$. *Тогда ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ *сходится.*

Доказательство. Надо воспользоваться признаком Дирихле с $X = \mathbb{R}$ и $b_k = (-1)^k$. □

Для упражнения ниже необходимо использовать тождества

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \tag{10.16}$$

$$\widetilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \tag{10.17}$$

Функции D_n и $\widetilde{D}_n$ называются n-м ядром Дирихле и n-м сопряженным ядром Дирихле соответственно. Они будут играть важную роль ниже при изучении рядов Фурье.

Упражнение 10.4

1) Если $a_k \downarrow 0$, то ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ сходится при любом $x \neq \pi m$, $m \in \mathbb{N}$.

2) Если $b_k \downarrow 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ сходится при любом $x \in \mathbb{R}$.

3) Оценка остатка (10.15) в признаке Дирихле может быть усилена

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}. \tag{10.18}$$

§ 4. Ассоциативность и коммутативность в теории числовых рядов

В этом параграфе мы рассматриваем числовые ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k \in \mathbb{R}. \tag{10.19}$$

Будем использовать следующую терминологию. Любая строго возрастающая последовательность $\{k_i\} \subset \mathbb{N}$, $k_0 = 0$, порождает **ряд со скобками**

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} a_k. \tag{10.20}$$

Если $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \tag{10.21}$$

называется **перестановкой** ряда (10.19).

4.1. Ассоциативность

Если ряд (10.19) сходится, то любой его ряд со скобками (10.20) сходится, причем к той же сумме. Это следует из того, что при

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad s_j^* = \sum_{i=0}^{j} \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} a_k,$$

будет $s_j^* = s_{k_{j+1}}$, то есть последовательность частичных сумм ряда со скобками является подпоследовательностью частных сумм ряда. Пример ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(1-1)$ показывает, что обратное утверждение неверно. Но если все слагаемые в каждой скобке имеют один и тот же знак (возможно, зависящий от скобки), то из сходимости ряда со скобками следует сходимость ряда (10.19). Это следует из неравенств

$$\min\{s_j^*, s_{j+1}^*\} \leqslant s_n \leqslant \max\{s_j^*, s_{j+1}^*\} \quad \text{при} \quad k_j < n \leqslant k_{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

4.2. Коммутативность

Теорема 10.8 *Если числовой ряд сходится абсолютно, то сходится любая его перестановка, причем к той же сумме.*

Доказательство. Сначала предположим, что $a_k \geqslant 0$. Рассмотрим произвольную перестановку (10.21) ряда (10.19) и положим

$$m_n = \max\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\},$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} a_k \leqslant A$$

Следовательно $A_\sigma \leqslant A$, где A — сумма ряда (10.19), а A_σ — сумма перестановки (10.21).

Так как исходный ряд (10.19) является перестановкой ряда (10.21), то справедливо также и неравенство $A \leqslant A_\sigma$. Поэтому $A = A_\sigma$.

В общем случае для $a \in \mathbb{R}$ положим

$$a^+ = \begin{cases} a & \text{если} \quad a \geqslant 0 \\ 0 & \text{если} \quad a \leqslant 0 \end{cases}, \quad a^- = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{если} \quad a \leqslant 0 \end{cases}. \tag{10.22}$$

Тогда справедливы равенства

$$a = a^+ - a^-, \quad |a| = a^+ + a^-$$

и ряд (10.19) распадается в разность рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-,$$

к каждому из которых применим рассмотренный случай. $\square$

Упражнение 10.5

1) Ряд (10.19) сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\pm$.

2) Если ряд (10.19) сходится условно, то оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\pm$ расходятся.

Теорема 10.9 (Римана) *Если ряд (10.19) сходится условно, то для любых $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ существует перестановка (10.21), для которой*

$$\varliminf_{n\to\infty} s_n^\sigma = a, \quad \varlimsup_{n\to\infty} s_n^\sigma = b, \quad \textit{где} \quad s_n^\sigma = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}.$$

Здесь s_n^σ — n-я частичная сумма ряда (10.21).

Доказательство. Отметим, что в силу упражнения 10.5.2) оба ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\pm$$

расходятся. Сначала рассмотрим случай, когда a и b конечны и $b \geqslant 0$.

Положим $l_0 = r_0 = 0$ и найдем номера $l_1 > l_0$ и $r_1 > r_0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$b < \sum_{k=l_0+1}^{l_1} a_k^+ \leqslant b + a_{l_1}^+,$$

$$a - a_{r_1}^- \leqslant \sum_{k=l_0+1}^{l_1} a_k^+ - \sum_{k=r_0+1}^{r_1} a_k^- < a.$$

Это возможно сделать, так как ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\pm$ расходятся.

Продолжая процесс по индукции, построим последовательности индексов $l_i \uparrow \infty$ и $r_i \uparrow \infty$ так, чтобы при $i = 1, 2, \ldots$

$$b < \sum_{j=0}^{i-1} \left(\sum_{k=l_j+1}^{l_{j+1}} a_k^+ - \sum_{k=r_j+1}^{r_{j+1}} a_k^- \right) + \sum_{k=l_i+1}^{l_{i+1}} a_k^+ \leqslant b + a_{l_{i+1}}^+,$$

$$a - a_{r_{i+1}}^- \leqslant \sum_{j=0}^{i} \left(\sum_{k=l_j+1}^{l_{j+1}} a_k^+ - \sum_{k=r_j+1}^{r_{j+1}} a_k^- \right) < a.$$

Тогда ясно, что для ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=l_j+1}^{l_{j+1}} a_k^+ - \sum_{k=r_j+1}^{r_{j+1}} a_k^- \right) \tag{10.23}$$

(с вычеркнутыми нулями и раскрытыми круглыми скобками) верхний предел последовательности частичных сумм равен b, а нижний — a. Это же верно и для ряда (10.23) без скобок, так как его частичные суммы монотонно меняются между частичными суммами ряда (10.23).

Если $b \leqslant 0$, то рассуждение такое же, только сначала начинаем набирать отрицательные слагаемые.

Рекомендуем самостоятельно провести доказательство для случая, когда одно из a и b (или оба) бесконечны. □

Следствие 10.6 *Если числовой ряд сходится условно, то для любого $a \in \mathbb{R}$ существует перестановка этого ряда, после которой он сходится к a.*

4.3. Умножение рядов

Если заданы два ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$, то можно составить формальное произведение этих рядов

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j \quad — \tag{10.24}$$

ряд состоящий из всевозможных произведений. Для придания смысла этому обозначению необходимо указать, как образуются частичные суммы этого ряда, а этот вопрос зависит от порядка слагаемых в нем.

Слагаемые в этом ряде можно располагать различным способом. Примером может служить следующий

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \tag{10.25}$$

с произвольным упорядочиванием во внутренней сумме. Тогда частичная сумма этого ряда с номером $\frac{n(n+1)}{2}$ является суммой всех произведений $a_i b_j$, для которых $i + j \leqslant n$.

Другой часто встречающийся способ упорядочивания (квадратный) дает частные суммы с номерами n^2 вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_j \tag{10.26}$$

Однако, порядок слагаемых может оказать, вообще говоря, влияние как на его сходимость, так и на величину суммы ряда. Это вытекает из теоремы 10.9.

Следующая теорема показывает, что для абсолютно сходящихся рядов дело обстоит благополучно.

Теорема 10.10 (Коши об умножении рядов) *Если ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

сходятся абсолютно, то их произведение (10.24) также сходится абсолютно и его сумма равна произведению сумм этих рядов.

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad A, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \quad A', \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_j \quad B, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \quad B' \tag{10.27}$$

Рассмотрим ряд из произведений

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i(k)} b_{j(k)}. \tag{10.28}$$

расположенных в произвольно заданном порядке и докажем его абсолютную сходимость. Для этого введем частичные суммы

$$H_n \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_{i(k)} b_{j(k)} \right|$$

и обозначим

$$p_n \quad \max_{1 \leqslant k \leqslant n} i(k), \quad p_n \quad \max_{1 \leqslant k \leqslant n} j(k).$$

Тогда ясно, что

$$H_n \leqslant \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{j=1}^{q_n} \left| a_{i(k)} b_{j(k)} \right| = \sum_{i=1}^{p_n} \left| a_{i(k)} \right| \sum_{j=1}^{q_n} \left| b_{j(k)} \right| \leqslant AB$$

и ряд (10.28) из произведений сходится абсолютно. По теореме 10.8 его сумма не зависит от порядка следования слагаемых.

При "квадратном" порядке его слагаемых частичные суммы с номерами n^2 равны

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \to AB, \quad n \to \infty$$

Поэтому в таком (а значит и в любом) порядке (10.28) сходится к произведению сумм. $\square$

§ 5. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Пусть D — произвольное множество и $f_n : D \to \mathbb{R}$ — последовательность функций на D. Основной вопрос, который будет нас интересовать, это — в какой мере свойства элементов последовательности (непрерывность, интегрируемость и т.д.) будут наследоваться ее пределом. Конечно, для этого следует предположить, что предел существует на D, то есть

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{\varepsilon,x} \quad \forall n \geqslant N_{\varepsilon,x} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{10.29}$$

Предел последовательности дифференцируемых функций может оказаться не дифференцируемой и даже разрывной функцией. Это показывает уже такой простой пример последовательности функций $f_n(x) = (1 - x^2)^n$, $x \in [-1, 1]$. Каждая из функций последовательности имеет производные любого порядка на $[-1, 1]$. Однако, предельная функция

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 < |x| \leqslant 1, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

разрывна в точке 0.

Поэтому должны возникнуть какие-то дополнительные условия, обеспечивающие сохранение тех или иных свойств элементов последовательности функций.

5.1. Определение равномерной сходимости

В этом параграфе мы изучим новое понятие, играющее важную роль в рассматриваемом вопросе.

Определение 10.4 *Последовательность функций называется* ***сходящейся равномерно*** *на множестве D, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{10.30}$$

Ряд называется сходящимся равномерно на множестве D, если этим свойством обладает последовательность его частичных сумм.

Формально переход от (10.29) к (10.30) означает устранение зависимости $N_{\varepsilon,x}$ от $x \in D$. В какой-то степени это напоминает переход от непрерывности функции в каждой точке множества к ее равномерной непрерывности на этом множестве.

Теорема 10.11 (критерий Коши равномерной сходимости) *Условия* *i) последовательность $f_n : D \to \mathbb{R}$ сходится к функции f равномерно на множестве D,*

ii) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant N_\varepsilon \quad \forall\, x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ равносильны.

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Условие ii) в этой теореме носит название "равномерного условия Коши" на множестве D.

Упражнение 10.6 Доказать, что следующие условия равносильны

i) последовательность $f_n : D \to \mathbb{R}$ сходится к функции f равномерно на множестве D,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| \quad 0$,

iii) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant N_\varepsilon \quad \sup_{x\in D}|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

5.2. Перестановка пределов

Понятие равномерной сходимости играет важную роль в вопросе о перестановке двух предельных переходов. Пусть D — произвольное топологическое пространство.

Теорема 10.12 (о перестановке пределов) *Пусть $a \in D$ предельная точка для D и последовательность $f_n : D \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям*

1) f_n сходится к некоторой функции f равномерно в некоторой проколотой окрестности точки a,

2) для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b_n$.

Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Другими словами, утверждение теоремы означает, что

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

Доказательство. Запишем условие равномерной сходимости f_n в окрестности U_a° (см. ii) в теореме 10.11)

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant N_\varepsilon \quad \forall\, x \in U_a^\circ \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

и перейдем в последнем неравенстве к пределу при $x \to a$, получая

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant N_\varepsilon \qquad |b_n - b_m| \leqslant \varepsilon$$

Отсюда по критерию Коши для числовых последовательностей (см. теорему 2.7) следует существование $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Выберем теперь n таким образом, чтобы

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad x \in U_a^\circ$$

и при таком n выберем окрестность V_a так, что

$$|f_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad x \in V_a^\circ$$

В итоге получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V_a \quad \forall x \in V_a^\circ \quad |f(x) - b| < \varepsilon,$$

а это и означает требуемое. □

5.3. Признаки равномерной сходимости рядов

В следующем параграфе мы рассмотрим важнейшие приложения теоремы 10.12 к вопросу о функциональных свойствах предела последовательности и суммы ряда. А сейчас остановимся на достаточных условиях равномерной сходимости ряда, в которых D — произвольное множество.

Теорема 10.13 (признак Вейерштрасса) *Если последовательности чисел $a_k \geqslant 0$ и функций $f_k : D \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям*
1) $|f_k(x)| \leqslant a_k$ $(x \in D,\ k \in \mathbb{N})$,
2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится,
то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на D.

Доказательство. Доказательство сразу вытекает из результатов упражнений 10.2.4) и 10.6. □

Отметим, что $a_k = \sup_{x\in D} |f_k(x)|$ — наименьшая последовательность, для которой выполнено условие 1) признака Вейерштрасса. Отсюда следует более простая формулировка признака Вейерштрасса: *если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x\in D} |f_k(x)|$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на множестве D.

Теорема 10.14 (признак Дирихле) *Если последовательности чисел a_k и функций $f_k : D \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям*
1) $a_k \downarrow 0$,
2) $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad |\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leqslant M$,
то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)$ сходится равномерно на D.

Доказательство. Доказательство вытекает из теоремы 10.6 и упражнений 10.6. □

Аналогично из упражнений 10.6 и теоремы 10.7 вытекает

Теорема 10.15 (признак Абеля) *Если последовательности чисел $a_k \geqslant 0$ и функций $f_k : D \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям*
1) $\{a_k\}$ монотонна и ограничена,
2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на D,
то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)$ сходится равномерно на D.

§ 6. Функциональные свойства предела последовательности и суммы ряда

6.1. Непрерывность

В этом пункте D — любое топологическое пространство.

Теорема 10.16 *Если последовательность функций $f_n : D \to \mathbb{R}$ сходится к функции $f : D \to \mathbb{R}$ равномерно в некоторой окрестности точки $a \in D$ и все функции f_n непрерывны в точке, то и f непрерывна в точке a.*

Доказательство. Это утверждение является непосредственным следствием теоремы 10.12. □

Напомним (см. определение 3.2), что символом $C(D)$ мы всегда обозначаем класс всех функций, непрерывных на топологическом пространстве D.

Непосредственно из теоремы вытекает

Следствие 10.7 *Если последовательность $\{f_n\} \subset C(D)$ сходится равномерно на D к функции $f : D \to \mathbb{R}$, то $f \in C(D)$.*

Следствие 10.8 *Если последовательность $\{f_k\} \subset C(D)$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на D, то его сумма непрерывна на D.*

Это — перевод следствия 10.7 на язык рядов.

Утверждение, обратное к следствию 10.7 неверно. Это показывает пример последовательности $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Тем не менее, обратное утверждение справедливо при весьма широких предположениях.

Теорема 10.17 (Дини) *Если K — компактное топологическое пространство и выполнены условия*

1) $f, f_n \in C(K)$ $(n \in \mathbb{N})$,

2) $f_n(x) \uparrow f(x)$ при любом $x \in K$.

Тогда $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на K.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\forall\, x \in K \quad \exists\, n_{\varepsilon,x} \quad f(x) - f_{n_{\varepsilon,x}}(x) < \varepsilon.$$

В силу непрерывности разности $f - f_{n_{\varepsilon,x}}$

$$\forall\, x \in K \quad \exists\, U_x \quad \forall\, t \in U_x \quad f(t) - f_{n_{\varepsilon,x}}(t) < \varepsilon.$$

Из открытого покрытия $\{U_x\}_{x \in K}$ компакта можно выделить конечное подпокрытие $U_{x_1}, \dots, U_{x_m}$. Положим

$$N_\varepsilon = \max\{n_{\varepsilon,x_1}, \dots, n_{\varepsilon,x_m}\}.$$

Тогда при $n \geqslant N_\varepsilon$ и $x \in K$, если $x \in U_{x_i}$, то

$$f(x) - f_n(x) \leqslant f(x) - f_{N_\varepsilon}(x) \leqslant f(x) - f_{n_\varepsilon, x_i}(x) < \varepsilon$$

и $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на K. $\square$

Следствие 10.9 *Пусть K — компактное топологическое пространство. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, где $f_k \in C(K)$, $f_k(x) \geqslant 0$, сходится на K к функции $f \in C(K)$, то он сходится равномерно на K.*

6.2. Интегрирование

Напомним, что $R[a, b]$ — класс функций, интегрируемых по Риману на $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Теорема 10.18 *Пусть $\{f_n\} \subset R[a, b]$ и $\{f_n\}$ сходится к функции f равномерно на $[a, b]$. Тогда $f \in R[a, b]$ и справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

Доказательство. Доказательство проведем с помощью критерия интегрируемости (теорема 5.4, см. также (5.15)).

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Зафиксировав такое n по теореме 5.4 найдем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k(f_n)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для любого разбиения $\Pi : a = x_0 < x_1 < \ \ldots \ x_m = b$ отрезка $[a, b]$ с $\lambda_\Pi < \delta$. Тогда для всех таких разбиений

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k(f)(x_k - x_{k-1}) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{m} \sup_x |f_n(x) - f(x)| (x_k - x_{k-1}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \omega_k(f_n)(x_k - x_{k-1}) \leqslant 2(b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Опять применяя теорему 5.4, получаем $f \in R[a, b]$.

Далее по теореме 5.9

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \sup_x |f_n(x) - f(x)|\, (b-a) \to 0 \quad (n \to \infty). \square$$

Следующая теорема — перевод теоремы 10.18 на язык рядов.

Теорема 10.19 *Пусть* $\{f_k\} \subset R[a,b]$ *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *сходится равномерно на* $[a,b]$. *Тогда его сумма интегрируема на* $[a,b]$, *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$ *сходится и справедливо равенство*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

6.3. Дифференцирование

Теорема 10.20 *Пусть последовательность* $\{f_n\}$ *удовлетворяет условиям*
1) f_n *дифференцируема на* $[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$,
2) $f_n(x_0)$ *сходится для некоторого* $x_0 \in [a,b]$,
3) $f_n'(x)$ *сходится равномерно на* $[a,b]$.
Тогда $f_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a,b]$ *к дифференцируемой функции* f *и*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x), \quad x \in [a,b].$$

Доказательство. Сначала докажем равномерную сходимость последовательности $f_n(x)$, опираясь на критерий Коши (теорема 10.11):

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |[f_n(x) - f_n(x_0)] - [f_m(x) - f_m(x_0)] + [f_n(x_0) - f_m(x_0)]| \leqslant$$

$$\leqslant |[f_n(x) - f_n(x_0)] - [f_m(x) - f_m(x_0)]| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| =$$

$$= |f_n'(\xi_{nm}) - f_m'(\xi_{nm})| \cdot |x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|\,,$$

где $\theta_{nm} \in (0,1)$. Отсюда и из условий 2) и 3) получаем равномерную сходимость $f_n(x)$.

Далее при фиксированном $x \in [a,b]$ рассмотрим функции

$$\varphi_n(h) = \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}.$$

Последовательность $\varphi_n(h)$ сходится равномерно на множестве $a - x < h < b - x$, $h \neq 0$. Это следует из условия 3) теоремы и соотношений

$$|\varphi_n(h) - \varphi_m(h)| = |f_n'(x + \theta_{nm}h) - f_m'(x + \theta_{nm}h)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - f_m'(t)|\,,$$

где $\theta_{nm} \in (0,1)$. Кроме того, $\lim\limits_{h\to 0} \varphi_n(h) = f_n'(x)$. Следовательно, по теореме 10.12 о перестановке пределов

$$\lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty} \varphi_n(h) = \lim_{n\to\infty}\lim_{h\to 0} \varphi_n(h)$$

или

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).\square$$

Теорема 10.21 *Пусть последовательность $\{f_k\}$ удовлетворяет условиям*
1) f_k дифференцируема на $[a,b]$ $(k \in \mathbb{N})$,
2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ сходится для некоторого $x_0 \in [a,b]$,
3) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$.
Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, его сумма дифференцируема на $[a,b]$ и для $x \in [a,b]$ справедливо равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

Это — перевод теоремы 10.20 на язык рядов.

§ 7. Степенные ряды

7.1. Радиус и интервал сходимости

Определение 10.5 ***Степенным рядом*** *будем называть ряд вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k \tag{10.31}$$

Числа c_k называются коэффициентами степенного ряда, а $x_0 \in \mathbb{R}$ — фиксированное число.

Мы уже встречались с такими рядами в теореме 4.13, где речь шла о рядах Тейлора элементарных функций.

Следующая теорема показывает, что множество точек сходимости степенного ряда не может быть произвольным и имеет весьма специфическую структуру.

Теорема 10.22 (Коши-Адамара)
1) Если последовательность $\sqrt[k]{|c_k|}$ не ограничена, то ряд (10.31) расходится при всех $x \neq x_0$.
2) Если последовательность $\sqrt[k]{|c_k|}$ ограничена и $l = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} \neq 0$, то ряд (10.31) сходится при всех x с $|x-x_0| < \frac{1}{l}$ и расходится при всех x с $|x-x_0| > \frac{1}{l}$.
3) Если $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$, то ряд (10.31) сходится при любом $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. В случае 1) для любого $x \neq x_0$ $\sqrt[k]{|c_k|}|x| > 1$ для бесконечно многих $k \in \mathbb{N}$ и общий член ряда (10.31) не стремится к 0 — не выполнено необходимое условие сходимости ряда (см. упражнение 10.2.4).

В случае 2) при $|x-x_0| < \frac{1}{l}$ применим к ряду признак Коши с корнем (следствие 10.1). Если же $|x-x_0| > \frac{1}{l}$, то (как и в случае 1)) не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Наконец, в случае 3) при любом $x \in \mathbb{R}$ по признаку Коши с корнем ряд (10.31) сходится. □

Теперь естественно ввести следующее понятие.

Определение 10.6 *Число $R \in \mathbb{R}$ называется* ***радиусом сходимости*** *степенного ряда (10.31), если этот ряд сходится при всех x с $|x - x_0| < R$ и расходится при всех x с $|x - x_0| > R$.*

Если ряд (10.31) сходится только при $x = x_0$, то считаем $R = 0$, а если (10.31) сходится при любом $x \in \mathbb{R}$, то считаем $R = \infty$.

Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется ***интервалом сходимости*** *степенного ряда.*

Теорема Коши-Адамара доказывает существование радиуса сходимости и дает формулу для его вычисления.

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} \tag{10.32}$$

(мы считаем здесь $\frac{1}{0} = \infty$ и $\frac{1}{\infty} = 0$).

Отметим, что на концах интервала сходимости (то есть, если $|x - x_0| = R$) может иметь место как сходимость, так и расходимость ряда (10.31). Это видно из примеров

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Интервал сходимости во всех случаях $(-1, 1)$. Для первого из рядов на обоих концах интервала сходимости ± 1 степенной ряд расходится, для второго — сходится. Наконец, в третьем случае при $x = -1$ ряд сходится, а при $x = 1$ — расходится.

7.2. Свойства суммы степенного ряда

Теорема 10.23 *Пусть для ряда (10.31) $R > 0$. Тогда для любого $r \in (0, R)$ ряд (10.31) сходится равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$.*

Доказательство. Пусть $r_1 = \frac{r+R}{2} < R$, тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k r_1^k$ сходится и $|c_k|\, r_1^k \leqslant M$ для некоторого $M > 0$ и всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда при $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$

$$\left|c_k (x - x_0)^k\right| \leqslant |c_k|\, r^k = |c_k|\, r_1^k \cdot \left(\frac{r}{r_1}\right)^k \leqslant M\left(\frac{2r}{R + r}\right)^k$$

и по признаку Вейерштрасса (теорема 10.13) ряд (10.31) сходится равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$. □

Теорема 10.24 *Пусть степенной ряд (10.31) имеет положительный радиус сходимости $R > 0$. Тогда его сумма f на интервале сходимости*

$(x_0 - R, x_0 + R)$ *имеет производные любого порядка и для коэффициентов ряда справедливы равенства*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{10.33}$$

Доказательство. Отметим сначала, что при формальном почленном дифференцировании степенного ряда его радиус не меняется (так как $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$).

Поэтому на каждом отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$, $r \in (0, R)$, можно применить теорему 10.21 (ее условия выполнены по теореме 10.23) из которой вытекает как дифференцируемость суммы ряда f на $(x_0 - R, x_0 + R)$, так и равенства

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1)\dots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n}, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

для ее производных. Полагая в них $x = x_0$, получаем формулы (10.33). □

7.3. Аналитические функции

Другими словами, утверждение теоремы 10.24 можно сформулировать так: сумма степенного ряда (10.31) с ненулевым радиусом сходимости бесконечно дифференцируема на интервале сходимости. В таком случае ряд (10.31) имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{10.34}$$

и его естественно назвать **рядом Тейлора** функции f.

В связи с этим введем новое понятие. Будем говорить, что функция f **аналитична** в точке x_0, если она является суммой степенного ряда (10.31) с положительным радиусом сходимости.

Для того, чтобы записать ряд Тейлора (10.34) достаточно потребовать существования у функции f производных любого порядка в некоторой окрестности точки x_0. В таком случае естественно спросить, обязан ли этот ряд сходиться к $f(x)$. Ответ на этот вопрос отрицателен. Мы покажем это с помощью очень интересной функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{10.35}$$

Нетрудно убедиться, что эта функция непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Для $x \neq 0$ это очевидно, а для $x = 0$ следует из равенства

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Аналогично убеждаемся, что наша функция дифференцируема в каждой точке. Конечно, опять достаточно проверить дифференцируемость в точке $x = 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{h} = 0.$$

Продолжая этот процесс, мы убедимся, что функция имеет производные любого порядка в каждой точке $x\in\mathbb{R}$, причем $f^{(k)}(0) = 0$ для всех $k = 0,1,\ldots$. Таким образом, ряд Тейлора для нашей функции с центром в точке $x = 0$ — это ряд из нулей, который сходится к нулю при любом $x\in\mathbb{R}$, и его сумма совпадает с $f(x)$ только при $x = 0$.

7.4. Теорема Абеля

Теорема 10.25 (Абель) *Если степенной ряд (10.31) сходится в точке $x = t$, то его сумма непрерывна на отрезке $[x_0, t]^*$.*

Доказательство. Считаем, что $t - x_0 > 0$ (случай $t - x_0 < 0$ сводится к этому с помощью замены $x \to -x$). Для доказательства используем метод доказательства признака Дирихле (см теорему 10.6), основанный на преобразовании Абеля (10.13) (см.также (10.14))

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = a_n\sum_{i=m}^{n} b_i - a_{m+1}b_m + \sum_{k=m+1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\sum_{i=m}^{k} b_i,$$

где $a_k = \left(\frac{x-x_0}{t-x_0}\right)^k$, $b_k = c_k(t-x_0)^k$, $x\in[x_0,t]$. В этих обозначениях

$$\sum_{k=m+1}^{n} c_k(x-x_0)^k = \sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{x-x_0}{t-x_0}\right)^k c_k(t-x_0)^k = \sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k.$$

Так как a_k убывают при каждом x, то

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} c_k(x-x_0)^k\right| \leqslant a_n\left|\sum_{i=m}^{n} b_i\right| + a_{m+1}|b_m| + \sum_{k=m+1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\left|\sum_{i=m}^{k} b_i\right|$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N_ε, что $|\sum_{i=m}^{n} b_i| < \frac{\varepsilon}{3}$ при всех $n > m \geqslant N_\varepsilon$. Отсюда и из того, что $\sup_{x\in[x_0,t]} a_k \leqslant 1$, получаем

$$\sup_{x\in[x_0,t]}\left|\sum_{k=m+1}^{n} c_k(x-x_0)^k\right| < \varepsilon \quad (n > m \geqslant N_\varepsilon).$$

Этим доказана равномерная сходимость ряда (10.31) на $[x_0,t]^*$. Непрерывность его суммы на этом отрезке вытекает из следствия 10.8 □

Эта теорема представляет интерес только в случаях, когда $t = x_0 \pm R$. Иначе (при $|t - x_0| < r$) непрерывность суммы ряда следует из теоремы 10.24.

Укажем конкретный пример применения теоремы Абеля. Рассмотрим ряд Тейлора логарифмической функции (см. теорему 4.13)

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \quad |x| < 1,$$

Мы уже знаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ сходится (см. следствие 10.5). Из теоремы Абеля вытекает теперь, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

§ 8. Пространство непрерывных функций

8.1. C как нормированное пространство

Пусть D — топологическое пространство.

Определение 10.7 *Множество всех ограниченных и непрерывных функций $f : D \to \mathbb{R}$ называется **пространством непрерывных функций** (на D) и обозначается $C(D)$.*

Легко проверить, что $C(D)$ является линейным пространством относительно естественных поточечных операций сложения функций и умножения их на числа. Если ввести в нем норму равенством

$$\|f\|_C = \sup_{x \in D} |f(x)|,$$

то оно становится нормированным (а, следовательно, и метрическим — см. (6.9)) пространством, которое является также полным (см. определение 6.20). Последнее вытекает из равномерного критерия Коши (теорема 10.11). Сходимость в этом пространстве совпадает с равномерной сходимостью (см. упражнение 10.6).

Если D компактно, то в силу теоремы 6.10 ограниченность в определении 10.7 можно опустить.

Далее мы рассмотрим некоторые интересные (и важные) свойства пространства $C(D)$, ограничиваясь случаем $D = [0, 1]$.

8.2. Приближение функций многочленами

Произвольная непрерывная функция представляется весьма общим объектом. Поэтому удивительным кажется то, что график любой такой функции можно сколь угодно точно имитировать графиком некоторого алгебраического многочлена. Точная формулировка этого составляет содержание следующей теоремы, которая имеет многочисленные применения в различных областях анализа.

Теорема 10.26 (Вейерштрасс) *Для любой функции $f \in C[0,1]$ существует последовательность алгебраических многочленов p_n, сходящаяся к f равномерно на $[0,1]$, то есть*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - p_n(x)| = 0$$

Доказательство. Сначала будем дополнительно предполагать, что $f(0) = f(1) = 0$. Доопределим функцию f вне отрезка $[0,1]$, равной 0. Тогда продолженная функция непрерывна на $\mathbb{R}$.

Пусть $q_n(x) = c_n(1-x^2)^n$, где постоянная c_n выбрана так, чтобы

$$\int_{-1}^{1} q_n(x)\,dx = 1$$

Оценим сверху c_n

$$1 = \int_{-1}^{1} q_n(x)\,dx = c_n \int_{-1}^{1} \bigl(1-x^2\bigr)^n\,dx \geqslant 2c_n \int_{0}^{1} (1-x)^n\,dx \geqslant \frac{c_n}{n}$$

и $c_n \leqslant n$.

Положим

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)q_n(t)\,dt = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)q_n(t)\,dt = \int_{0}^{1} f(t)q_n(t-x)\,dt.$$

Легко проверить, что последнее выражение — алгебраический многочлен порядка $2n$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ так, что из $|x-y| < \delta$ следует $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (это возможно по теореме 3.9 Кантора). Пусть еще $M = \sup f([0,1])$. Тогда

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \int_{-1}^{1} |f(x) - f(x+t)|\,q_n(t)\,dt = \int_{|t|<\delta} + \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant 1} \leqslant$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1} q_n(t)\,dt + 2Mc_n\bigl(1-\delta^2\bigr)^n < \frac{\varepsilon}{2} + 2Mn\bigl(1-\delta^2\bigr)^n < \varepsilon$$

при достаточно больших n.

Чтобы избавиться от предположения $f(0) = f(1) = 0$, рассмотрим новую функцию

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)],$$

которая удовлетворяет этому дополнительному предположению. По доказанному находим последовательность полиномов p_n, равномерно сходящуюся к g. Тогда последовательность полиномов $p_n(x) + f(0) + x[f(1) - f(0)]$ сходится равномерно к f. $\square$

8.3. Непрерывные функции без производной

Здесь мы приведем замечательный пример непрерывной функции, которая не имеет производной ни в одной точке. Первые примеры такого рода были построены Больцано и Вейерштрассом. Приводимый пример принадлежит Ван-дер-Вардену.

Пусть $\varphi(x) = |x|$ при $|x| \leqslant \frac{1}{2}$. Продолжим эту функцию 1-периодически на $\mathbb{R}$ и положим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}\varphi\big(4^k x\big) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Так как $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{1}{2}$, по признаку Вейерштрасса (теорема 10.13) ряд сходится равномерно и по следствию 10.8 его сумма принадлежит $C(\mathbb{R})$.

Покажем, что f не имеет производной ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$. Для этого возьмем произвольно $n \in \mathbb{N}$ и найдем число $h_n = \pm 4^{-n-1}$ так, чтобы

$$|f_n(x+h_n) - f_n(x)| = |h_n|\,.$$

Тогда

$$|f_k(x+h_n) - f_k(x)| = \begin{cases} |h_n| & k = 0, \dots, n \\ \\ 0 & k = n+1, \dots \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \pm 1.$$

Последняя сумма — число той же четности, что и $n+1$, поэтому отношение слева не имеет предела.

Глава 11

ИНТЕГРАЛЫ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Элементарная теория

Мы будем заниматься изучением свойств функций вида

$$I(y) = \int_X f(x,y)\,dx, \tag{11.1}$$

где $X \subset \mathbb{R}$ — некоторый промежуток (ограниченный или нет), $y \in Y$, где $Y \subset \mathbb{R}$ — некоторое множеств (множество параметров). Интеграл (11.1) называется **параметрическим** интегралом (или интегралом, зависящим от параметра). Нас, как обычно, будут интересовать такие свойства этих функций, как непрерывность дифференцируемость и интегрируемость.

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда $X = [a,b]$ и $Y = [c,d]$, при этом систематически используем обозначение $R = [a,b] \times [c,d]$.

1.1. Непрерывность интеграла от параметра

Теорема 11.1 *Если функция $f \in C(R)$, то функция $y \mapsto I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.*

Доказательство. Так как прямоугольник R замкнут и ограничен, то он является компактом (см. определение 6.28) и по теореме 6.9 функция f равномерно непрерывна на R. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$ для любых пар $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in R$, удовлетворяющих условию $(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 < \delta^2$. Поэтому если $y_0 \in [c,d]$, то для всех $|y - y_0| < \delta$ и всех $x \in [a,b]$ выполнено неравенство

$$|I(y) - I(y_0)| \leqslant \int_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx < \varepsilon(b-a).$$

Следующая теорема дает обобщение только что доказанной, для случая, когда и пределы интегрирования зависят от параметра.

Теорема 11.2 *Пусть функции $\alpha, \beta \in C[c,d]$, причем $a \leqslant \alpha(y), \beta(y) \leqslant b$ для всех $y \in [c,d]$. Тогда если $f \in C([a,b]\times[c,d])$, то функция*

$$y \mapsto I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx, \quad y \in [c,d] \tag{11.2}$$

непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство. Сначала запишем приращение нашей функции в удобном виде

$$I(y)-I(y_0)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx-\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx=$$

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}[f(x,y)-f(x,y_0)]\,dx+\left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y_0)\,dx-\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx\right]=$$

$$=\Delta_1(y)+\Delta_2(y).$$

Зададим $\varepsilon>0$ и пусть $\delta>0$ определяется так же, как и в теореме 11.1. Тогда первое слагаемое оценивается так

$$|\Delta_1(y)|\leqslant\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}|f(x,y)-f(x,y_0)|\,dx\leqslant\varepsilon|\beta(y)-\alpha(y)|\leqslant\varepsilon(b-a).$$

Второе слагаемое оценивается так

$$|\Delta_1(y)|=\left|\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y_0)\,dx+\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y_0)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant M|\alpha(y)-\alpha(y_0)|+M|\beta(y)-\beta(y_0)|,$$

где $M=\sup\{|f(x,y)|:(x,y)\in R\}$. Поэтому в силу непрерывности функций α и β ясно, что последнее выражение будет меньше, чем ε, для всех y достаточно близких к y_0. $\square$

1.2. Дифференцируемость интеграла по параметру

Теорема 11.3 (правило Лейбница) *Пусть $f\in C(R)$ и для всех $(x,y)\in R$ существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}\in C(R)$.*

Тогда интеграл (11.1) имеет производную в каждой точке $y\in[c,d]$ и

$$I'(y)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $y\in[c,d]$, $h\neq0$, причем $y+h\in[c,d]$. Запишем

$$\frac{I(y+h)-I(y)}{h}-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx=\int_a^b\left[\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]\,dx=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta h)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]\,dx,$$

где $\theta=\theta(x,y,h)\in(0,1)$. В силу равномерной непрерывности частной производной подинтегральное выражение сходится к нулю при $h\to0$ равномерно по $x\in[a,b]$. Поэтому предел правой части последнего неравенства равен нулю. $\square$

Теорема 11.4 *Пусть выполнены условия теоремы 11.3. Пусть, кроме того, $\alpha, \beta \in C^1[c,d]$, причем $a \leqslant \alpha(y), \beta(y) \leqslant b$.*
Тогда интеграл (11.2) имеет производную в каждой точке $y \in [c,d]$ и

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y).$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 11.3 пусть $y \in [c,d]$, $h \neq 0$, причем $y+h \in [c,d]$. Запишем

$$\frac{I(y+h)-I(y)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{\alpha(y+h)}^{\beta(y+h)} f(x,y+h)\,dx - \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\right) =$$

$$= \int\limits_{\alpha(y+h)}^{\beta(y+h)} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\,dx - \frac{1}{h}\int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y+h)} f(x,y)\,dx + \frac{1}{h}\int\limits_{\beta(y)}^{\beta(y+h)} f(x,y)\,dx \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

Точно так же, как и в теореме 11.3 доказывается, что

$$I_1 \to \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

при $h \to 0$.

Кроме того, по теореме о среднем (см. следствие 5.1)

$$\frac{1}{h}\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y+h)} f(x,y)\,dx = \frac{\alpha(y+h)-\alpha(y)}{h} f(x_h,y)$$

где $x_h \in [\alpha(y), \alpha(y+h)]^*$. Поэтому $I_2 \to -f(\alpha(y),y)\alpha'(y)$ при $h \to 0$. Точно так же $I_3 \to f(\beta(y),y)\beta'(y)$ при $h \to 0$. □

1.3. Интегрирование интеграла по параметру

Теорема 11.5 *Если функция $f \in C(R)$, то оба повторных интеграла*

$$H = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy \quad и \quad G = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

существуют и равны.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$G(t) = \int_c^d g(t,y\,dy = \int_c^d dy \int_a^t f(x,y\,dx, \quad t \in [a,b].$$

$$H(t) = \int_a^t dx \int_c^d f(x,y)\,dy, \quad t \in [a,b].$$

С одной стороны, по теореме 11.3 справедливо равенство

$$G'(t) = \int_c^d f(t,y)\,dy.$$

Здесь использовалась непрерывность функции

$$(t,y) \mapsto \int_a^t f(x,y)\,dx, \quad (t,y) \in R,$$

которая проверяется следующим образом. Запишем очевидное неравенство

$$|g(t+\tau, y+k) - g(t,y)| = \left| \int_a^{t+\tau} f(x,y+k)\,dx - \int_a^t f(x,y\,dx) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_a^t [f(x,y+k) - f(x,y)]\,dx \right| + \left| \int_t^{t+\tau} f(x,y+k)\,dx \right|.$$

Первый интеграл справа мал при достаточно малом k в силу равномерной непрерывности функции f на R, а второй — мал при достаточно малых τ в силу ограниченности f на R.

С другой стороны, по теореме 11.1 функция

$$t \mapsto \int_c^d f(t,y)\,dy, \quad t \in [a,b]$$

непрерывна на $[a,b]$. Поэтому по той же лемме 5.4 для функции справедливо равенство

$$H'(t) = \int_c^d f(t,y)\,dy, \quad t \in [a,b]$$

Таким образом, $G'(t) = H'(t)$ при всех $t \in [a,b]$. Следовательно, по формуле Лагранжа (см. теорему 4.6) существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что $G(t) - H(t) = c$ для всех $t \in [a,b]$.

Следовательно, учитывая еще, что $G(a) = H(a) = 0$, получаем $c = 0$ и $G(t) = H(t)$ при всех $t \in [a,b]$. В частности, при $t = b$ получаем требуемое равенство. □

§ 2. Несобственные интегралы от параметра

Дальнейшим развитием результатов предыдущего параграфа является рассмотрение несобственных интегралов, зависящих от параметра. При этом мы ограничимся рассмотрением только особенности бесконечного промежутка (см.

п. 9.1) (несобственных интегралов первого рода), предоставляя читателю возможность самостоятельно убедиться, что никаких существенных отличий при рассмотрении несобственных интегралов от неограниченной функции (несобственных интегралов первого рода) не наблюдается.

При изучении свойств несобственных интегралов, зависящих от параметра, мы увидим много аналогий с рассмотрением свойств суммы функционального ряда. В частности, здесь будет использована терминология, подобная той, которая применялась в теории функциональных рядов.

Пусть Y — некоторое множество и задана функция $f : [a, +\infty) \times Y$. При этом будем предполагать, что функция для любого $y \in Y$ существует несобственный интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx. \tag{11.3}$$

Конечно, это требование включает интегрируемость на любом отрезке $[a, b]$, $b > a$, при любом $y \in Y$.

Интеграл (11.3) будем называть несобственным интегралом, зависящим от параметра $y \in Y$.

Примерами могут служить

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^y}, \quad y > 1,$$

$$\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{x^2y^2}\right\} dx, \quad y \neq 0,$$

2.1. Равномерная сходимость функции

Сначала обобщим определение 10.4 равномерной сходимости последовательности функций, заменяя натуральный параметр на произвольный. Пусть задана функция $f : X \times Y$, где $X \subset \mathbb{R}$ и Y — произвольное множество. Пусть еще x_0 — предельная точка множества X.

Определение 11.1 *Будем говорить, что функция f сходится при $x \to x_0$ к функции $g : Y \to \mathbb{R}$ равномерно на множестве Y, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ и для всех $y \in Y$ выполнено неравенство*

$$|f(x, y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Мы будем использовать это определение и в случае, когда $x_0 = \pm\infty$ и множество X не ограничено (сверху или снизу), понимая предел на бесконечности естественным образом (см. п. 5.6).

Условие равномерной сходимости функции можно переформулировать, сводя его к определению равномерной сходимости последовательности функций (в духе определения предела функции по Гейне), следующим образом.

Теорема 11.6 *Для того, чтобы функция f сходилась при $x \to x_0$ к функции $g : Y \to \mathbb{R}$ равномерно на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \to x_0$ ($x_n \in X$) последовательность функций $y \mapsto f(x_n, y)$ сходилась к g равномерно на Y.*

Доказательство повторяет, по существу, доказательство эквивалентности определений Коши и Гейне предела функции (см. теорему 2.15). Мы предлагаем провести это доказательство в качестве упражнения.

Эта теорема позволит нам ниже использовать известные факты, связанные со свойствами предела функциональной последовательности, для их распространения на случай предела функции двух переменных по одной из переменных.

В частности, с помощью теоремы 11.6 доказывается следующий стандартный критерий равномерной сходимости функции.

Теорема 11.7 *Для того, чтобы функция f сходилась при $x \to x_0$ равномерно относительно $y \in Y$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\delta > 0$, что для всех $0 < |x_1 - x_0| < \delta$, $0 < |x_2 - x_0| < \delta$ и всех $y \in Y$ выполнялось неравенство*

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon.$$

Доказательство сводится с помощью теоремы 11.6 к применению критерия Коши для равномерной сходимости последовательности функций (теорема 10.11) к последовательности $y \mapsto f(x_n, y)$, где x_n — произвольная последовательность, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$.

2.2. Равномерная сходимость несобственных интегралов

Следующее определение аналогично определению равномерной сходимости функционального ряда.

Определение 11.2 *Будем говорить, что несобственный интеграл от параметра (11.3)* ***сходится равномерно*** *относительно $y \in Y$, если функция*

$$(t, y) \mapsto \int_a^t f(x, y)\, dx$$

сходится при $t \to \infty$ к функции I равномерно относительно $y \in Y$. В явном виде это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $T > a$, что для всех $t \geqslant T$ и всех $y \in Y$ выполнено неравенство

$$\left| I(y) - \int_a^t f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Для такого понятия равномерной сходимости справедлив аналог критерия Коши для соответствующего понятия из теории рядов (см. теорему 10.11).

Теорема 11.8 *Для того, чтобы несобственный интеграл от параметра (11.3) сходился равномерно относительно $y \in Y$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $T > a$, что для всех $t_2 > t_1 \geqslant T$ и всех $y \in Y$ выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы 11.7. □

2.3. Условия равномерной сходимости

Приведем теперь ряд достаточных условий для равномерной сходимости несобственных интегралов, подобных признакам Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов (см. соответственно теоремы 10.13, 10.14 и 10.15).

Теорема 11.9 *Пусть*

$$F(x) = \sup_{y \in Y} |f(x,y)|, \quad x \geqslant a$$

и несобственный интеграл

$$\int_a^{\infty} F(x)\,dx$$

сходится. Тогда несобственный интеграл от параметра (11.3) сходится равномерно относительно $y \in Y$

Доказательство сразу следует из критерия Коши (теорема 11.8) и неравенства

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)\,dx\right| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} F(x)\,dx \quad .\square$$

В следующих двух теоремах функция f представима в виде $f = uv$ и речь будет идти о равномерной сходимости интеграла

$$\int_a^{\infty} u(x,y)v(x,y)\,dx. \tag{11.4}$$

Теорема 11.10 *Пусть выполнены условия*

1) функция v монотонно убывает по x при каждом фиксированном $y \in Y$ и сходится к нулю при $x \to +\infty$ равномерно относительно $y \in Y$,

2) функция

$$U(t) = \int_a^t u(x,y)\,dx$$

ограничена на множестве $(t,y) \in [a,\infty) \times Y$.

Тогда интеграл от параметра (11.4) сходится равномерно относительно $y \in Y$.

Доказательство имитирует обоснование теоремы 10.14 лишь вместо преобразования Абеля применяются формулы Бонне (теорема 5.12)

$$\int_{t_1}^{t_2} u(x,y)v(x,y)\,dx = v(t_1,y)\int_{t_1}^{\tau} u(x,y)\,dx + v(t_2,y)\int_{\tau}^{t_2} u(x,y)\,dx,$$

где $\tau \in [t_1, t_2]$.

Теперь если $T > a$ выбрано так, что $v(t,y) < \varepsilon$ при всех $t > T$ и всех $y \in Y$, то

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} u(x,y)v(x,y)\,dx\right| < 4M\varepsilon,$$

где

$$M = \sup\{|U(t,y)| : t \geqslant a, y \in Y\}\,.$$

Осталось воспользоваться критерием Коши (теорема 11.8). □

Теорема 11.11 *Пусть выполнены условия*

1)′ функция v монотонно убывает по x при каждом фиксированном $y \in Y$ и ограничена на множестве $[a, \infty) \times Y$,

2)′ интеграл

$$\int_a^{\infty} u(x,y)\,dx$$

сходится равномерно относительно $y \in Y$.

Тогда интеграл от параметра (11.4) сходится равномерно относительно $y \in Y$.

Доказательство предоставляется читателю. □

2.4. Непрерывность интегралов по параметру

Начнем с вопроса о возможности предельного перехода под знаком несобственного интеграла от параметра.

Теорема 11.12 *Пусть задана функция $f : [a, \infty) \times [c, d]$, $y_0 \in [c, d]$. Пусть выполнены условия*

1) при любом $t > a$ функция f при $y \to y_0$ сходится к функции g равномерно на $[a, t]$,

2) несобственный интеграл (11.3) сходится равномерно на $[c, d]$.

Тогда несобственный интеграл от функции g по $[a, +\infty)$ сходится и существует предел

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{\infty} g(x)\,dx.$$

Другими словами теорема утверждает, что при сформулированных условиях возможен предельный переход под знаком несобственного интеграла от параметра.

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $y_n \to y_0$ и обозначим для краткости

$$F_n(t) = \int_a^t f(x, y_n)\, dx, \quad G(t) = \int_a^t f(x, y_0)\, dx.$$

Отметим при этом, что последний интеграл существует для любого $t \geqslant a$ в силу условия 1) по теореме об интегрировании равномерно сходящейся последовательности функций (см. теорему 10.18). Кроме того, из этой же теоремы следует, что

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = G(t), \quad t \geqslant a.$$

Далее из условия 2) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} F_n(t) = \int_a^\infty f(x, y_n)\, dx$$

равномерно по $n \in \mathbb{N}$. Поэтому по теореме о перестановке пределов (см. теорему 10.12)

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to\infty} F_n(t).$$

Это означает, что для любой последовательности $y_n \to y_0$

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t g(x)\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^\infty f(x, y_n)\, dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^\infty g(x)\, dx = \lim_{y\to y_0}\int_a^\infty f(x, y)\, dx.$$

и теорема доказана. □

Теорема 11.13 *Пусть функция* $f \in C([a,\infty) \times [c,d])$ *и интеграл*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx.$$

сходится равномерно на $[c, d]$.

Тогда $I \in C[c, d]$

Доказательство вытекает из предыдущей теоремы — ее первое условие выполнено, так как из условия $f \in C([a,\infty) \times [c,d])$ следует, что при каждом $t \geqslant a$ функция f равномерно непрерывна на компактном прямоугольнике $[a, t] \times [c, d]$. □

2.5. Интегрирование интегралов по параметру

Теорема 11.14 *Пусть функция* $f \in C([a,\infty)\times[c,d])$ *и интеграл*

$$I(y)=\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx.$$

сходится равномерно на $[c,d]$.

Тогда функция

$$x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$$

интегрируема в несобственном смысле на $[a,\infty)$ *и справедливо равенство*

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Другими словами теорема утверждает, что при сформулированных условиях справедливо равенство перестановки двух интегралов

$$\int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $t_n \uparrow \infty$ и обозначим

$$F_n(y)=\int_a^{t_n} f(x,y\,dx),$$

тогда по определению несобственного интеграла

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx,$$

причем по условию эта сходимость равномерная на $[c,d]$. В силу теоремы об интегрировании равномерно сходящейся последовательности функций (см. теорему 10.18) справедливо равенство

$$\int_c^d \left[\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx\right] dy = \int_c^d \lim_{n\to\infty} F_n(y)\,dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_c^d F_n(y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_a^{t_n}\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx.$$

Последнее равенство справедливо в силу теоремы об интегрировании обычных интегралов от параметра (см. теорему 11.5). Отсюда следует наше утверждение.
□

2.6. Дифференцирование интегралов по параметру

Теорема 11.15 *Пусть выполнены следующие условия*
1) функция $f \in C([a,\infty) \times [c,d])$,
2) частная производная $\frac{\partial f}{\partial y} \in C([a,\infty) \times [c,d])$,
3) интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx.$$

сходится на $[c,d]$,
4) интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

сходится равномерно на $[c,d]$.
Тогда функция I *дифференцируема на* $[c,d]$ *и*

$$I'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Другими словами, при сформулированных условиях правило Лейбница дифференцирования интегралов, зависящих от параметра (см. теорему 11.3), сохраняет силу и для несобственных интегралов.

Доказательство сводится к применению теоремы о дифференцировании функциональных последовательностей (теорема 10.20). Обозначим

$$F_n(y) = \int_a^n f(x,y)\,dx \to \int_a^\infty f(x,y)\,dx.$$

Тогда по теореме 11.3 справедливо равенство

$$F_n'(y) = \int_a^n \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \to \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

и сходимость равномерна на $[c,d]$.

Далее по теореме 10.20

$$I'(y) = \left(\lim_{n\to\infty} F_n(y)\right)' = \lim_{n\to\infty} F_n'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx. \quad \square$$

2.7. Повторное несобственное интегрирование

Для рассмотрения ряда интересных и важных примеров неэлементарных функций нам потребуется еще исследовать вопрос об интегрировании несобственных интегралов от параметра по бесконечному промежутку.

Теорема 11.16 *Пусть выполнены следующие условия*
1) неотрицательная функция $f \in C([a,\infty) \times [c,\infty))$,

2) для любого $y \in [c, \infty)$ интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$$

сходится и $I \in C[c, \infty)$,

3) для любого $y \in [c, \infty)$ интеграл

$$J(x) = \int_c^\infty f(x, y)\,dy$$

сходится и $J \in C[a, \infty)$.

Тогда если один из интегралов

$$\int_c^\infty I(y)\,dy, \quad \int_a^\infty J(x)\,dx$$

сходится, то сходится и другой и они совпадают.

Доказательство. Возьмем произвольно возрастающую последовательность $a \leqslant t_m \uparrow \infty$ и обозначим

$$F_n(x) = \int_c^n f(x, y)\,dy, \quad G_m(y) = \int_a^{t_m} f(x, y)\,dx.$$

Тогда по теореме об интегрировании обычных интегралов от параметра (теорема 11.5)

$$\int_a^{t_m} F_n(x)\,dx = \int_c^n G_m(y\,dy \leqslant \int_c^\infty \left[\int_a^\infty f(x, y)\,dx\right]\,dy.$$

(последнее неравенство использует неотрицательность функции f). Так как последовательность F_n возрастает и сходится к непрерывной функции J, то по теореме Дини (см. теорему 10.17) эта сходимость равномерная на любом отрезке $[a, t_m]$. Следовательно, по теореме об интегрировании функциональных последовательностей (теорема 10.18)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{t_m} F_n(x)\,dx = \int_a^{t_m} \left[\int_c^\infty f(x, y)\,dy\right]\,dx.$$

Итак, мы получили следующее неравенство

$$\int_a^{t_m} \left[\int_c^\infty f(x, y)\,dy\right]\,dx \leqslant \int_c^\infty \left[\int_a^\infty f(x, y)\,dx\right]\,dy.$$

Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\int_a^\infty \left[\int_c^\infty f(x, y)\,dy\right]\,dx \leqslant \int_c^\infty \left[\int_a^\infty f(x, y)\,dx\right]\,dy.$$

меняя ролями переменные x и y, получим также и противоположное неравенство. □

Теорема 11.17 *Пусть функция f удовлетворяет всем условиям теоремы 11.16, кроме неотрицательности. Пусть также некоторая функция F удовлетворяет всем условиям теоремы 11.16 и выполнены неравенства*

$$|f(x,y)| \leqslant F(x,y), \quad x \leqslant a,\ y \leqslant c.$$

Тогда утверждение теоремы 11.16 справедливо для функции f.

Доказательство. При наших условиях функции $\frac{F+f}{2}$ и $\frac{F-f}{2}$ удовлетворяют условиям теоремы 11.16, поэтому ее утверждение верно и для функции $f = \frac{F+f}{2} - \frac{F-f}{2}$. $\square$

Приведем еще утверждение, позволяющее менять порядок несобственных интегралов, в котором не требуется сохранение знака подинтегральной функции, но налагается больше условий на сходимость несобственных интегралов.

Теорема 11.18 *Пусть выполнены следующие условия*

1) $f \in C([a,\infty)\times[c,\infty))$,

2) несобственный интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно на отрезках $[c, C]$ при любом $C > c$,

3) несобственный интеграл

$$J(x) = \int_c^\infty f(x,y)\,dy$$

сходится равномерно на отрезках $[a, A]$ при любом $A > a$,

Тогда если один из повторных интегралов

$$\int_c^\infty I(y)\,dy, \qquad \int_a^\infty J(x)\,dx$$

сходится, то сходится и другой и они совпадают.

Доказательство предоставляется читателю.

2.8. Несобственные интегралы второго рода

Аналогично предыдущему можно было бы развить и соответствующую теорию для несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра. Мы сделаем это лишь вкратце, ограничиваясь некоторой сводной формулировкой, достаточной для большинства приложений.

Пусть Y — некоторое множество, $a, \omega \in \mathbb{R}$, $a < \omega$, и задана функция $f : [a,\omega)\times Y$. При этом будем предполагать, что по крайней мере для одного $y \in Y$ функция $x \mapsto f(x,y)$ не является ограниченной в любой проколотой окрестности точки ω (то есть ω является конечной особенностью функции f, как мы понимали это в определении 5.11). Предположим также, что для любого $y \in Y$ существует (возможно, несобственный) интеграл

$$I(y) \quad \int_a^\omega f(x, y)\, dx. \tag{11.5}$$

Конечно, это требование включает интегрируемость на любом отрезке $[a, b]$ ($b \in (a, \omega)$) при любом $y \in Y$.

Теорема 11.19 *Пусть функция $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Если интеграл (11.5) сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$, то $I \in C[c, d]$.

2. При том же условии

$$\int_c^d dy \int_a^\omega f(x, y)\, dx - \int_a^\omega dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

3. Если интеграл (11.5) сходится, $\frac{\partial f}{\partial y} \in C([a, \omega) \times [c, d])$ и интеграл

$$\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$$

сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$, то

$$I'(y) = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx.$$

§ 3. Применения теории интегралов от параметра

3.1. Интеграл Дирихле

Интеграл

$$D(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\, dx \tag{11.6}$$

называется **интегралом Дирихле**. Он является несобственным только из-за неограниченности области интегрирования, так как в подынтегральная функция является ограниченной и 0 не является особенностью.

Ясно, что $D(0) = 0$. Кроме того, $D(y) = -D(-y)$ при $y > 0$ и интеграл Дирихле является сходящимся по признаку Дирихле сходимости несобственных интегралов (см. теорему 5.22): функция $x \mapsto \frac{1}{x}$ монотонна и сходится к нулю на бесконечности, а интегралы

$$\left| \int_0^t \sin xy\, dx \right| \quad \left| \frac{1 - \cos ty}{y} \right| \leqslant \frac{2}{|y|}$$

ограничены по $t > 0$.

С помощью линейной замены переменной убеждаемся в справедливости равенства

$$D(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx = \left[\begin{array}{cc} xy = t \\ y\,dx & dt \end{array}\right] = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = D(1).$$

Таким образом, вычисление интеграла Дирихле при любом y сводится к вычислению $D(1)$.

Теорема 11.20 $D(y) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} y$.

Доказательство. В силу предыдущего достаточно рассмотреть случай $D(1)$. Рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx, \tag{11.7}$$

зависящий от параметра $y \in Y = [0, +\infty)$. Отметим, что подинтегральная функция $f(x, y) = e^{-xy}\frac{\sin x}{x}$ непрерывна на $[0, +\infty) \times Y$, если доопределить ее следующим образом $f(0, y) = 1$.

Интеграл (11.7) сходится равномерно на Y. В этом можно убедиться по признаку Абеля (теорема 11.11): функция $v(x, y) = e^{-xy}$ монотонна и ограничена, а интеграл от функции $u(x, y) = \frac{\sin x}{x}$ сходится равномерно на Y (функция не зависит от параметра). Отсюда по теореме 11.12 выводим непрерывность (11.7).

Вычислим теперь производную $I'(y)$ функции (11.7) при любом $y > 0$. Для этого считаем, что $y \in [\delta, \Delta]$ (числа $0 < \delta < y$ и $y < \Delta < +\infty$ фиксированы). Тогда на этом множестве интеграл от частной производной

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx = \int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx$$

сходится равномерно по признаку Вейерштрасса (теорема 11.9). Это следует из неравенства $|e^{-xy}\sin x| \leqslant e^{-\delta x}$ и сходимости интеграла

$$\int_0^\infty e^{-\delta x}\,dx$$

сходится. Поэтому по правилу Лейбница для несобственных интегралов от параметра (теорема 11.15) справедливо равенство

$$I'(y) = -\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx = -\frac{1}{y^2+1}$$

(последний интеграл вычисляется с помощью интегрирования по частям).

Зафиксируем теперь произвольно натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и запишем по формуле Ньютона–Лейбница (теорема 5.14, все условия которой сейчас выполнены)

$$I(y) - I(n) = \int_n^y \frac{dt}{t^2+1} = I(n) + \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} y.$$

Теперь, используя непрерывность интеграла (11.7), запишем равенство

$$I(0) = \lim_{y\to+0} I(y) = \lim_{y\to+0}[I(n) + \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} y] = I(n) + \operatorname{arctg} n.$$

Наконец, переходим к пределу в последнем равенстве при $n \to +\infty$ и учтем, что

$$|I(n)| \leqslant \int_0^\infty e^{-nx}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \leqslant \int_0^\infty e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

получаем при этом окончательный результат $D(1) = I(0) = \frac{\pi}{2}$. □

3.2. Эйлеровы интегралы

В качестве других важных примеров применения результатов предыдущего параграфа рассмотрим два интеграла

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt, \tag{11.8}$$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \tag{11.9}$$

которые играют важную роль в анализе. Они называются соответственно **гамма-** и **бета-**функциями Эйлера. Для нас это — первые примеры неэлементарных функций. Для большинства значений параметров соответствующие первообразные не выражаются в конечном виде через элементарные функции.

Интеграл (11.8) является несобственным интегралом первого рода (особенность бесконечного промежутка), а при $x < 1$ — несобственным интегралом второго рода с особенностью в нуле. Интеграла (11.9) является несобственным интегралом второго рода с особенностью в точке 0 при $x < 1$ и особенностью в точке 1 при $y < 1$.

Упражнение 11.1

1) Интеграл, определяющий $\Gamma(x)$, существует при $x > 0$.

2) Интеграл, определяющий $B(x,y)$, существует при $x > 0$, $y > 0$.

3.3. Свойства бета-функции

Используя результаты предыдущего параграфа, мы можем изучать свойства эйлеровых функций.

Теорема 11.21

1) Бета-функция имеет непрерывные частные производные любого порядка на $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

2) $B(x,y) = B(y,x)$.

3) $B(x,y) = \frac{y-1}{x+y-1}B(x,y-1)$ *при* $y > 1$, $B(x,y) = \frac{x-1}{x+y-1}B(x-1,y)$ *при* $x > 1$.

Доказательство. 1) Например, докажем существование частной производной по x. Будем использовать теорему 11.19 (утверждение 3). Функция

$$f(t,x) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}, \quad t \in (0,1], x \in (0,+\infty),$$

имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t$ на $(0,1] \times (0,+\infty)$.

Если $\varepsilon > 0$, то при $x \in [2\varepsilon, +\infty)$ эта частная производная мажорируется функцией

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant ct^{\varepsilon-1}(1-t)^{y-1},$$

не зависящей от x (это следует из того, что функция $t \mapsto t^{\varepsilon}\ln t$, $t > 0$, является ограниченной). Отсюда же и из теоремы 11.9 (точнее из ее аналога для несобственных интегралов второго рода) вытекает равномерная сходимость на $[2\varepsilon, +\infty)$ несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t\,dt.$$

Поэтому в силу утверждения 3 теоремы 11.19 вытекает существование частной производной $\frac{\partial B}{\partial x}$ и равенство

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t\,dt.$$

Точно также исчерпывается вопрос о существовании и непрерывности производных высших порядков.

2) Это свойство проверяется заменой $t = 1 - s$.

3) Доказываем с помощью интегрирования по частям:

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1}\,d\left(\frac{t^x}{x}\right) = \frac{t^x(1-t)^{y-1}}{x}\bigg|_0^1 + \frac{y-1}{x}\int_0^1 t^x(1-t)^{y-2}\,dt$$

$$= \frac{y-1}{x}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-2}\,dt - \frac{y-1}{x}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt =$$

$$= \frac{y-1}{x}B(x,y-1) - \frac{y-1}{x}B(x,y).$$

(было использовано тождество $t^x = t^{x-1} - t^{x-1}(1-t)$). Второе равенство вытекает из первого и из 2). $\square$

Второе и третье утверждения теоремы позволяет сводить вычисление значений бета-функции к случаю, когда $x, y \in (0,1]$.

Мы ограничиваемся этим, так как ниже будет установлена простая связь между функциями Эйлера. Поэтому многие свойства бета-функции можно вывести из свойств гамма-функции.

3.4. Свойства гамма-функции

Теорема 11.22

1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *при* $x > 0$. *В частности,* $\Gamma(n+1) = n!$ *при* $n \in \mathbb{N}$.

2) Гамма-функция имеет непрерывные производные любого порядка на $(0, +\infty)$.

3) Существует такое $x_0 \in (1, 2)$, *что гамма-функция убывает на* $(0, x_0)$ *и возрастает на* $(x_0, +\infty)$.

4) Гамма-функция выпукла на $(0, +\infty)$.

Доказательство. Утверждение 1) проверяется простым интегрированием по частям.

Докажем 2). Подинтегральная функция $f(t, x) = t^{x-1}e^{-t}$ имеет непрерывные частные производные по x

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} = (\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}$$

любого порядка $k \in \mathbb{N}$, которые мажорируются функцией

$$\left|(\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}\right| \leqslant ct^{\frac{\delta}{2}-1}, \quad t \in (0, 1],$$

и

$$\left|(\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}\right| \leqslant ct^{\frac{\Delta}{2}-1}e^{-t}, \quad t \geqslant 1,$$

где $0 < \delta \leqslant x \leqslant \Delta$ и c — некоторая постоянная. Отсюда следует, что несобственный интеграл от $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ по $[0, +\infty)$ сходится равномерно на $\delta, \Delta]$. Поэтому можно применять теоремы 11.13, 11.15 и 11.19. В частности, справедливы следующие равенства для производных гамма-функции

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}\, dt.$$

При $k = 2$ отсюда заключаем, что $\Gamma''(x) > 0$ и гамма-функция строго выпукла.

Кроме того, Γ' строго возрастает, а из 1) вытекает, что $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Следовательно, существует $x_0 \in (1, 2)$, для которого $\Gamma'(x_0) = 0$, $\Gamma'(x) < 0$ при $x \in (0, x_0)$, $\Gamma'(x) > 0$ при $x \in (x_0, +\infty)$. □

Утверждение 1) этой теоремы показывает, в частности, что гамма-функция является естественным распространением понятия факториала $x!$ (определенного лишь для натуральных значений x) на любые положительные значения $x > 0$. Несколько позже, установив связь между двумя эйлеровыми интегралами, мы увидим, что бета-функция играет такую же роль по отношению к биномиальным коэффициентам.

3.5. Связь гамма- и бета-функций Эйлера

Хорошо известна формула для вычисления биномиальных коэффициентов

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Следующая теорема показывает, что бета-функция позволяет распространить биномиальные коэффициенты на случай нецелых индексов, если факториалы здесь понимать, как значения гамма-функции.

Теорема 11.23 *Для любых $x > 0$ и $y > 0$ справедливо равенство*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{11.10}$$

Доказательство. В определении бета-функции выполним замену переменной

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \left[\begin{array}{c} t = \frac{u}{1+u} \\ dt = \frac{du}{(1+u)^2} \end{array}\right] = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du, \tag{11.11}$$

а в определении гамма-функции — другую

$$\Gamma(x) = \left[\begin{array}{c} t = us \\ dt = u\,ds \end{array}\right] = u^x \int_0^\infty s^{x-1}e^{-us}\,ds.$$

Заменим x на $x+y$, u на $1+u$:

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+u)^{x+y}} = \int_0^\infty s^{x+y-1}e^{-(1+u)s}\,ds.$$

умножим на u^{x-1}, проинтегрируем по u и поменяем порядок интегрирования

$$\Gamma(x+y)\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du = \int_0^\infty\int_0^\infty u^{x-1}s^{x+y-1}e^{-(1+u)s}\,ds\,du =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty u^{x-1}s^{x+y-1}e^{-(1+u)s}\,du\,ds = \int_0^\infty\left[\int_0^\infty (us)^{x-1}e^{-us}s\,du\right]s^{y-1}e^{-s}\,ds.$$

Если теперь во внутреннем интеграле заменить us на новую переменную, то видно, что, учитывая (11.11), мы приходим к равенству

$$\Gamma(x+y)\cdot B(x,y) = \Gamma(x)\cdot\Gamma(y).$$

Осталось обосновать перемену порядка интегрирования. Подинтегральная функция

$$f(s,u) = u^{x-1}s^{x+y-1}e^{-(1+u)s}$$

положительна и непрерывна. Кроме того, каждый из интегралов

$$\int_0^\infty f(s,u)\,ds = \frac{u^{x+1}\Gamma(x+y)}{(1+u)^{x+y}}, \qquad \int_0^\infty f(s,u)\,du = \Gamma(x)s^{y-1}e^{-s}$$

непрерывен, а повторные интегралы от них сходятся. Поэтому перемена порядка интегрирования возможна по теореме 11.16. □

3.6. Интеграл вероятностей

Интеграл
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$
часто встречается в математике, в особенности это относится к теории вероятностей. С его помощью можно выразить так называемую функцию распределения нормальной случайной величины. Поэтому его называют **интегралом вероятностей** (иногда используют название — интеграл Эйлера-Пуассона).

В следующей теореме мы вычислим этот интеграл и установим его связь с гамма-функцией.

Теорема 11.24
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{11.12}$$

Доказательство. Выполним замену переменной в интеграле вероятностей
$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \left[\begin{array}{c} x = ut \\ dx = udt \end{array}\right] = \int_0^\infty ue^{-u^2t^2}dt.$$
Умножим обе части этого равенства на e^{-u^2} и проинтегрируем по $(0, +\infty)$
$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty ue^{-(1+t^2)u^2}dt\,du =$$
$$= \int_0^\infty dt\int_0^\infty ue^{-(1+t^2)u^2}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$
(вычисление внутреннего интеграла приведено ниже).

Второе из равенств (11.12) получается из первого заменой $x^2 = t$
$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \left[\begin{array}{c} x^2 = t \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{1/2}e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \tag{11.13}$$

Нам нужно еще обосновать перемену порядка интегрирования. Мы сделаем это с помощью теоремы 11.16.

Необходимо проверить непрерывность сходящихся несобственных интегралов
$$I(u) = \int_0^\infty ue^{-(1+t^2)u^2}\,dt, \quad J(u) = \int_0^\infty ue^{-(1+t^2)u^2}\,du.$$
Оба эти интеграла легко вычисляются с помощью простых замен переменной
$$\int_0^\infty ue^{-(1+t^2)u^2}\,dt = ue^{-u^2}\int_0^\infty e^{-t^2u^2}\,dt = \left[\begin{array}{c} s = ut \\ ds = u\,dt \end{array}\right] = e^{-u^2}\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds,$$
$$\int_0^\infty ue^{-(1+t^2)u^2}\,du = \left[\begin{array}{c} s = (1+t^2)u^2 \\ ds = 2u(1+t^2)\,du \end{array}\right] = \frac{1}{2(1+t^2)}\int_0^\infty e^{-s}\,ds = \frac{1}{2(1+t^2)}$$
и их непрерывность очевидна. □

3.7. Формула Стирлинга

Так называется важная и красивая асимптотическая формула, которая дает нам весьма точное представление о характере роста факториала $n!$.

Начнем с некоторых вспомогательных утверждений.

Лемма 11.1 *Для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x\,dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\frac{\pi}{2} & \text{при четном } m \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & \text{при нечетном } m \end{cases} \tag{11.14}$$

Доказательство. Достаточно вычислить первый из интегралов, так как второй сводится к нему с помощью замены переменной $x = \frac{\pi}{2} - y$. Для вычисления первого из наших интегралов обозначим его J_m и проинтегрируем по частям

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1}\,d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-1}\cos^2 x\,dx.$$

Проинтегрированное слагаемое обращается в нуль. Заменяя $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, получим равенство

$$J_m = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m.$$

Решая это уравнение относительно J_m, выводим рекуррентную формулу

$$J_m = \frac{m-1}{m}J_{m-2},$$

из которой уже легко следует наше утверждение. □

Лемма 11.2 *При $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$0 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{1}{n(n+1)}. \tag{11.15}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

и разложим ее в степенной ряд

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

После этого запишем

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{\frac{2}{2n+1}}\ln\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} - 1 =$$

$$= \varphi\left(\frac{1}{2n+1}\right) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}.$$

Отсюда сразу следует левое неравенство (11.15). Правое неравенство получается так

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}} \leqslant \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} = \frac{1}{12n(n+1)}. \quad \square$$

Теорема 11.25 (формула Стирлинга)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{11.16}$$

Доказательство. Обозначим

$$x_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!} \tag{11.17}$$

и докажем, что она сходится.

Так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{e},$$

то

$$\ln\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Следовательно, в силу левого неравенства (11.15) $\ln\frac{x_{n+1}}{x_n} > 0$ и $x_{n+1} > x_n$.

С другой стороны, в силу правого неравенства (11.15)

$$\ln\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Суммируя по n, получим

$$\ln\frac{x_n}{x_1} = \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{x_{k+1}}{x_k} < \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 1.$$

и $x_n < ex_1$. Итак, последовательность x_n возрастает и ограничена сверху, а потому сходится.

Обозначим $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и найдем этот предел с помощью формул Валлиса (11.14).

Из очевидных неравенств

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x\,dx$$

и (11.14) вытекает, что

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2n+1} = \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!} < \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2n}.$$

Поэтому существует такое число $\theta_n \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, что

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi n + \theta_n \pi}.$$

Так как $(2n)!! = 2^n n!$ и $(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, то

$$n! = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n x_n}, \quad (2n)! = \frac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{e^{2n} x_{2n}}.$$

Это означает, что

$$\frac{x_{2n}}{x_n^2}\sqrt{\frac{n}{2}} = \sqrt{n\pi + \theta_n \pi}.$$

Поделим обе части на $\sqrt{\frac{n}{2}}$ и перейдем к пределу, получим $a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. □

Метод доказательства дает также оценку для скорости сходимости в формуле Стирлинга. В самом деле,

$$\ln \frac{x_{n+m}}{x_n} < \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{n+m}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right).$$

Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$, получаем $\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi} x_n} \leqslant \frac{1}{12n}$. Таким образом,

$$0 < 1 - \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} < e^{-\frac{1}{12n}} - 1 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Часть IV

4 семестр

Глава 12
МЕРЫ ЖОРДАНА И ЛЕБЕГА В$\mathbb{R}^d$

В этой и следующей главах нашей задачей будет обобщение важнейших геометрических понятий — длины (на прямой), площади (на плоскости), объема (в трехмерном пространстве) на более широкие классы множеств, а также на пространства $\mathbb{R}^d$ любых размерностей $d \in \mathbb{N}$. Центральной идеей будет следующая: изначально такие понятия естественным образом определены на простых множествах, как отрезок на прямой, прямоугольник на плоскости, параллелепипед в трехмерном пространстве. Исходя из этого определения и используя интуитивное свойство этих понятий — аддитивность — мы будем распространять его в несколько этапов на более широкие классы множеств.

§ 1. Мера Жордана в $\mathbb{R}^d$

В этой и следующей главах нашей задачей будет обобщение важнейших геометрических понятий   длины (на прямой), площади (на плоскости), объема (в трехмерном пространстве) на более широкие классы множеств, а также на пространства $\mathbb{R}^d$ любых размерностей $d \in \mathbb{N}$.

Центральной идеей будет следующая: изначально такие понятия естественным образом определены на таких простых множествах, как отрезок на прямой, прямоугольник на плоскости, параллелепипед в трехмерном пространстве и т.д. Исходя из этого определения и используя интуитивное свойство этих понятий — аддитивность — мы будем распространять его в несколько этапов на более широкие классы множеств, используя идею аппроксимации сложных объектов более простыми.

1.1. Мера сегмента

Начнем с некоторой терминологии и обозначений. Пусть

$$\lambda E \quad \{\lambda x : x \in E\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad E \subset \mathbb{R}^d, \tag{12.1}$$

$$x_0 + E - \{x_0 + x : x \in E\}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^d, \quad E \subset \mathbb{R}^d. \tag{12.2}$$

Напомним также (см. 6.16), что d-мерным сегментом (порожденным парой $a \in \mathbb{R}^d$ и $b \in \mathbb{R}^d$) называется множество

$$\overline{I} \quad \overline{I}_{a,b} \quad \left\{x \in \mathbb{R}^d : a^k \leqslant x^k \leqslant b^k, \quad k \quad 1, \dots, d\right\}$$

Нам будет удобно пустое множество также считать сегментом.

Замечание 12.1 Временно мы будем использовать следующую терминологию. Два сегмента $\overline{I}$ и $\overline{J}$ будем называть **неналегающими**, если их внутренности не пересекаются, то есть $I \cap J = \varnothing$. Конечный набор сегментов называется **дизъюнктным**, если любые два из них не налегают. Для объединения дизъюнктных сегментов будем использовать тот же знак $\sqcup$, что и для объединения непересекающихся множеств (см. раздел 1.4).

Следующее определение является совершенно естественным. Во всяком случае до сих пор мы ничего не имели против него в случаях $d = 1, 2, 3$.

Определение 12.1 *Мерой сегмента* $\overline{I} = \overline{I}_{a,b}$ *называется число*

$$\mu(\overline{I}) = \prod_{k=1}^{d} \left(b^k - a^k\right), \quad \mu(\varnothing) = 0. \tag{12.3}$$

Отметим очевидные свойства меры сегмента, связанные со сдвигами и растяжениями:

$$\mu\left(\lambda\overline{I}\right) = |\lambda|^d \mu\left(\overline{I}\right), \quad \mu\left(c + \overline{I}\right) = \mu\left(\overline{I}\right). \tag{12.4}$$

Следующая группа свойств меры сегмента является чрезвычайно важной и именно о сохранении этой группы свойств меры мы будем заботиться при ее расширении на более широкий класс множеств.

В доказательстве нам понадобится следующее простое наблюдение. Пусть заданы сегмент $\overline{I} \subset \mathbb{R}^d$, $i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant d$, и число $c \in \mathbb{R}$. Тогда гиперплоскость

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d : x^i = c\right\}$$

разбивает сегмент $\overline{I}$ на дизъюнктные сегменты

$$\overline{I} = \overline{I}_1 \cup \overline{I}_2, \quad \overline{I}_1 = \left\{x \in \overline{I} : a^i \leqslant x^i \leqslant c\right\}, \quad \overline{I}_2 = \left\{x \in \overline{I} : c \leqslant x^i \leqslant b^i\right\}.$$

При этом справедливо равенство

$$\mu\left(\overline{I}\right) = \mu\left(\overline{I}_1\right) + \mu\left(\overline{I}_2\right).$$

В самом деле,

$$\mu\left(\overline{I}_1\right) + \mu\left(\overline{I}_2\right) = (c - a^i) \prod_{k=1,\, k\neq i}^{d} (b^k - a^k) + (b^i - c) \prod_{k=1,\, k\neq i}^{d} (b^k - a^k) =$$

$$= \left[(c - a^i) + (b^i - c)\right] \prod_{k=1,\, k\neq i}^{d} (b^k - a^k) = \prod_{k=1}^{d} (b^k - a^k) = \mu\left(\overline{I}\right).$$

Мы часто будем использовать выражение "через все грани сегмента $\overline{I}$ проведем гиперплоскости". Это означает, что мы проведем все гиперплоскости вида

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d : x^k = a^k\right\}, \quad \left\{x \in \mathbb{R}^d : x^k = b^k\right\}, \quad k = 1, \ldots, d.$$

Лемма 12.1 (свойства меры сегмента)

1) Если $\overline{I}=\coprod_{i=1}^{n}\overline{I}_i$ *— дизъюнктное разложение* $\overline{I}$*, то*

$$\mu(\overline{I})=\sum_{i=1}^{n}\mu(\overline{I}_i)$$

(аддитивность).

2) Если $\{\overline{I}_i\}_{i=1}^{n}$ *— дизъюнктное семейство сегментов и* $\coprod_{k=1}^{n}\overline{I}_k\subset\overline{I}$*, то*

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(\overline{I}_i)\leqslant\mu(\overline{I})$$

(монотонность).

3) Если $\overline{I}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\overline{I}_i$*, то*

$$\mu(\overline{I})\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu(\overline{I}_i)$$

(субаддитивность).

Доказательство. 1) Из замечания перед формулировкой леммы вытекает наше утверждение для случая, когда сегмент разбивается на два с помощью гиперплоскости. Поэтому в общем случае надо провести через грани всех сегментов $\{\overline{I}_i\}_{i=1}^{n}$ и последовательно применить уже доказанный случай.

2) Снова проведем гиперплоскости через все грани сегментов $\{\overline{I}_i\}_{i=1}^{n}$, тогда для $\overline{I}$ имеет место дизъюнктное разложение на сегменты, включающее все $\{\overline{I}_i\}_{i=1}^{n}$

$$\overline{I}=\left(\coprod_{i=1}^{n}\overline{I}_i\right)\coprod\left(\coprod_{j=1}^{m}\overline{J}_j\right).$$

с некоторыми сегментами $\{\overline{J}_i\}_{j=1}^{m}$. Поэтому в силу уже доказанного свойства аддитивности

$$\mu(\overline{I})=\sum_{i=1}^{n}\mu(\overline{I}_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu(\overline{J}_j)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\mu(\overline{I}_i)\,.$$

3) Обозначим $\overline{J}_i=\overline{I}\cap\overline{I}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ и через грани всех сегментов $\{\overline{J}_i\}_{i=1}^{n}$ проведем гиперплоскости, определяя дизъюнтные разложения этих сегментов

$$\overline{J}_i=\coprod_{j=1}^{l_i}\overline{J}_{ij}.$$

Сегменты $\overline{J}_{ij}$ могут входить в различные $\overline{J}_i$ (если последние пересекаются), поэтому надо избавиться от "лишних". Для этого определим множества индексов A_l $(l=1,\ldots,n)$ следующим образом: $A_1=\{1,\ldots,l_1\}$ и для $i=2,\ldots,n$

$$\bigcup_{j\in A_i}\overline{J}_{ij}=\overline{\overline{J}_i\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{i-1}\bigcup_{j\in A_k}\overline{J}_{ij}\right)}.$$

Другими словами, в A_i включаются номера тех сегментов $\overline{J}_{ij}$, которые не были выбраны на предыдущих шагах.

Таким образом, мы получили дизъюнктное разложение

$$\overline{I}=\coprod_{i=1}^{n}\coprod_{j\in A_i}\overline{J}_{ij}.$$

Теперь нужное утверждение получается применением свойств аддитивности и (дважды) монотонности

$$\mu(\overline{I})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in A_i}\mu(\overline{J}_{ij})\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu(\overline{J}_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu(\overline{I}_i)\,.$$

1.2. Фигура и ее мера

Сейчас мы определим меру для несколько более широкого класса множеств.

Определение 12.2 ***Фигурой*** *или элементарным множеством называется любое конечное объединение сегментов. Класс всех фигур обозначим $\mathcal{F}$.*

Ясно, что любой сегмент является фигурой, в частности, $\varnothing\in\mathcal{F}$.

Замечание 12.2 Терминологию из раздела 12.1 мы будем использовать и для фигур.

Лемма 12.2 (свойства фигур)
1) Если $X,Y\in\mathcal{F}$, то $X\cup Y, X\cap Y, \overline{X\setminus Y}\in\mathcal{F}$.
2) Каждая фигура компактна.
3) Для любой фигуры $X\in\mathcal{F}$ существует дизъюнктное разложение $X=\coprod_{i=1}^{n}\overline{I}_i$ на сегменты.

Доказательство. Первые два свойства очевидны (рекомендуется доказать их самостоятельно).

3) Доказательство проходит точно так же, как и при обосновании части 3) в лемме 12.1. Пусть $X=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{I}_i$, тогда через грани всех сегментов $\{\overline{I}_i\}_{i=1}^{n}$ проведем гиперплоскости, определяя дизъюнктные разложения этих сегментов

$$\overline{I}_i=\coprod_{j=1}^{l_i}\overline{I}_{ij}.$$

Далее избавляемся от "лишних" $\overline{I}_{ij}$, определяя множества индексов A_l ($l=1,\dots,n$) следующим образом $A_1=\{1,\dots,l_1\}$ и для $i=2,\dots,n$

$$\bigcup_{j\in A_i} \overline{I}_{ij} = \overline{\overline{I}_i \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} \bigcup_{j\in A_k} \overline{I}_{ij}\right)}.$$

(то есть в A_i включаются номера тех сегментов $\overline{I}_{ij}$, которые не были выбраны на предыдущих шагах).

Таким образом, мы получили дизъюнктное разложение фигуры X

$$X = \coprod_{i=1}^{n} \coprod_{j\in A_i} \overline{I}_{ij}. \quad \square$$

Отметим, что дизъюнктное разложение фигуры из 4) в лемме 12.2 не определяется однозначно (можно, например, "измельчать" сегменты из данного дизъюнктного разложения).

Определение 12.3 ***Мерой фигуры*** $X \in \mathcal{F}$ *называется*

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu\big(\overline{I}_i\big)$$

где $X = \coprod_{i=1}^{n} \overline{I}_i$ *любое дизъюнктное разложение фигуры* X.

Упражнение 12.1

1) Доказать, что мера фигуры не зависит от выбора ее дизъюнктного разложения.

2) Если $X \in \mathcal{F}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^d$, то $\mu(\lambda X) = |\lambda|^d \mu(X)\,, \quad \mu(c + X) = \mu(X)$.

Лемма 12.3 (свойства меры фигуры)

1) Если $\{X_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{F}$ *— дизъюнктное семейство фигур, то*

$$\mu\left(\coprod_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(X_i)$$

(аддитивность).

2) Если $X \subset Y$, $X, Y \in \mathcal{F}$, *то* $\mu(X) \leqslant \mu(Y)$ *(монотонность).*

3) Для любого конечного набора фигур $\{X_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{F}$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(X_i)$$

(субаддитивность).

Доказательство. 1) Если $X_i = \coprod_{j=1}^{n_i} \overline{I}_{ij}$ — дизъюнктное разложение фигуры X_i $(i = 1, \ldots, n)$, то $\coprod_{i=1}^{n} \coprod_{j=1}^{n_i} \overline{I}_{ij}$ — дизъюнктное разложение фигуры $\coprod_{i=1}^{n} X_i$ и по определению меры фигуры

$$\mu\left(\coprod_{i=1}^{n} X_i\right) = \mu\left(\coprod_{i=1}^{n} \coprod_{j=1}^{n_i} \overline{I}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \mu\big(\overline{I}_{ij}\big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(X_i)\,.$$

2) Так как $Y = (Y \setminus X) \sqcup X$, то $Y = \left(\overline{Y \setminus X}\right) \sqcup X$ и фигуры справа не налегают, поэтому в силу 1)

$$\mu(Y) = \mu\left(\overline{Y \setminus X}\right) + \mu(X) \geqslant \mu(X)\,.$$

3) Сначала рассмотрим случай $n = 2$. Из $X_1 = (X_1 \setminus X_2) \sqcup (X_1 \cap X_2)$ следует $X_1 = \left(\overline{X_1 \setminus X_2}\right) \sqcup (X_1 \cap X_2)$ (фигуры справа не налегают), поэтому в силу 1)

$$\mu(X_1) = \mu\left(\overline{X_1 \setminus X_2}\right) + \mu(X_1 \cap X_2)\,.$$

Точно так же

$$\mu(X_2) = \mu\left(\overline{X_2 \setminus X_1}\right) + \mu(X_1 \cap X_2)\,.$$

Наконец, $X_1 \cup X_2 = \left(\overline{X_1 \setminus X_2}\right) \sqcup \left(\overline{X_2 \setminus X_1}\right) \sqcup (X_1 \cap X_2)$ и

$$\mu(X_1 \cup X_2) = \mu\left(\overline{X_1 \setminus X_2}\right) + \mu\left(\overline{X_2 \setminus X_1}\right) + \mu(X_1 \cap X_2) =$$

$$= \mu(X_1) + \mu(X_2) - \mu(X_1 \cap X_2) \leqslant \mu(X_1) + \mu(X_2)\,.$$

Осталось провести индукцию по числу слагаемых. □

1.3. Мера Жордана

Определение 12.4 *Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное множество. Тогда величины*

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(X) : X \subset E, \quad X \in \mathcal{F}\}\,, \tag{12.5}$$

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(Y) : E \subset Y, \quad Y \in \mathcal{F}\}\,, \tag{12.6}$$

*называются соответственно **внутренней и внешней мерами Жордана** для E.*

Лемма 12.4 *Для любого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^d$*

$$\mu_*(E) \leqslant \mu^*(E)\,. \tag{12.7}$$

Доказательство. Если $X \subset E \subset Y$ $(X, Y \in \mathcal{F})$, то $\mu(X) \leqslant \mu(Y)$ в силу свойства монотонности меры фигуры (лемма12.3). В этом неравенстве надо сначала перейти к точной верхней грани по всем фигурам $X \subset E$, а затем к точной нижней грани по всем фигурам $Y \supset E$. □

Определение 12.5 *Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^d$ называется **измеримым по Жордану**, если $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. Их общее значение называется **мерой Жордана** и обозначается*

$$\mu(E) = \mu_*(E) = \mu^*(E)\,.$$

Упражнение 12.2

1) Фигура измерима по Жордану и ее мера Жордана совпадает с мерой из определения 12.3.

2) Если $X \in \mathfrak{F}$ — фигура, то множество $\operatorname{int} X$ измеримо и $\mu(\operatorname{int} X) = \mu(X)$.

3) Множество $[0,1]^d \cap \mathbb{Q}^d$ неизмеримо по Жордану.

4) Если E — ограниченное множество и $\mu^*(E) = 0$, то E измеримо.

5) Конечное объединение множеств меры 0 измеримо и имеет меру 0.

Теорема 12.1 (критерий измеримости по Жордану) *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^d$ *ограниченное множество. Тогда следующие условия равносильны*
i) E *измеримо,*
ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists X \subset E \subset Y \quad \mu(Y) - \mu(X) < \varepsilon$,
iii) $\mu(\partial E) = 0$.

Доказательство. *i)* $\Longrightarrow$ *ii)* Для $\varepsilon > 0$ найдем фигуры $X \subset E$ и $Y \supset E$ так, чтобы $\mu(X) > \mu_*(E) - \frac{\varepsilon}{2}$, $\mu(Y) < \mu^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\mu(Y) - \mu(X) < \varepsilon$.

ii) $\Longrightarrow$ *iii)* Для $\varepsilon > 0$ найдем фигуры $X \subset E$ и $Y \supset E$ так, чтобы $\mu(Y) - \mu(X) < \varepsilon$ и положим $V = \overline{Y \setminus X}$. Тогда $Y = X \cup V$ и фигуры справа не налегают, поэтому в силу леммы 12.3.1) $\mu(V) = \mu(Y) - \mu(X) < \varepsilon$.

Далее, так как $\overline{E} \subset Y$ и $\overline{E^c} \subset X^c$, то

$$\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c} \subset Y \cap \overline{X^c} \subset \overline{Y \setminus X}.$$

Следовательно, $\partial E \subset V$ и $\mu(\partial E) = 0$.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Для $\varepsilon > 0$ найдем фигуру V так, чтобы $\partial E \subset \operatorname{int} V$, $\mu(V) < \varepsilon$. Положим $Y = \overline{E} \cup V$, $X = \overline{Y \setminus V}$ и покажем, что Y — фигура.

Если $x \in \overline{E}$, то либо $x \in \partial E$ (и тогда $x \in \operatorname{int} V$), либо $x \in \operatorname{int} E$ и найдется куб $\overline{Q_x} \subset \operatorname{int} E$. Из открытого покрытия $\{Q_x\}_{x \in \operatorname{int} E}$ и $\operatorname{int} V$ компакта $\overline{E}$ ($\overline{E}$ замкнуто и ограничено, а потому компактно по теореме 6.9 Гейне-Бореля) можно выделить конечное подпокрытие

$$\overline{E} \subset Q_{x_1} \cup \dots \cup Q_{x_m} \cup \operatorname{int} V.$$

Отсюда $Y = V \cup \overline{Q}_{x_1} \cup \dots \cup \overline{Q}_{x_m}$ и $Y \in \mathfrak{F}$. Ясно, что $X \in \mathfrak{F}$ и $\mu(Y) - \mu(X) = \mu(V) < \varepsilon$.

Наконец, по лемме 12.4 для любого $\varepsilon > 0$

$$0 \leqslant \mu^*(E) - \mu_*(E) \leqslant \mu(Y) - \mu(X) < \varepsilon$$

и $\mu^*(E) = \mu_*(E)$. $\square$

1.4. Свойства меры Жордана

В следующей теореме мы установим, что наше понимание площади в формуле (5.29) было "правильным" в том смысле, что оно согласовано с определениями этого параграфа.

Теорема 12.2 *Пусть задана функция* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$. *Тогда следующие условия равносильны*

i) криволинейная трапеция

$$T = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

измерима,

ii) $f \in R[a,b]$.

Если $f \in R[a,b]$, *то*

$$\mu(T) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{12.8}$$

Доказательство. Будем использовать обозначения (5.10)-(5.12). Пусть Π : $a = x_0 < \dots < x_n = b$ — любое разбиение $[a,b]$. Рассмотрим две фигуры

$$X(\Pi) = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] \times [0, m_k]\,, \quad Y(\Pi) = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] \times [0, M_k]\,.$$

Эти фигуры обладают свойствами

$$X(\Pi) \subset T \subset Y(\Pi), \quad \mu(X(\Pi)) = s_*(\Pi), \quad \mu(Y(\Pi)) = s^*(\Pi).$$

Отсюда мгновенно вытекают неравенства

$$I_* \leqslant \mu_*(T) \leqslant \mu^*(T) \leqslant I^*,$$

из которых получаем утверждение $ii) \Longrightarrow i)$ и равенство (12.8) (если $f \in R[a,b]$, то $I_* = I^*$ и по теореме 5.4 $I_* = \mu_*(T) = \mu^*(T) = I^*$).

$i) \Longrightarrow ii)$ Если T измерима, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется фигура

$$Y = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] \times \big[y_k^1, y_k^2\big]$$

(где $y_k^1 \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant y_k^2$), содержащая график

$$\Gamma_f = \big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b]\big\}$$

функции f, причем $\mu(Y) < \varepsilon$. Отсюда

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leqslant \mu(Y) < \varepsilon$$

Поэтому $I_* = I^*$ и по теореме 5.4 $f \in R[a,b]$. □

Следующая теорема показывает, что обычные операции над измеримыми множествами приводят снова к измеримым множествам.

Теорема 12.3 (измеримость и операции) *Если множества* E_1, E_2 *измеримы, то измеримы также множества* $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \setminus E_2$.

Доказательство вытекает из теоремы 12.1 и очевидных включений

$$\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2,$$

$$\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2,$$

$$\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2. \square$$

Итог развития меры Жордана — следующая коллекция свойств, за которыми мы постоянно наблюдали.

Теорема 12.4 (свойства меры Жордана)

1) Если множества E_1, E_2 измеримы и $E_1 \subset E_2$, то $\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2)$ (монотонность).

2) Если множества $E_1, \ldots, E_n$ измеримы и попарно не пересекаются, то

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)$$

(аддитивность).

3) Для любого конечного набора измеримых множеств $\{E_k\}_{k=1}^{n}$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)$$

(субаддитивность).

Доказательство. 3) Рассмотрим случай двух множеств. Возьмем любые фигуры $Y_i \supset E_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда $E_1 \cup E_2 \subset Y_1 \cup Y_2$ и по лемме 12.3.3)

$$\mu(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu(Y_1 \cup Y_2) \leqslant \mu(Y_1) + \mu(Y_2)\,.$$

Переходя к точной нижней границе по Y_i, получим

$$\mu(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu(E_1) + \mu(E_2)\,.$$

Итак для двух слагаемых утверждение доказано. Осталось провести индукцию по числу слагаемых.

2) Снова рассмотрим случай двух множеств. Пусть $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Возьмем любые фигуры $X_i \subset E_i$ $(i = 1, 2)$, тогда $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Так как $E_1 \cup E_2 \supset X_1 \cup X_2$, то в силу леммы 12.3.2)

$$\mu(E_1 \cup E_2) \geqslant \mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2)\,.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по всем таким фигурам X_i, получаем неравенство

$$\mu(E_1 \cup E_2) \geqslant \mu(E_1) + \mu(E_2)\,.$$

Противоположное неравенство вытекает из уже доказанного свойства субаддитивности.

1) Запишем $E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)$, тогда множества справа не пересекаются и можно использовать доказанное свойство 2)

$$\mu(E_2) = \mu(E_2 \setminus E_1) + \mu(E_1) \geqslant \mu(E_1) . \quad \square$$

§ 2. Мера Лебега в $\mathbb{R}^d$

Как и при построении меры Жордана, при построении новой меры мы будем исходить из уже определенной меры фигуры. Основная идея также будет близкой — "приближение изнутри и снаружи" элементарными множествами. Но классы элементарных множеств для такого приближения будут выбраны более гибко: для приближения изнутри мы возьмем ограниченные замкнутые множества, для приближения снаружи — открытые. Конечно, от этого конструкция усложнится, так как надо еще определить меры на этих классах множеств и установить их свойства.

2.1. Мера замкнутых и открытых множеств

Определение 12.6 ***Мерой открытого множества*** *называется*

$$\mu G = \sup\{\mu X : X \subset G, \quad X \in \Phi\} . \tag{12.9}$$

Определение 12.7 ***Мерой замкнутого ограниченного множества*** *называется*

$$\mu F = \inf\{\mu Y : F \subset Y, \quad Y \in \Phi\} . \tag{12.10}$$

Упражнение 12.3

1) Меры открытых и ограниченных замкнутых множеств монотонны.

2) Если $X \in \Phi$, то мера фигуры X и ее мера как замкнутого множества совпадают.

3) Если $X \in \Phi$, то для $\operatorname{int} X$ мера Жордана (см. упражнение 12.2.2)) и мера $\operatorname{int} X$ как открытого множества совпадают.

Лемма 12.5 (об отделимости замкнутых множеств) *Если F_1 и F_2 — замкнутые ограниченные множества, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то существуют фигуры $Y_i \in \Phi$ ($i = 1, 2$) со свойствами*

$$F_1 \subset Y_1, \quad F_2 \subset Y_2, \quad Y_1 \cap Y_2 = \varnothing.$$

Доказательство. Пусть $x \in F_1$, тогда $x \in F_2^c$ и существует открытый куб I_x с $\overline{I_x} \subset F_2^c$ (F_2^c — открыто). $\{I_x\}_{x \in F_1}$ — открытое покрытие компакта F_1 (см.

теорему 6.9 Гейне-Бореля), из которого можно выделить конечное подпокрытие $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}$. Тогда $Y_1 = \bigcup_{i=1}^n \overline{I}_{x_i} \supset F_1$ и $Y_1 \cap F_2 = \varnothing$.

Точно так же строится фигура Y_2, содержащая F_2 и не пересекающаяся с уже построенной фигурой Y_1. □

Лемма 12.6 (свойства мер открытых и замкнутых множеств)

1) Если множества G_1 и G_2 открыты, то $\mu(G_1 \cup G_2) \leqslant \mu G_1 + \mu G_2$.

2) Если множества F_1 и F_2 замкнуты и ограничены, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то $\mu(F_1 \cup F_2) = \mu F_1 + \mu F_2$.

3) Если F — замкнутое ограниченное множество, G — открытое множество, $F \subset G$, то $\mu F \leqslant \mu G$.

Доказательство. 1) Пусть $X \subset G_1 \cup G_2$ и $x \in X$, тогда существует куб $\overline{I}_x$ либо содержащийся в G_1, либо содержащийся в G_2. Из открытого покрытия $\{I_x\}_{x \in X}$ компакта X выделим конечное подпокрытие $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}$. Пусть X_1 — объединение тех из $\overline{I}_k$, которые целиком содержатся в G_1, а X_2 — объединение остальных. Тогда в силу леммы 12.3

$$\mu X \leqslant \mu(X_1 \cup X_2) \leqslant \mu X_1 + \mu X_2 \leqslant \mu G_1 + \mu G_2.$$

Теперь надо перейти здесь к точной верхней грани по фигурам $X \subset G_1 \cup G_2$ и $x \in X$.

2) Сначала докажем неравенство $\mu(F_1 \cup F_2) \leqslant \mu F_1 + \mu F_2$: если фигуры $Y_i \supset F_i$ $(i = 1, 2)$, то $Y_1 \cup Y_2 \supset F_1 \cup F_2$ и

$$\mu(F_1 \cup F_2) \leqslant \mu(Y_1 \cup Y_2) \leqslant \mu Y_1 + \mu Y_2$$

Осталось перейти к точной нижней грани по Y_i.

Для доказательства обратного неравенства по лемме 12.5 найдем фигуры $Y_i \supset F_i$ $(i = 1, 2)$, $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. Если фигура $Y \supset F_1 \cup F_2$, то $Y \cap Y_i \supset F_i$ $(i = 1, 2)$ и

$$\mu Y \geqslant \mu(Y \cap (Y_1 \cup Y_2)) = \mu((Y \cap Y_1) \cup (Y \cap Y_2))$$

$$= \mu(Y \cap Y_1) + \mu(Y \cap Y_2) \geqslant \mu F_1 + \mu F_2$$

в силу леммы 12.3. В полученном неравенстве

$$\mu Y \geqslant \mu F_1 + \mu F_2$$

надо перейти к точной нижней грани по $Y \supset F_1 \cup F_2$.

3) Пусть $x \in F$, тогда $x \in G$ и существует куб $\overline{I_x} \subset G$. Из $\{I_x\}_{x \in F}$ выделим конечное подпокрытие$I_{x_1}, \dots, I_{x_n}$. Тогда фигура $X = \bigcup_{i=1}^n \overline{I}_{x_i}$ содержит F и содержится в G, поэтому

$$\mu F \leqslant \mu X \leqslant \mu G. \square$$

2.2. Мера Лебега

Определение 12.8 *Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное множество. Тогда величины*

$$\mu_* E = \sup\{\mu F : F \subset E, \quad F \text{ замкнуто}\}, \tag{12.11}$$

$$\mu^* E = \inf\{\mu G : E \subset G, \quad G \text{ открыто}\}, \tag{12.12}$$

называются соответственно ***внутренней и внешней мерами Лебега*** *для E.*

Лемма 12.7 *Для любого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^d$*

$$\mu_* E \leqslant \mu^* E. \tag{12.13}$$

Доказательство. Это вытекает из леммы 12.6.3). □

Определение 12.9 *Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^d$ называется* ***измеримым по Лебегу****, если $\mu_* E = \mu^* E$. Их общее значение называется* ***мерой Лебега*** *и обозначается*

$$\mu E = \mu_* E = \mu^* E.$$

Следующая теорема показывает, что новое понятие меры не уже, чем любое из рассмотренных выше.

Теорема 12.5 *Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное множество. Тогда в каждом из следующих случаев оно измеримо по Лебегу*

1) если E открыто,

2) если E замкнуто,

3) если E измеримо по Жордану.

Во всех случаях мера Лебега E совпадает с ранее определенной мерой.

Доказательство. 1) Пусть G открыто. Если H открыто и $H \supset G$, то $\mu G \leqslant \mu H$ и точная нижняя грань мер справа достигается при $H = G$, то есть $\mu^* G = \mu G$.

Далее по определению меры открытого множества для любого $\varepsilon > 0$ найдется фигура $X \subset G$ с $\mu X > \mu G - \varepsilon$, поэтому $\mu_* G \geqslant \mu G$.

Из полученных неравенств следует $\mu_* G = \mu^* G$.

2) Аналогично части 1) устанавливается, что для замкнутого множества $\mu_* F = \mu F$. Далее для любого $\varepsilon > 0$ найдется фигура $Y \supset F$ с $\mu Y < \mu F + \varepsilon$, поэтому $\mu^* F \leqslant \mu F$. И снова $\mu_* F = \mu^* F$.

3) Временно обозначаем меры Жордана и Лебега соответственно через j и l. Тогда

$$\inf\{\mu Y : E \subset Y \in \Phi\} = \inf\{\mu(\operatorname{int} Y) : E \subset Y \in \Phi\} \geqslant$$

$$\geqslant \inf\{\mu G : E \subset G \text{ — открыто}\},$$

следовательно, $j^* E \geqslant l^* E$.

Аналогично

$$\sup\{\mu X : E \supset X \in \Phi\} \leqslant \sup\{\mu F : E \supset F \quad \text{замкнуто}\}$$

и $j_* E \leqslant l_* E$.

Из полученных неравенств следует $j_* E \leqslant l_* E \leqslant l^* E \leqslant j^* E = j_* E$ и $l_* E = l^* E = j_* E$. $\square$

2.3. Свойства меры Лебега

Теорема 12.6 (аддитивность) *Пусть $\{E_k\}_{k=1}^n$ — конечный набор попарно не пересекающихся измеримых по Лебегу множеств. Тогда их объединение измеримо по Лебегу и*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu E_k$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n = 2$.

Пусть множества $G_i \supset E_i$ $(i = 1, 2)$ открыты. Тогда в силу субаддитивности меры открытых множеств (лемма 12.6.1)) из $E_1 \cup E_2 \subset G_1 \cup G_2$ следует

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu(G_1 \cup G_2) \leqslant \mu G_1 + \mu G_2.$$

Переходя в этом неравенстве к точной нижней грани по G_i, получаем

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu E_1 + \mu E_2.$$

Если множества $F_i \subset E_i$ $(i = 1, 2)$ замкнуты, то $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ и в силу аддитивности меры замкнутых множеств (лемма 12.6.1)) из $E_1 \cup E_2 \supset F_1 \cup F_2$ следует

$$\mu_*(E_1 \cup E_2) \geqslant \mu(F_1 \cup F_2) = \mu F_1 + \mu F_2.$$

В этом неравенстве переходим к точной верхней грани по F_i:

$$\mu_*(E_1 \cup E_2) \geqslant \mu E_1 + \mu E_2.$$

Из полученных неравенств следует, что $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu E_1 + \mu E_2$. $\square$

Упражнение 12.4

1) Если G ограниченное открытое множество, F замкнутое множество и $G \supset F$, то разность $G \setminus F$ измерима по Лебегу и справедливо равенство

$$\mu(G \setminus F) = \mu G - \mu F.$$

2) Пусть E — ограниченное множество. Тогда следующие условия равносильны

i) E измеримо по Лебегу,

ii) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие открытое множество G и замкнутое множество F, что

$$F \subset E \subset G, \quad \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

3) Если множества E_1, E_2 измеримы по Лебегу и $E_1 \subset E_2$, то $\mu E_1 \leqslant \mu E_2$ (монотонность).

Теорема 12.7 *Если множества E_1, E_2 измеримы по Лебегу, то измеримы по Лебегу также множества $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \setminus E_2$.*

Доказательство. Достаточно доказать измеримость разности $E_1 \setminus E_2$, так как если это уже доказано, то измеримость объединения вытекает тогда из равенства

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)$$

(слагаемые справа не пересекаются и надо применить теорему 12.6), а измеримость пересечения вытекает из равенства

$$E_1 \cap E_2 = E_1 \setminus (E_1 \setminus E_2)\,.$$

Докажем измеримость разности $E_1 \setminus E_2$. Для этого зададим $\varepsilon > 0$ и найдем замкнутые множества $F_i \subset E_i$ $(i = 1, 2)$и открытые множества $G_i \supset E_i$ $(i = 1, 2)$ так, чтобы при $i = 1, 2$

$$F_i \subset E_i \subset G_i, \quad \mu(G_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим

$$G = G_1 \setminus F_2, \quad F = F_1 \setminus G_2,$$

тогда G открыто, F замкнуто и справедливы включения $F \subset E_1 \setminus E_2 \subset G$. Кроме того, очевидно включение $G \setminus F \subset (G_1 \setminus F_1) \cup (G_2 \setminus F_2)$. Поэтому из субаддитивности меры открытых множеств (лемма 12.6.1)) следует

$$\mu(G \setminus F) \leqslant \mu(G_1 \setminus F_1) + \mu(G_2 \setminus F_2) < \varepsilon.$$

Осталось применить результат упражнения 12.4.2). □

§ 3. Счетные семейства измеримых множеств

В этом параграфе рассматриваются принципиальные свойства меры Лебега, которыми мера Жордана не обладает. Эти свойства связаны с бесконечными последовательностями измеримых множеств.

Теорема 12.8 (σ-аддитивность меры Лебега) *Пусть $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность множеств, измеримых по Лебегу, причем $E_k \cap E_i = \varnothing$ $(i \neq k)$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ограничено.*

Тогда $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ измеримо, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k$ сходится и справедливо равенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k. \tag{12.14}$$

Доказательство. Начнем со следующего замечания: если $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность открытых множеств, то

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu G_k. \tag{12.15}$$

В самом деле, пусть $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ — фигура. Так как X компактна, то $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{k_i}$ для некоторого конечного набора $k_1, \ldots, k_n$. В силу свойства субаддитивности меры открытых множеств (лемма 12.6.1))

$$\mu X \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu G_{k_i} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu G_k$$

и надо перейти здесь к точной верхней грани по всем X.

Далее для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \geqslant \mu_*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu E_k$$

(была использована теорема 12.6). Отсюда при $n \to \infty$ получаем

$$\mu_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k.$$

Для доказательства противоположного неравенства зададим любое $\varepsilon > 0$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдем открытое множество $G_k \supset E_k$ так, чтобы $\mu G_k < \mu E_k + \varepsilon 2^{-k}$. Тогда $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и в силу (12.15)

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu G_k < \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k.$$

Устремляя ε к 0, получаем нужное неравенство. □

Теорема 12.9 *Пусть дана последовательность множеств $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, измеримых по Лебегу. Тогда*

1) если объединение $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ограничено, то оно измеримо и справедливо равенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k, \tag{12.16}$$

2) $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ измеримо.

Доказательство. 1) Положим $A_1 = E_1$ и $A_k = E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$ для $k \geqslant 2$. Тогда множества A_k измеримы, попарно не пересекаются и $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. В силу предыдущей теоремы

$$\mu \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mu \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k$$

(монотонность меры Лебега см. в упражнении 12.4.3)).

2) Это утверждение вытекает из 1) и равенства

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = E_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_k)\,. \ \square$$

Теорема 12.10 (свойство непрерывности) *Пусть множества E_k ($k \in \mathbb{N}$) измеримы по Лебегу. Тогда*

1) если $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ограничено, то

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu E_k,$$

2) если $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, то

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu E_k$$

Доказательство. 1) Положим $A_1 = E_1$ и $A_k = E_k \setminus E_{k-1}$ при $k \geqslant 2$. Тогда множества A_k измеримы, попарно не пересекаются и $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Отсюда по теореме 12.8

$$\mu \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mu \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \left[\mu E_1 + \sum_{k=2}^{n} (\mu E_k - \mu E_{k-1})\right] = \lim_{n\to\infty} \mu E_n.$$

2) Надо перейти к дополнениям: так как E_1 ограничено, то

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = E_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_k)\,.$$

Ко множеству справа можно применить уже доказанное утверждение 1). $\square$

Отметим, что мы распространили понятие меры на довольно широкий класс множеств. Тем не менее существуют ограниченные множества, которые не являются измеримыми по Лебегу. Мы не будем здесь излагать построение такого примера, скажем лишь, что это построение связано с аксиомой выбора.

§ 4. Мера Лебега неограниченных множеств

Заключительным шагом в построении меры будет ее распространение на неограниченные множества. В следующем определении ограниченность множества $E \subset \mathbb{R}^d$ не предполагается.

Определение 12.10 *Множество $E \subset \mathbb{R}^d$ называется* ***измеримым по Лебегу****, если для любого измеримого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}^d$ пересечение $A \cap E$ измеримо.* ***Мерой Лебега*** *в таком случае называется*

$$\mu E = \lim_{n \to \infty} \mu(E \cap G_n)\,,$$

где $\{G_n\}$ — последовательность открытых ограниченных множеств со свойствами

$$G_n \subset G_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{R}^d \tag{12.17}$$

(такие последовательности называются ***исчерпывающими****).*

Отметим, что теперь мера Лебега неограниченного множества может быть бесконечной.

Упражнение 12.5

1) Определение 12.10 корректно в том смысле, что определенная в нем мера Лебега не зависит от выбора исчерпывающей последовательности $\{G_n\}$.

2) Если $E \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное измеримое по Лебегу множество, то оно измеримо в смысле определения 12.10 и его новая мера Лебега совпадает с ранее определенной мерой.

3) Множество $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримо тогда и только тогда, когда измеримо его дополнение E^c.

Следующая теорема подводит итог наших усилий, направленных на построение меры Лебега.

Теорема 12.11

1) Если множества $E_1 \subset E_2$ измеримы, то $\mu E_1 \leqslant \mu E_2$ (монотонность).

2) Если $\{E_k\}$ — конечный или счетный набор измеримых множеств конечной меры, причем $E_k \cap E_i = \varnothing$ $(i \neq k)$, то объединение $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ измеримо и

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k.$$

(σ-аддитивность).

3) Если множества E_1 и E_2 измеримы, то множества $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \setminus E_2$ также измеримы.

4) Если $\{E_k\}$ *— последовательность измеримых множеств, то* $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ *и* $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ *измеримы и*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k$$

(σ-субаддитивность).

5) Если $\{E_k\}$ *— последовательность измеримых множеств конечной меры, то*

$$E_k \subset E_{k+1} \ (k \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu E_k,$$

$$E_k \supset E_{k+1} \ (k \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu E_k$$

(свойство непрерывности).

Доказательство. Мы докажем только 2). Пусть $\{G_n\}$ — исчерпывающая последовательность. Тогда множество $\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k \cap G_n)$ измеримо по теореме 12.8 и

$$\mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \cap G_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k \cap G_n)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k \cap G_n) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k.$$

Обратно, для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \cap G_n\right) \geqslant \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{m} E_k\right) \cap G_n\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(E_k \cap G_n)$$

Предельный переход при $n \to \infty$ дает неравенство $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \mu E_k$, в котором также надо совершить предельный переход при $m \to \infty$

Доказательства остальных свойств либо копируют соответствующие обоснования для ограниченных множеств, либо очевидны. Рекомендуется провести их самостоятельно. □

Глава 13
ИНТЕГРАЛ РИМАНА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Определение и условия интегрируемости

В этом параграфе на основе меры Жордана будет построена теория интегрирования по измеримым множествам в $\mathbb{R}^d$, аналогичная той, с которой мы имели дело раньше при $d = 1$ в главе 5. Схема изложения и доказательства в значительной степени будут повторять материал по теории интеграла Римана из главы 5.

Однако, имеются и важные новые моменты. Прежде всего, отметим новый критерий интегрируемости, выражаемый в терминах массивности множества точек разрыва функции. Кроме того, будет установлена связь интегралов по множествам различных размерностей. Наконец, формула замены переменной в многомерном случае доказывается существенно сложнее, чем раньше в одномерном случае.

Всюду в этом параграфе измеримость множества понимается в смысле Жордана, противное будет оговариваться особо.

1.1. Определение интеграла Римана

Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — измеримое множество. Система не пустых множеств $\Pi = \{E_k\}_{k=1}^n$ называется **разбиением множества** E, если выполнены следующие условия

1) E_k $(k = 1, \ldots, n)$ измеримы,

2) $E_k \cap E_i = \varnothing$ $(k \neq i)$,

3) $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$.

Число

$$\lambda = \lambda_\Pi = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{diam} E_k$$

называется **рангом разбиения** Π. Если для каждого $k = 1, \ldots, n$ во множестве E_k зафиксировать точку $\xi_k \in E_k$ и обозначить набор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то пара (Π, ξ) называется **разбиением множества E с отмеченными точками**.

Пусть на множестве E задана функция f. Тогда для любого разбиения (Π, ξ) с отмеченными точками введем **интегральную сумму** (Римана) функции f, соответствующей разбиению (Π, ξ):

$$s = s(\Pi, \xi) = s_f(\Pi, \xi, E) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\, \mu(E_k) \tag{13.1}$$

Определение 13.1 *Будем говорить, что число I является* ***пределом интегральных сумм****, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \Longrightarrow |s(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon. \tag{13.2}$$

Краткая запись этого: $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} s$.

Если такой предел существует, то он называется ***интегралом Римана*** *функции f по множеству E и обозначается*

$$I = \int_E f(x)\, dx = \int_E f\, d\mu. \tag{13.3}$$

В этом случае говорим также, что функция f ***интегрируема по Риману*** *на E.*

Класс всех интегрируемых на E функций обозначаем $R(E)$.

Ранее, рассматривая интеграл Римана по одномерному отрезку, мы видели (см. п. 2.2), что ограниченность функции является необходимым для ее интегрируемости. Сейчас (при интегрировании по измеримому множеству) это уже не так, что показывают простые примеры.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0), \\ n, \quad x = 1 - \frac{1}{n}, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ясно, что эта функция интегрируема на области определения, но не является ограниченной.

С другой стороны, если в определении интеграла ограничиться только разбиениями $\Pi = \{E_k\}_{k=1}^n$ с множествами E_k положительной меры (множества нулевой меры все равно не дают вклада в интегральные суммы), то для неограниченных функций предел интегральных сумм заведомо не будет существовать.

Это последнее замечание позволяет нам рассматривать только ограниченные функции.

1.2. Суммы Дарбу и их свойства

Аналогично одномерному случаю (см. § 3 главы 5) рассматривается вопрос о проверке интегрируемости с помощью сумм Дарбу.

Пусть Π — произвольное разбиение множества E. Величины

$$s_*(\Pi) = \inf_\xi s(\Pi, \xi), \quad s^*(\Pi) = \sup_\xi s(\Pi, \xi)$$

называются соответственно **нижней и верхней суммами Дарбу** для f, отвечающими заданному разбиению Π.

Как и в одномерном случае

$$s_*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} m_k \mu(E_k) \qquad s^*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} M_k \mu(E_k)\,.$$

где

$$m_k = \inf f(E_k)\,, \quad M_k = \sup f(E_k) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Условимся в дальнейшем говорить, что разбиение Π содержится в разбиении Π', если каждое множество из Π является суммой некоторых множеств из Π'.

Лемма 13.1 *1) Для любого разбиения с отмеченными точками* (Π, ξ)

$$s_*(\Pi) \leqslant s(\Pi, \xi) \leqslant s^*(\Pi).$$

2) Если разбиение Π *содержится в разбиении* Π'*, то*

$$s_*(\Pi) \leqslant s_*(\Pi'), \quad s^*(\Pi') \leqslant s^*(\Pi).$$

3) Для любых разбиений Π *и* Π'

$$s_*(\Pi) \leqslant s^*(\Pi').$$

1.3. Интегралы Дарбу и их свойства

Величины

$$I_* = \sup_{\Pi} s_*(\Pi), \quad I^* = \inf_{\Pi} s^*(\Pi)$$

называются соответственно **нижним и верхним интегралами Дарбу** функции f на множестве E.

Лемма 13.2 *1) Для любых разбиений* Π *и* Π'

$$s_*(\Pi) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant s^*(\Pi').$$

2) $I_* = \lim\limits_{\lambda \to 0} s_*(\Pi), \quad I^* = \lim\limits_{\lambda \to 0} s^*(\Pi).$

Леммы 13.1 и 13.2 доказываются без каких-либо изменений по сравнению с одномерным случаем (см. леммы 5.1–5.3 в главе 5). Это же относится к следующей теореме, которая является полным повторением теоремы 5.4 главы 5.

Теорема 13.1 (критерий интегрируемости) *Если* $f : E \to \mathbb{R}$ *— ограниченная функция, то следующие условия равносильны*

i) f *интегрируема на* E,

ii) $\lim\limits_{\lambda \to 0}(s^*(\Pi) - s_*(\Pi)) = 0$,

iii) $I_* = I^*$.

Условие ii) в теореме 13.1 удобно использовать также в следующем виде

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\mu(E_k)=0,$$

где ω_k — колебание функции f на множестве E_k.

Упражнение 13.1

1) Если E — компактное множество, измеримое по Жордану и $f\in C(E)$, то $f\in R(E)$.

2) Если множество E измеримо по Жордану, функция f ограничена на E и ее множество точек разрыва имеет меру Жордана 0, то $f\in R(E)$.

1.4. Критерий Лебега

Все достаточные условия интегрируемости из упражнений 13.1 (и из теоремы 5.5 в одномерном случае) говорят нам, что условие $f\in R(E)$ выполнено, если множество точек разрыва функции "не очень велико".

Сейчас мы приведем точную форму массивности множества точек разрыва функции, обеспечивающую ее интегрируемость. Для этого нам понадобится следующее понятие.

Определение 13.2 *Будем говорить, что множество $E\subset\mathbb{R}^d$ имеет* ***лебегову меру нуль****, если для любого $\varepsilon>0$ существует конечное или счетное множество сегментов $\{Q_k\}$, удовлетворяющее условиям*

$$E\subset\bigcup_k Q_k,\quad \sum_k\mu(Q_k)<\varepsilon.$$

Упражнение 13.2

1) Каждое множество, мера Жордана которого равна нулю, имеет также и лебегову меру нуль. В частности, это относится к любому конечному множеству.

2) Множество $\mathbb{Q}^d\cap[0,1]^d$ неизмеримо по Жордану (см. утверждение 4) в упражнении 12.2), однако имеет лебегову меру нуль.

3) Конечное или счетное объединение множеств лебеговой меры нуль также имеет лебегову меру нуль.

Напомним (см. (3.4)), что **колебанием функции** f **на множестве** E называется

$$\omega(E)=\omega_f(E)=\sup f(E)-\inf f(E).$$

Введем теперь **колебание функции** $f:E\to\mathbb{R}$ **в точке** $x_0\in E$ как

$$\omega(x_0)=\omega_f(x_0)=\lim_{\delta\to+0}\omega_f(E\cap B(x_0,\delta))\,. \tag{13.4}$$

Упражнение 13.3

1) Функция $\delta \to \omega_f(E \cap B(x_0, \delta))$ убывает (поэтому предел в (13.4) существует и определение колебания в точке корректно).

2) Непрерывность функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0 \in E$ равносильна условию $\omega_f(x_0) = 0$.

В доказательстве следующей теоремы для интервала I и $\lambda > 0$ будет использоваться обозначение λI для концентрического с I интервала (центр которого совпадает с центром интервала I), а длины ребер равны соответствующим длинам ребер I, умноженнным на λ.

Теорема 13.2 (Лебег) *Пусть функция f ограничена на измеримом по Жордану множестве. Тогда следующие условия равносильны*

i) $f \in R(E)$,

ii) множество точек разрыва функции f имеет лебегову меру нуль.

Доказательство. $i) \implies ii)$ Пусть $D \subset E$ — множество точек разрыва функции f. Тогда обозначив при $s \in \mathbb{N}$

$$D_s = \left\{x \in E : \omega(x) > \frac{1}{s}\right\},$$

получаем

$$D = \{x \in E : \omega(x) > 0\} = \bigcup_{s=1}^{\infty} D_s.$$

В силу утверждения 3) из упражнения 13.2 достаточно показать, что $\mu(D_s) = 0$ для каждого $s \in \mathbb{N}$.

Так как $f \in R(E)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение $\Pi = \{E_k\}_{k=1}^n$ множества E со свойством

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(E_k)\, \mu(E_k) < \frac{\varepsilon}{s}.$$

Введем обозначения

$$\Lambda = \left\{k \in \mathbb{N} : \omega(E_k) \geqslant \frac{1}{s}\right\}, \quad A = \bigcup_{k \in \Lambda} E_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^{n} \partial E_k.$$

тогда

$$D_s \subset A \cup B. \tag{13.5}$$

Докажем это.

Пусть $x \in D_s$, тогда $x \in E_k$ для некоторого $1 \leqslant k \leqslant n$. Если $x \in \partial E_k$, то $x \in B$. В противном случае, $x \in \operatorname{int} E_k$, а тогда для достаточно малых $\delta > 0$ будет справедливо включение $E \cap B(x, \delta) \subset E_k$. Следовательно

$$\omega(E_k) \geqslant \omega(E \cap B(x, \delta)) > \frac{1}{s}.$$

Последнее неравенство выполнено для достаточно малых $\delta > 0$, так как $x \in D_s$ и $\omega(x) > \frac{1}{s}$. Итак, $\omega(E_k) > \frac{1}{s}$ и $k \in \Lambda$, поэтому $x \in A$. Таким образом, включение (13.5) доказано.

Ясно, что $\mu(B) = 0$, так как B — конечное объединение множеств меры 0 (см. теорему 12.1). Кроме того,

$$\frac{\varepsilon}{s} > \sum_{k=1}^{n} \omega(E_k)\,\mu(E_k) \geqslant \sum_{k\in\Lambda} \omega(E_k)\,\mu(E_k) \geqslant \frac{1}{s}\mu(A)$$

и $\mu(A) < \varepsilon$. Следовательно,

$$\mu^*(D_s) \leqslant \mu^*(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B) = \mu(A) < \varepsilon.$$

(в силу измеримости A и B их объединение $A \cup B$ измеримо). Таким образом, $\mu^*(D_s) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому $\mu(D_s) = 0$, что и требовалось.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и найдем конечный или счетный набор открытых кубов $\{Q_k\}$ так, чтобы

$$D \subset \bigcup_k Q_k, \quad \sum_k \mu(Q_k) < \varepsilon.$$

Далее, для любой точки $x \in E \setminus D$ найдем открытый куб I_x с центром в точке x так, чтобы

$$\omega(E \cap I_x) < \varepsilon.$$

и пусть $I_x^* = \frac{1}{2} I_x$.

По теореме 12.1 найдем фигуры X и Y так, чтобы

$$X \subset E \subset Y, \quad \mu(Y) - \mu(X) < \varepsilon$$

Тогда $W = \overline{Y \setminus X}$ — фигура (лемма 12.2.1)), представимая по лемме 12.2.4) в виде дизъюнктного объединения сегментов $W = \coprod_{i=1}^{m} \overline{J_i}$.

Совокупность открытых интервалов

$$\{Q_k, I_x^*\}_{k\in\mathbb{N}, x\in E\setminus D}$$

образует открытое покрытие компакта X, из которого можно выделить конечное подпокрытие X

$$Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_p}, \quad I_{x_1}^*, \ldots, I_{x_q}^*$$

Обозначим через δ_1 минимальное из ребер интервалов $I_{x_1}^*, \ldots, I_{x_q}^*$, δ_2 — минимальное из ребер интервалов $J_1, \ldots, J_m$,

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2\}$$

Возьмем теперь любое разбиение $\Pi = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ множества E с $\lambda_\Pi < \delta$ и покажем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(E_k)\,\mu(E_k) < c\varepsilon,$$

где c — некоторая положительная постоянная, зависящая только от размерности d, функции f и множества E.

Для этого разобьем множества E_k на три группы. Если $E_k \cap W \neq \varnothing$, то $k \in \Lambda_1$. Остальные E_k целиком содержатся в X. Если $E_k \cap \bigcup_{i=1}^{q} I_{x_i}^* \neq \varnothing$, то $k \in \Lambda_2$. Наконец, множество номеров оставшихся E_k обозначим Λ_3, такие E_k целиком содержатся в $\bigcup_{i=1}^{p} Q_{k_i}$.

Если $k \in \Lambda_1$, то E_k пересекается с одним из J_i и

$$\bigcup_{k\in\Lambda_1} E_k \subset \bigcup_{i=1}^{m} 2J_i,$$

поэтому

$$\sum_{k\in\Lambda_1} \omega(E_k)\,\mu(E_k) \leqslant \omega(E)\mu\left(\bigcup_{k\in\Lambda_1} E_k\right) \leqslant 2^d\omega(E)\sum_{k=1}^{m}\mu(J_i) < 2^d\omega(E)\varepsilon.$$

Кроме того, так как для каждого $k \in \Lambda_2$ найдется такое i, что $E_k \subset 2I_{x_i}^* = I_{x_i}$, то $\omega(E_k) < \varepsilon$. Отсюда

$$\sum_{k\in\Lambda_2} \omega(E_k)\,\mu(E_k) \leqslant \varepsilon\mu(E)\,.$$

Наконец, $E_k \subset \bigcup_{i=1}^{p} Q_{k_i}$ при $k \in \Lambda_3$ и

$$\sum_{k\in\Lambda_3} \omega(E_k)\,\mu(E_k) \leqslant \omega(E)\mu\left(\bigcup_{k\in\Lambda_3} E_k\right) \leqslant \omega(E)\mu\left(\bigcup_{k\in\Lambda_3} Q_k\right) < \omega(E)\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(E_k)\,\mu(E_k) \leqslant \left[2^{d+1}\omega(E) + \mu(E)\right]\varepsilon$$

и по критерию интегрируемости (теорема 13.1) $f \in R(E)$. $\square$

1.5. Свойства интеграла

Следующая теорема представляет собой коллекцию важнейших и наиболее употребительных свойств интеграла. Доказательства этих свойств ничем не отличаются от соответствующих рассуждений в главе 5.

Теорема 13.3 (свойства интеграла)
1) Если $\mu(E) = 0$, то на E интегрируема любая функция и $\int_E f\,dx = 0$.
2) Если E измеримо по Жордану, то $\int_E dx = \mu(E)$.
3) Если $f \in R(E)$ и $A \subset E$ — измеримое по Жордану подмножество, то $f \in R(A)$.

4) Если функция f интегрируема на каждом из множеств E_1 и E_2, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то она интегрируема на $E_1 \cup E_2$ и

$$\int_{E_1 \cup E_2} f\,dx = \int_{E_1} f\,dx + \int_{E_2} f\,dx.$$

5) Пусть функции f и g заданы на измеримом по Жордану множестве E и жорданова мера множества $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ равна нулю. Тогда если $f \in R(E)$, то $g \in R(E)$ и их интегралы Римана совпадают.

6) Если $f, g \in R(E)$, то при $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $\alpha f + \beta g \in R(E)$ и

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_E f\,dx + \beta \int_E g\,dx.$$

7) Если $f, g \in R(E)$ и $f(x) \leqslant g(x)$ на E, то

$$\int_E f\,dx \leqslant \int_E g\,dx.$$

8) Если $f \in R(E)$, то $|f| \in R(E)$ и

$$\left|\int_E f\,dx\right| \leqslant \int_E |f|\,dx.$$

9) Если $f, g \in R(E)$, то $f \cdot g \in R(E)$.

10) Если $f \in R(E)$ и $M = \sup f(E)$, $m = \inf f(E)$, то

$$m\mu(E) \leqslant \int_E f\,dx \leqslant M\mu(E)\,.$$

§ 2. Вычисление интеграла Римана сведением к повторному

2.1. Мера декартового произведения множеств

Мы будем ниже иметь дело с мерами в различных пространствах $\mathbb{R}^d$. Для того, чтобы их различать, будем писать в случае необходимости μ_d вместо μ.

Теорема 13.4 *Если множества $E_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$ $(i = 1, 2)$ измеримы по Жордану, то $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ также измеримо по Жордану и*

$$\mu_{d_1+d_2}(E_1 \times E_2) = \mu_{d_1} E_1 \cdot \mu_{d_2} E_2. \tag{13.6}$$

Доказательство. Для сегментов равенство (13.6) очевидно (см. определение 12.3).

Далее рассмотрим случай фигур: если $X_i = \bigcup_{k=1}^{n_i} I_k^i$ — дизъюнктное разложение фигур X_i $(i = 1, 2)$, то

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{j=1}^{n_1} I_j^1 \times \bigcup_{k=1}^{n_2} I_k^2 = \bigcup_{j=1}^{n_1} \bigcup_{k=1}^{n_2} I_j^1 \times I_k^2$$

дизъюнктное разложение фигуры $X_1 \times X_2$ и по уже доказанному для сегментов

$$\mu(X_1 \times X_2) = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \mu\big(I_j^1 \times I_k^2\big) = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \mu\big(I_j^1\big) \cdot \mu\big(I_k^2\big) = \mu(X_1) \cdot \mu(X_2)\,.$$

В общем случае рассуждаем так: если X_1 и X_2 — фигуры, $X_i \subset E_i$, то $X_1 \times X_2 \subset E_1 \times E_2$ и

$$\mu(X_1) \cdot \mu(X_2) = \mu(X_1 \times X_2) \leqslant \mu_*(E_1 \times E_2)\,.$$

Переход к точной верхней грани по X_1 и X_2 дает неравенство

$$\mu(E_1) \cdot \mu(E_2) \leqslant \mu_*(E_1 \times E_2)\,.$$

Точно так же доказывается неравенство

$$\mu^*(E_1 \times E_2) \leqslant \mu(E_1) \cdot \mu(E_2)\,.$$

Отсюда $\mu^*(E_1 \times E_2) = \mu_*(E_1 \times E_2) = \mu(E_1) \cdot \mu(E_2)$ □

Отметим для дальнейшего, что мы доказали также равенство

$$\int_{E_1 \times E_2} d(x_1, x_2) = \mu_{d_1} E_1 \cdot \mu_{d_2} E_2 \tag{13.7}$$

2.2. Основная теорема

Теорема 13.5 *Пусть множества $E_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$ $(i = 1, 2)$ измеримы по Жордану и $f \in R(E_1 \times E_2)$. Пусть $I^*(x)$ и $I_*(x)$ — соответственно верхний и нижний интегралы Дарбу для $\int_{E_2} f(x, y)\, dy$. Тогда любая функция $I : E_1 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая неравенствам*

$$I_*(x) \leqslant I(x) \leqslant I^*(x), \quad x \in E_1,$$

интегрируема на E_1 и справедливо равенство

$$\int_{E_1 \times E_2} f(x, y)\, d(x, y) = \int_{E_1} I(x)\, dx. \tag{13.8}$$

Доказательство. Пусть $\Pi_1 = \{E_i^1\}_{i=1}^{n_1}$ и $\Pi_2 = \big\{E_j^2\big\}_{j=1}^{n_2}$ — любые разбиения множеств E_1 и E_2 соответственно, тогда $\Pi = \big\{E_i^1 \times E_j^2\big\}$ — разбиение множества $E_1 \times E_2$.

Отметим очевидное неравенство

$$I(x) \geqslant I_*(x) \geqslant \sum_{j=1}^{n_2} \inf_{y \in E_j^2} f(x,y)\mu\big(E_j^2\big)\,.$$

Поэтому

$$s_*(I,\Pi_1) = \sum_{i=1}^{n_1} \inf_{x \in E_i^1} I(x)\mu\big(E_i^1\big) \geqslant \sum_{i=1}^{n_1} \inf_{x \in E_i^1} \sum_{j=1}^{n_2} \inf_{y \in E_j^2} f(x,y)\mu\big(E_j^2\big)\cdot\mu\big(E_i^1\big) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} \inf_{(x,y) \in E_i^1 \times E_j^2} f(x,y)\mu\big(E_i^1\big)\cdot\mu\big(E_j^2\big) = s_*(f,\Pi)$$

Аналогично доказывается, что $s^*(I,\Pi_1) \leqslant s^*(f,\Pi)$.

Таким образом,

$$s_*(f,\Pi) \leqslant s_*(I,\Pi_1) \leqslant s^*(I,\Pi_1) \leqslant s^*(f,\Pi).$$

Крайние выражения сходятся к интегралу от f по $E_1 \times E_2$, поэтому к нему же сходятся и средние. Последнее означает, что $I \in R(E_1)$ и равенство (13.8). $\Box$

Может показаться странным, что в (13.8) справа под интегралом находится весьма произвольная функция, в то время как слева — вполне определенное число. На самом деле, "в большинстве точек" $x \in E_1$ выполнено равенство $I_*(x) = I^*(x)$.

Пусть для простоты E_1 — открытое множество. Тогда из теоремы 13.5 вытекает, что разность $g = I^* - I_* \in R(E_1)$ и

$$\int_{E_1} [I^*(x) - I_*(x)]\,dx = 0.$$

Если $x_0 \in E_1$ — точка непрерывности g и $g(x_0) > 0$, то при некотором $\delta > 0$

$$g(x) \geqslant \frac{g(x_0)}{2} > 0, \quad x \in B(x_0,\delta) \subset E_1.$$

Отсюда

$$0 = \int_{E_1} [I_*(x) - I^*(x)]\,dx \geqslant \int_{B(x_0,\delta)} g(x)\,dx \geqslant \frac{g(x_0)}{2}\mu(B(x_0,\delta))\,.$$

Поэтому $g(x_0) = 0$.

В силу критерия Лебега (теорема 13.2) неравенство $I_*(x) \neq I^*(x)$ возможно лишь на подмножестве точек из E_1 лебеговой меры 0.

2.3. Следствия из основной теоремы

Следствие 13.1 *Если множества $E_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$ $(i = 1, 2)$ измеримы по Жордану и функция f ограничена и непрерывна на $E_1 \times E_2$, то*

$$\int_{E_1 \times E_2} f(x, y)\, d(x, y) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Доказательство. Конечно, это — непосредственное следствие теоремы 13.5, так как при наших условиях для каждого $x \in E_1$ функция $y \mapsto f(x, y)$ $(y \in E_2)$ интегрируема на E_2 (она непрерывна), поэтому (в обозначениях теоремы 13.5)

$$I(x) = I_*(x) = I^*(x) = \int_{E_2} f(x, y)\, dy. \quad \square$$

Следствие 13.2 *Если $f \in C(I)$, где $I = \prod_{k=1}^{d} \left[a^k, b^k\right]$, то*

$$\int_I f(x)\, dx = \int_{a^1}^{b^1} \ldots \int_{a^d}^{b^d} f\, dx^d \ldots dx^1$$

Доказательство получается по индукции. Из теоремы 13.5 вытекает равенство

$$\int_I f(x)\, dx = \int_{a^1}^{b^1} \left[\int_{\prod_{k=2}^{d} \left[a^k, b^k\right]} f\, dx^d \ldots dx^2 \right] dx^1.$$

Для вычисления внутреннего $d-1$-мерного интеграла надо применить предположение индукции. $\square$

Следствие 13.3 *Пусть множество $D \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Жордану и $\varphi_1, \varphi_2 \in R(D)$, причем $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$. Тогда если*

$$E = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \varphi_1(x) \leqslant t \leqslant \varphi_2(x)\right\}$$

и функция f ограничена и непрерывна на E, то

$$\int_E f(x, t)\, d(x, t) = \int_D \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, t)\, dt \right) dx.$$

Доказательство. Пусть

$$m = \inf\{\varphi_1(x) : x \in D\}, \quad M = \sup\{\varphi_2(x) : x \in D\}.$$

Продолжим функцию f с множества E на множество $D \times [m, M]$ равенством

$$g(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{при } (x, t) \in E, \\ 0, & \text{при } (x, t) \in (D \times [m, M]) \setminus E. \end{cases}$$

Тогда функция g интегрируема на $D \times [m, M]$ (множество ее точек разрыва содержится в объединении графиков функций φ_1 и φ_2, а потому его мера Жордана равна нулю). По следствию 13.1

$$\int_E f(x,t)\,d(x,t) = \int_{D\times[m,M]} g(x,t)\,d(x,t) = \int_D \left(\int_m^M g(x,t)\,dt\right) dx.$$

Внутренний интеграл в силу свойства аддитивности равен

$$\int_m^M g(x,t)\,dt = \int_m^{\varphi_1(x)} g(x,t)\,dt + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(x,t)\,dt + \int_{\varphi_2(x)}^M g(x,t)\,dt.$$

Первый и третий интегралы справа равны нулю (там подинтегральная функция равна нулю), а в среднем интеграле можно заменить g на f. $\square$

Следствие 13.4 (принцип Кавальери) *Пусть множество* $E \subset \mathbb{R}^{d+1}$ *измеримо по Жордану,*

$$a = \inf\left\{x^{d+1} : x \in E\right\}, \quad b = \sup\left\{x^{d+1} : x \in E\right\},$$

$$E_t = \left\{x \in \mathbb{R}^d : (x,t) \in E\right\}, \quad t \in [a,b]$$

(сечение множества E *гиперплоскостью* $\mathbb{R}^d \times \{t\}$*).*

Тогда для всех $t \in [a,b]$*, кроме, быть может, множества лебеговой меры нуль, множество* E_t *измеримо по Жордану и*

$$\mu_{d+1}(E) = \int_a^b \mu_d(E_t)\;dt$$

Вычислим, например, меру d-мерного шара $B(0,r)$, обозначив ее $V_d(r)$.

Сначала по индукции покажем, что

$$V_d(r) = c_d r^d,$$

где c_d — некоторая постоянная. При $d = 2$, вычисляя двойной интеграл, находим $V_2(r) = \pi r^2$ и $c_2 = \pi$.

Далее действуем по индукции, применяя следствие 13.4:

$$V_d(r) = \int_{-r}^{r} V_{d-1}\left(\sqrt{r^2 - t^2}\right)\,dt = c_{d-1}\int_{-r}^{r}\left(r^2 - t^2\right)^{\frac{d-1}{2}}\,dt =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = r\sin\varphi \\ dt = r\cos\varphi\,d\varphi \end{array}\right] = c_{d-1} r^d \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^d\varphi\,d\varphi.$$

Итак, мы доказали, что $V_d(r) = c_d r^d$, причем постоянная удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению

$$c_d = c_{d-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^d\varphi\,d\varphi.$$

Отсюда, используя формулы Валлиса (11.14), находим

$$c_{2d+1} = 2\cdot\frac{(2\pi)^d}{(2d+1)!!}, \quad c_{2d} = \frac{(2\pi)^d}{(2d)!!}.$$

§ 3. Замена переменной в интеграле Римана

3.1. Диффеоморфизм

Определение 13.3 *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ открытое множество. Функция $f : G \to \mathbb{R}^d$ называется* ***диффеоморфизмом*** *на G, если*
1) $f \in C^1(G)$,
2) f биекция,
3) $f^{-1} \in C^1(f(G))$

Отметим, что якобиан $\det \mathbf{J}f(x)$ диффеоморфизма отличен от нуля для любого $x \in G$.

Напомним, что через $\mathbf{J}f(a)$ мы обозначаем матрицу Якоби дифференцируемой функции (см. (8.4)).

Наряду с евклидовой нормой нам будет удобно пользоваться равномерной нормой
$$\|x\|^* = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} |x^k| .$$
(см. (6.14)), которая связана с евклидовой неравенствами (6.15). С ее помощью удобно задавать куб $I = \left\{t \in \mathbb{R}^d : |t - t_I|^* < \frac{l}{2}\right\}$, где t_I — центр куба I, а l — длина его ребра.

3.2. Преобразование меры при диффеоморфизмах

Лемма 13.3 *Пусть $\lambda : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — невырожденное линейное преобразование и множество $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Жордану. Тогда его образ $\lambda(E)$ измерим по Жордану и*
$$\mu(\lambda(E)) = |\det \lambda|\, \mu(E) . \tag{13.9}$$

Доказательство. Для случая сегментов это известно из курса линейной алгебры. Отсюда сразу следует, что это свойство справедливо и для фигур. Наконец, если $X \subset E$ — фигура, то $\lambda(X) \subset \lambda(E)$ и
$$|\det \lambda|\, \mu(X) = \mu\lambda(X) \leqslant \mu_*(\lambda(E)) .$$
Переходя к точной верхней грани по X, получим $|\det \lambda|\, \mu(E) \leqslant \mu_*(\lambda(E))$. Точно так же доказывается, что $|\det \lambda|\, \mu(E) \geqslant \mu^*(\lambda(E))$ □

Лемма 13.4 *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $\varphi : G \to \mathbb{R}^d$ — диффеоморфизм, $K \subset G$ — компактное множество.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого куба $I \subset K$, $\operatorname{diam} I < \delta$, выполнено неравенство
$$\mu^*(\varphi(I)) \leqslant (1 + \varepsilon)|\det \varphi'(t_I)|\, \mu(I) .$$

Доказательство. Зафиксируем куб $I \subset K$ и ведем обозначения $A = \varphi'(t_I)$,

$$H(t) = \varphi(t_I) + A(t - t_I), \quad \psi(t) = \varphi(t) - H(t).$$

Нашей ближайшей целью является доказательство следующего основного включения

$$\varphi(I) \subset H(J), \tag{13.10}$$

где J — куб, с тем же центром, что и I, но с большей длиной ребра $(1+\eta)l$, где l — длина ребра I, а η определяется из равенства $(1+\eta)^d = 1+\varepsilon$.

Пусть $x \in \varphi(I)$, тогда найдется единственное $t \in I$, для которого $\varphi(t) = x$. кроме того, существует также единственное $\tau \in \mathbb{R}^d$ со свойством $H(\tau) = x$ (последнее равенство можно рассматривать как систему уравнений, определитель которой совпадает с $\det A \neq 0$).

Оценим

$$|t-\tau|^* = \left|A^{-1}(At) - A^{-1}(A\tau)\right|^* \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \cdot |At - A\tau| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{d}\left\|A^{-1}\right\| \cdot |H(t) - H(\tau)|^* = \sqrt{d}\left\|A^{-1}\right\| \cdot |\varphi(t) - H(t)|^* =$$

$$= \sqrt{d}\left\|A^{-1}\right\| \cdot |\psi(t) - \psi(t_I)|^*.$$

Так как $\psi'(t) = \varphi'(t) - \varphi'(t_I)$, то из соображений равномерной непрерывности на K можно указать $\delta > 0$ так, чтобы для любого куба $I \subset K$

$$ad \max_{1\leqslant i\leqslant d} \sup_{s\in I}\left|\operatorname{grad}\psi^i(s)\right| < \eta \quad \text{при} \quad |s - t_I| < \delta,$$

где

$$\sup_{s\in K}\left\|(\varphi'(s))^{-1}\right\| = a < +\infty.$$

Мы можем продолжить оценку

$$|t-\tau|^* \leqslant a\sqrt{d}\max_i\left|\operatorname{grad}\psi^i(s)\right| \cdot |t - t_I| \leqslant$$

$$\leqslant ad\max_i\left|\operatorname{grad}\psi^i(s)\right| \cdot |t - t_I|^* \leqslant \eta|t - t_I|^*.$$

Следовательно,

$$|\tau - t_I|^* \leqslant |\tau - t|^* + |t - t_I|^* \leqslant (1+\eta)|t - t_I|^*.$$

Отсюда следует, что $\tau \in J$. Это означает, что $\varphi(t) = H(\tau) \in H(J)$ Поэтому и включение (13.10) доказано.

В силу предыдущей леммы

$$\mu^*(\varphi(I)) \leqslant \mu^*(H(J)) = |\det H| \cdot \mu(J) =$$

$$= (1+\eta)^d|\det\varphi'(t_I)|\,\mu(I) = (1+\varepsilon)|\det\varphi'(t_I)|\,\mu(I). \quad \square$$

3.3. Формула замены переменной

Теорема 13.6 (замена переменной) *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $\varphi : G \to \mathbb{R}^d$ — диффеоморфизм, $f \in C(\varphi(G))$.*

Тогда для любого измеримого по Жордану компакта $K \subset G$ его образ $\varphi(K)$ измерим по Жордану и справедливо равенство

$$\int_{\varphi(K)} f\,dx = \int_K (f \circ \varphi) \cdot |\mathbf{J}\varphi|\;dt \qquad (13.11)$$

Доказательство. 1 шаг. Докажем измеримость образа $\varphi(K)$ любого измеримого компакта $K \subset G$. Прежде всего отметим, что

$$\partial\varphi(K) = \varphi(\partial(K)).$$

В самом деле,

$$\partial\varphi(K) = \overline{\varphi(K)} \cap \overline{\varphi(G \setminus K)} = \varphi(\overline{K}) \cap \varphi(\overline{G \setminus K}) = \varphi(\overline{K} \cap \overline{G \setminus K}) = \varphi(\partial K)$$

(все замыкания в относительной топологии (на G или на $\varphi(G)$).

Пусть X_0 — фиксированная фигура, $K \subset X_0 \subset G$.

Так как K измеримо, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать фигуру $X = \bigcup_{k=1}^n \overline{I}_k$ (дизъюнктное разложение) так, чтобы

$$\partial K \subset X, \quad \mu(X) < \varepsilon,$$

причем можно считать, что $\operatorname{diam} \overline{I}_k < \delta$, где $\delta > 0$ определяется по лемме 13.4. Кроме того, можно считать, что $X \subset X_0$ (иначе вместо X рассмотрим $X \cap X_0$).

Тогда

$$\mu^*(\partial\varphi(K)) = \mu^*(\varphi(\partial(K))) \leqslant \mu^*(\varphi(X)) \leqslant \sum_{k=1}^n \mu^*\big(\varphi(\overline{I}_k)\big) \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon) \sup_{t \in X_0} |\mathbf{J}\varphi(t)| \sum_{k=1}^n \mu\big(\overline{I}_k\big) \leqslant \varepsilon(1+\varepsilon) \sup_{t \in X_0} |\mathbf{J}\varphi(t)|$$

и при $\varepsilon \to 0$ получаем $\mu^*(\partial\varphi(K)) = 0$. По теореме 12.1 образ $\varphi(K)$ измерим по Жордану.

2 шаг. Докажем равенство (13.11). Для этого сначала дополнительно предположим, что $f(x) \geqslant 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $X \subset K$ — любая фигура и $X = \bigcup_{k=1}^n \overline{I}_k$ — ее дизъюнктное разложение, причем $\operatorname{diam} \overline{I}_k < \delta$. Пусть еще t_k — центр $\overline{I}_k$. По лемме 13.4

$$\mu\big(\varphi(\overline{I}_k)\big) \leqslant (1+\varepsilon)|\mathbf{J}\varphi(t_k)|\,\mu\big(\overline{I}_k\big)\,.$$

Умножим неравенство на $f(x_k) = f(\varphi(t_k))$ и сложим по $k = 1, \ldots, n$

$$\sum_{k=1}^n f(x_k)\mu\big(\varphi(\overline{I}_k)\big) \leqslant (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^n f(\varphi(t_k))|\mathbf{J}\varphi(t_k)|\,\mu\big(\overline{I}_k\big)\,.$$

Устремляя к нулю ранг разбиения, получим

$$\int_{\varphi(X)} f\,dx \leqslant (1+\varepsilon)\int_X (f\circ\varphi)\cdot|\mathbf{J}\varphi|\;dt$$

Так как $\varepsilon > 0$ в этом неравенстве любое, то отсюда следует

$$\int_{\varphi(X)} f\,dx \leqslant \int_X (f\circ\varphi)\cdot|\mathbf{J}\varphi|\;dt \leqslant \int_K (f\circ\varphi)\cdot|\mathbf{J}\varphi|\;dt.$$

Теперь возьмем две последовательности фигур $X_n \subset K \subset Y_n \subset G$ так, чтобы $\mu(X_n) \to \mu(K)$, $\mu(Y_n) \to \mu(K)$. Тогда $\overline{Y_n \setminus X_n}$ — фигура и по доказанному

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \int_{\varphi(K)} f\,dx - \int_{\varphi(X_n)} f\,dx = \int_{\varphi(K\setminus X_n)} f\,dx \leqslant\\ &\leqslant \int_{\varphi(\overline{Y_n\setminus X_n})} f\,dx \leqslant \int_{\overline{Y_n\setminus X_n}} (f\circ\varphi)\cdot|\mathbf{J}\varphi|\;dt \leqslant\\ &\leqslant \sup_{x\in\varphi(K)}|f(x)|\sup_{t\in K}|\mathbf{J}\varphi(t)|\,\mu\Big(\overline{Y_n\setminus X_n}\Big) \to 0.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\varphi(K)} f\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\varphi(X_n)} f\,dx.$$

Поэтому, переходя к пределу в неравенстве

$$\int_{\varphi(X_n)} f\,dx \leqslant \int_K (f\circ\varphi)\cdot|\mathbf{J}\varphi|\;dt,$$

получим

$$\int_{\varphi(K)} f\,dx \leqslant \int_K (f\circ\varphi)\cdot|\mathbf{J}\varphi|\;dt.$$

Меняя ролями K и $\varphi(K)$ получаем противоположное неравенство.

Наконец, от предположения $f(x) \geqslant 0$ избавляемся с помощью разложения $f = f^+ - f^-$, где $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $\quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. □

3.4. Некоторые замены переменной

Приведем в заключение несколько наиболее распространенных диффеоморфизмов.

1) **Полярные координаты** в $\mathbb{R}^2$ задаются равенствами

$$\mathcal{F}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad r>0,\ \theta\in[0,2\pi).$$

В этом случае $\mathbf{J}\mathcal{F}(r,\theta) = r$.

2) **Цилиндрические координаты** в $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{F}(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z), \quad r>0,\ \varphi\in[0,2\pi),\ \psi\in[0,2\pi).$$

Тогда $\mathbf{J}\mathcal{F}(r,\varphi,\psi) = r$.

3) **Сферические координаты** в $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{F}(r,\varphi,\psi) = (r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\sin\psi, r\cos\varphi), \quad r>0,\ \varphi\in[0,2\pi),\ \psi\in[0,2\pi).$$

Тогда $\mathbf{J}\mathcal{F}(r,\varphi,\psi) = r^2\sin\varphi$.

4) Последний пример обобщает сферические координаты на случай произвольной размерности

$$\mathcal{F}^i\big(r,\varphi^1,\ldots,\varphi^{d-1}\big) = r\left(\prod_{k=1}^{i-1}\sin\varphi^k\right)\cos\varphi^i.$$

Сейчас

$$\mathbf{J}\mathcal{F}^i\big(r,\varphi^1,\ldots,\varphi^{d-1}\big) = r^{d-1}\prod_{i=1}^{d-2}\sin^{d-i-1}\varphi^i.$$

Глава 14
Криволинейные интегралы

§ 1. Функции ограниченной вариации

1.1. Вариация функции

Пусть задана функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Для любого **разбиения**

$$\Pi : a = x_0 < \cdots < x_n = b$$

отрезка $[a,b]$ величина

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f,\Pi) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \tag{14.1}$$

называется **вариацией по разбиению** Π функции f.

Определение 14.1 ***Полной вариацией*** *функции f на отрезке $[a,b]$ называется величина*

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) = \sup_{\Pi} \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f,\Pi). \tag{14.2}$$

Если полная вариация конечна, то будем говорить, что функция f имеет ***ограниченную вариацию*** *на $[a,b]$.*

Класс всех функций ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ обозначаем $BV - BV[a,b]$.

Упражнение 14.1

1. Если $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) = 0$, то f — тождественная постоянная.

2. Если f монотонна на $[a,b]$, то $f \in BV[a,b]$ и $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) = |f(b) - f(a)|$.

3. Пусть$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $\Pi : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ — разбиение отрезка $[a,b]$ и функция монотонна на каждом из отрезков. Тогда $f \in BV[a,b]$ и

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) = \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f,\Pi).$$

4. Для каких $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ функция $f(x) = x^\alpha \sin \frac{\pi}{x^\beta}$ имеет ограниченную вариацию на $[0,1]$.

5. Если $f \in BV[a,b]$, то f ограничена на $[a,b]$. Построить пример функции $f \in C[0,1]$, не имеющей ограниченной вариации на $[0,1]$.

6. Если $f \in C^1$, то $f \in BV[a,b]$ и $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) \leqslant \|f'\|_C$.

7. Напомним (см. 2.4), что классы Гельдера H^α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ определяются следующим образом

$$H^\alpha = H^\alpha[a,b] = \left\{ f : \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} < +\infty \right\}.$$

Доказать, что а) $H^1 \subset BV$, б) существует функция $f \in \bigcap_{0<\alpha<1} H^\alpha$, не имеющая ограниченной вариации.

8. Если $f \in BV[a,b]$, то
$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(\lambda f) = |\lambda| \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f).$$

9. Если $f, g \in BV[a,b]$, то $\alpha f + \beta g \in BV[a,b]$ и
$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(\alpha f + \beta g) \leqslant |\alpha| \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + |\beta| \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(g).$$

10. Множество $BV[a,b]$ с обычными операциями над функциями является полным линейным нормированным пространством относительно нормы
$$\|f\|_{BV} = |f(a)| + \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f).$$

1.2. Аддитивность и непрерывность вариации

Очевидное неравенство

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f, \Pi_1) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f, \Pi_2), \quad \text{если} \quad \Pi_1 \subset \Pi_2,$$

показывает аналогию между нижними суммами Дарбу (см. п. 3.1) и вариациями по разбиениям.

В следующей теореме приводятся менее очевидные свойства полной вариации.

Теорема 14.1 *Пусть функция $f \in BV[a,b]$. Тогда*

1) $f \in BV[c,d]$ для любого отрезка $[c,d] \subset [a,b]$ и для любого $c \in [a,b]$ выполнено равенство
$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathbf{V}}}(f).$$

(аддитивность полной вариации),

2) если f непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то функция $x \mapsto \overset{x}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f)$ также непрерывна в точке x_0.

Доказательство. 1) Возьмем любое разбиение $\Pi : a = x_0 < \dots < x_n = b$ и пусть $c \in [x_{m-1}, x_m]$. Тогда

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f,\Pi) = \sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=m+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \overset{c}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathbf{V}}}(f).$$

Переходя к точной верхней грани по всем разбиениям Π, получаем неравенство

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) \leqslant \overset{c}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathbf{V}}}(f).$$

Обратно, зададим $\varepsilon > 0$ и найдем разбиения

$$\Pi_1 : a = x_0 < \dots < x_m = c, \quad \Pi_2 : c = x_m < \dots < x_n = b$$

так, чтобы

$$\overset{c}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f,\Pi_1) > \overset{c}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) - \varepsilon, \quad \overset{b}{\underset{c}{\mathbf{V}}}(f,\Pi_2) > \overset{b}{\underset{c}{\mathbf{V}}}(f) - \varepsilon.$$

Тогда для разбиения $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) \geqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f,\Pi) = \overset{c}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f,\Pi_1) + \overset{b}{\underset{c}{\mathbf{V}}}(f,\Pi_2) > \overset{c}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathbf{V}}}(f) - 2\varepsilon$$

и при $\varepsilon \to 0$ получаем неравенство

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) \geqslant \overset{c}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathbf{V}}}(f).$$

2) Докажем, например, непрерывность $\overset{x}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f)$ справа в точке x_0. Для этого зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|f(x_0) - f(x_0 + h)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < h < \delta.$$

Далее найдем разбиение

$$\Pi : x_0 < x_0 + h = x_1 < \dots < x_n = b$$

так, чтобы $0 < h < \delta$ и $\overset{b}{\underset{x_0}{\mathbf{V}}}(f,\Pi) > \overset{b}{\underset{x_0}{\mathbf{V}}}(f) - \varepsilon$. Тогда

$$\overset{b}{\underset{x_0}{\mathbf{V}}}(f) < \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < 2\varepsilon + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant 2\varepsilon + \overset{b}{\underset{x_0+h}{\mathbf{V}}}(f)$$

Отсюда в силу аддитивности вариации

$$0 \leqslant \overset{x_0+h}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) - \overset{x_0}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) = \overset{x_0}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + \overset{x_0+h}{\underset{x_0}{\mathbf{V}}}(f) - \overset{x_0}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) = \overset{b}{\underset{x_0}{\mathbf{V}}}(f) - \overset{b}{\underset{x_0+h}{\mathbf{V}}}(f) < 2\varepsilon$$

при $0 < h < \delta$.

Непрерывность слева доказывается точно так же. $\square$

1.3. Критерий Жордана

Следующая замечательная теорема дает несколько неожиданное описание класса функций ограниченной вариации.

Теорема 14.2 (Жордан) *Следующие условия равносильны*
i) $f \in BV[a,b]$,
ii) f *представима в виде*
$$f = g - h, \tag{14.3}$$
где g и h — возрастающие функции.
Если f непрерывна, то g и h в (14.3) также можно взять непрерывными.

Доказательство. В силу свойства аддитивности вариации (теорема 14.1), функция
$$g(x) = \mathop{\mathbf{V}}\limits_a^x(f), \quad x \in [a,b]$$
возрастает, так как
$$g(x_2) = \mathop{\mathbf{V}}\limits_a^{x_2}(f) = \mathop{\mathbf{V}}\limits_a^{x_1}(f) + \mathop{\mathbf{V}}\limits_{x_1}^{x_2}(f) \geqslant \mathop{\mathbf{V}}\limits_a^{x_1}(f) = g(x_1)$$
при $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ (и непрерывна, если f непрерывна).

Положим $h = g - f$, тогда, снова используя аддитивность полной вариации, получаем при $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$
$$h(x_2) - h(x_1) = \mathop{\mathbf{V}}\limits_{x_1}^{x_2}(f) - [f(x_2) - f(x_1)] \geqslant \mathop{\mathbf{V}}\limits_{x_1}^{x_2}(f) - |f(x_2) - f(x_1)| \geqslant 0.$$
Следовательно, функция h также возрастает и непрерывна, если непрерывна f. □

§ 2. Интеграл Стилтьеса

В этом параграфе мы изложим другое обобщение одномерного интеграла Римана, которое является полезным для многих разделов математики.

2.1. Определение интеграла Стилтьеса

В отличие от определения интеграла Римана будем отправляться от пары функций.

Пусть $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Зададим произвольно разбиение $\Pi : a = x_0 < \cdots < x_n = b$, отмеченные точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и составим интегральные суммы
$$s = s(\Pi, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]\,.$$

Определение 14.2 *Число $I \in \mathbb{R}$ называется **пределом интегральных сумм**, если*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall\,(\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \Longrightarrow |s(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Краткая запись этого $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} s(\Pi, \xi)$.

*Если такой предел существует, то он называется **интегралом Стилтьеса** функции f по функции g на $[a, b]$ и обозначается*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f\,dg.$$

В частном случае $g(x) = x$ мы, конечно, получаем интеграл Римана, изученный нами ранее в главе 5.

2.2. Свойства интеграла

Мы остановимся на некоторых свойствах интеграла Римана-Стилтьеса, необходимых для дальнейшего.

Теорема 14.3
1) Свойства линейности

$$\alpha \int_a^b f_1\,dg + \beta \int_a^b f_2\,dg = \int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2) dg$$

$$\alpha \int_a^b f\,dg_1 + \beta \int_a^b f\,dg_2 = \int_a^b f\,d(\alpha g_1 + \beta g_2)$$

(в каждом случае из существования интегралов слева вытекает существование интегралов справа),

2) свойство аддитивности

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg$$

(при условии существования всех трех интегралов, входящих в это равенство),

3) формула интегрирования по частям

$$\int_a^b f\,dg = fg\Big|_a^b - \int_a^b g\,df$$

(из существования одного из интегралов вытекает существование другого).

Доказательство. 1) Достаточно записать интегральные суммы (как это было при доказательстве теоремы 5.6) и совершить предельный переход при $\lambda_\Pi \to 0$.

2) Здесь также достаточно записать интегральные суммы, включив точку c в разбиение, и совершить предельный переход при $\lambda_\Pi \to 0$.

3) Возьмем произвольное разбиение $\Pi : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ и отмеченные точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} f(\xi_{k-1})g(x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(x_{k-1}) =$$

$$= f(\xi_n)g(b) - f(\xi_1)g(a) - \sum_{k=2}^{n} g(x_{k-1})[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})]\,.$$

Добавим и отнимем к последнему выражению $f(b)g(b) - f(a)g(a)$ и преобразуем его

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = fg\Big|_a^b - \sum_{k=1}^{n+1} g(x_{k-1})[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})]\,.$$

где $\xi_0 = a$, $\xi_{n+1} = b$. Совершая здесь предельный переход, получим требуемое равенство. □

По поводу утверждения 2) теоремы 14.3 сделаем следующее замечание. Из существования интегралов в правой части равенства не следует, вообще говоря существование интеграла в левой части. Это показывает следующий пример

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что оба интеграла

$$\int_{-1}^{0} f\,dg, \quad \int_{0}^{1} f\,dg$$

существуют. В то же время интеграл

$$\int_{-1}^{1} f\,dg$$

не существует, так как интегральные суммы

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

будут равны 0 или 1 в зависимости от того $\xi_i \leqslant 0$ или $\xi_i > 0$ (i — номер частичного интервала, содержащего точку 0).

Полезно отметить также, что причиной несуществования интеграла Стилтьеса в этом примере является то, что функции f и g имеют общую точку разрыва.

2.3. Условия существования интеграла

Условия интегрируемости из § 3 почти дословно переносятся на случай интеграла Стилтьеса, но при одном дополнительном ограничении — функция g является возрастающей.

Предположим, что функция f ограничена, а g возрастает на $[a, b]$ и, следуя § 3, введем суммы Дарбу

$$s_*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} m_k[g(x_k) - g(x_{k-1})], \quad s^*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} M_k[g(x_k) - g(x_{k-1})],$$

где

$$m_k = \inf f([x_{k-1}, x_k]), \quad M_k = \sup f([x_{k-1}, x_k]).$$

Легко видеть (см. доказательство леммы 5.1), что суммы Дарбу обладают свойствами

1) $s_*(\Pi) \leqslant s(\Pi, \xi) \leqslant s^*(\Pi)$ для любого разбиения с отмеченными точками (Π, ξ),

2) если $\Pi \subset \Pi'$, то $s_*(\Pi) \leqslant s_*(\Pi')$, $s^*(\Pi') \leqslant s^*(\Pi)$,

3) $s_*(\Pi) \leqslant s^*(\Pi')$ для любых разбиений Π и Π'.

После этого можно ввести интегралы Дарбу

$$I_* = \sup_{\Pi} s_*(\Pi), \quad I^* = \inf_{\Pi} s^*(\Pi)$$

и из свойств 1)–3) вывести неравенства

$$s_*(\Pi) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant s^*(\Pi').$$

Отсюда, повторяя доказательство теоремы 5.4 (см. также замечание 5.3), нетрудно вывести, что условие

$$\lim_{\lambda \to 0}[s^*(\Pi) - s_*(\Pi)] = 0$$

необходимо и достаточно для существования интеграла Стилтьеса при указанных условиях на функции f и g. Мы используем этот критерий в доказательстве следующей важной теоремы.

Теорема 14.4 *Если $f \in C[a, b]$, $g \in BV[a, b]$, то интеграл $\int_a^b f\, dg$ существует и*

$$\left|\int_a^b f\, dg\right| \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \mathop{\mathrm{V}}_a^b(g) = \|f\|_C \cdot \mathop{\mathrm{V}}_a^b(g).$$

Доказательство. В силу теоремы Жордана (теорема 14.2) существование достаточно доказать для случая возрастающей g. Для такого случая можно использовать критерий интегрируемости, приведенный перед формулировкой этой теоремы.

В силу следствия из теоремы Кантора (см. теорему 3.10)

$$s^*(\Pi) - s_*(\Pi) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)|g(x_k) - g(x_{k-1})| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \omega_k |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leqslant \mathop{\mathbf{V}}_a^b(g) \max_{1\leqslant k\leqslant n} \omega_k < \varepsilon$$

если λ_Π достаточно мало.

Оценка интеграла получается предельным переходом в неравенстве

$$|s(\Pi,\xi)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)| \cdot |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \cdot \mathop{\mathbf{V}}_a^b(g). \ \square$$

2.4. Вычисление интеграла Римана-Стилтьеса

Теорема 14.5 *Если $f \in C[a,b]$, функция g представима в виде*

$$g(x) = \int_a^x h(t)\,dt,$$

где $h \in R[a,b]$, то интеграл $\int_a^b f\,dg$ существует и

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b fh\,dt.$$

Доказательство. Возьмем произвольно разбиение $\Pi : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ и отмеченные точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)h(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(\xi_k) - f(x)]\,h(x)\,dx.$$

Первое слагаемое справа — это интеграл $\int_a^b fh\,dx$, второе стремится к 0 при $\lambda_\Pi \to 0$, так как

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(\xi_k) - f(x)]\,h(x)\,d\mu(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\lambda_\Pi, f) \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |h|\;d\mu = \omega(\lambda_\Pi, f) \int_a^b |h|\;d\mu \to 0. \ \square$$

Следствие 14.1 *Если $f \in C[a,b]$, $g \in C^1[a,b]$, то интеграл $\int_a^b f\,dg$ существует и*

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Доказательство сводится к применению теоремы 14.5, так как при наших условиях по формуле Ньютона–Лейбница (теорема 5.14)

$$g(x) = \int_a^x g'(t)\,dt + g(a)$$

(наличие слагаемого $g(a)$ никак не отразится на величине интеграла Стилтьеса).

§ 3. Пути, длины и интегралы вдоль путей

3.1. Длина пути

Напомним некоторые определения (см. определение 6.30 для случая общих топологических пространств).

Путем в $\mathbb{R}^d$ называется любое непрерывное отображение $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^d$ отрезка $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^d$.

Образ $\Gamma = \gamma([\alpha,\beta])$ — **след пути**, $a = \gamma(\alpha)$ и $b = \gamma(\beta)$ — соответственно **начало** и **конец** пути γ. В этом случае также говорят, что путь γ соединяет точки a и b.

След пути $\gamma([\alpha,\beta])$ является компактным (по теореме 6.10). Кроме того, $\gamma([\alpha,\beta])$ является линейно связным множеством (см. определение 6.31), так как любые точки $\gamma(t_0)$ и $\gamma(t_1)$ из следа пути соединяет сужение $\gamma|_{[t_0,t_1]^*}$ пути γ на отрезок $[t_0,t_1]^*$.

Если $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^d$ — путь, то для любого разбиения $\Pi : \alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta$ его области определения положим

$$l_\gamma(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|\,. \tag{14.4}$$

Геометрический смысл $l_\gamma(\Pi)$ — длина ломаной, вписанной в след пути в точках $\gamma(t_k)$ $(k = 0,\ldots,n)$.

Определение 14.3 *Путь $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^d$ называется **спрямляемым**, если множество $\{l_\gamma(\Pi)\}$ ограничено. В этом случае **длиной пути** называется*

$$l_\gamma = \sup_\Pi l_\gamma(\Pi). \tag{14.5}$$

С помощью понятия функции ограниченной вариации можно дать описание спрямляемых путей.

Теорема 14.6 (Жордан) *Для любого пути* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ *следующие условия равносильны*

i) γ *спрямляем,*

ii) $\gamma^i \in BV[\alpha, \beta]$ $(i = 1, \ldots, d)$.

Доказательство. $i) \Longrightarrow ii)$. Для любого разбиения $\Pi : \alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ и любого $k = 1, \ldots, d$ справедливы неравенства

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathbf{V}}}(\gamma^k, \Pi) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma^k(t_i) - \gamma^k(t_{i-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{d} |\gamma^k(t_i) - \gamma^k(t_{i-1})|^2 \right)^{1/2} = l_\gamma(\Pi) \leqslant l_\gamma$$

и $\gamma^k \in BV[\alpha, \beta]$.

$ii) \Longrightarrow i)$. Воспользуемся очевидным неравенством $\sum_{k=1}^{d} a_k^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{d} a_k\right)^2$

$$l_\gamma(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{d} |\gamma^k(t_i) - \gamma^k(t_{i-1})|^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{d} |\gamma^k(t_i) - \gamma^k(t_{i-1})| = \sum_{k=1}^{d} \sum_{i=1}^{n} |\gamma^k(t_i) - \gamma^k(t_{i-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{d} \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathbf{V}}}(\gamma^k). \quad \square$$

В дальнейшем будем часто пользоваться обозначением $l_\gamma[a, b]$ для длины сужения $\gamma|_{[a,b]}$ пути γ на отрезок $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$.

Упражнение 14.2

1) $l_\gamma = \lim\limits_{\lambda \to 0} l_\gamma(\Pi)$.

2) Если путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ спрямляем, то для любого $t \in [\alpha, \beta]$

$$l_\gamma[\alpha, \beta] = l_\gamma[\alpha, t] + l_\gamma[t, \beta].$$

3) Если путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ спрямляем, то функция $t \mapsto l_\gamma[\alpha, t]$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$.

Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ называется **гладким**, если $\gamma \in C^1[\alpha, \beta]$, и **кусочно гладким**, если существует такое разбиение $\Pi : \alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$, что для любого $k = 1, \ldots, n$ сужение $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ является гладким путем.

Теорема 14.7 *Кусочно гладкий путь* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ *является спрямляемым и его длина вычисляется по формуле*

$$l_\gamma = \int_\alpha^\beta \left(\sum_{i=1}^{d} \left[\left(\gamma^i\right)'(t) \right]^2 \right)^{1/2} dt. \tag{14.6}$$

Доказательство. Достаточно доказать наше утверждение для гладкого пути. Отсюда и из свойства аддитивности интеграла оно будет следовать и для кусочно гладких путей.

Используя формулу Лагранжа, запишем

$$l_\gamma(\Pi) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{d}|\gamma^k(t_i)-\gamma^k(t_{i-1})|^2\right)^{1/2} = \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\left(\sum_{k=1}^{d}|(\gamma^k(\tau_{ik}))'|^2\right)^{1/2},$$

где $\tau_{ik}\in(t_{i-1},t_i)$ — некоторые точки. Так как формула Лагранжа применяется отдельно к каждой функции γ^k, то точки τ_{ik} зависят и от k. Поэтому выражение справа, хоть и похоже на интегральную сумму, все же таковой не является, поэтому мы перепишем его в виде

$$l_\gamma(\Pi) = \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\left(\sum_{k=1}^{d}|(\gamma^k(t_i))'|^2\right)^{1/2} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\left[\left(\sum_{k=1}^{d}|(\gamma^k(\tau_{ik}))'|^2\right)^{1/2} - \left(\sum_{k=1}^{d}|(\gamma^k(t_i))'|^2\right)^{1/2}\right].$$

Первое слагаемое справа является интегральной суммой для интеграла из (14.6), поэтому оно сходится к нему при $\lambda_\Pi\to 0$. Следовательно, нам осталось показать, что второе слагаемое справа сходится к нулю. Для этого мы воспользуемся неравенством $||x|-|y||\leqslant|x-y|$ для векторов $x,y\in\mathbb{R}^d$, которое вытекает из неравенства треугольника (см. 6) в лемме 6.1). Мы применим это неравенство к векторам

$$x=((\gamma^1(t_i))',\ldots,(\gamma^d(t_i))'),\quad y=((\gamma^1(\tau_{i1}))',\ldots,(\gamma^d(\tau_{id}))'),$$

получая при этом неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\left[\left(\sum_{k=1}^{d}|(\gamma^k(\tau_{ik}))'|^2\right)^{1/2} - \left(\sum_{k=1}^{d}|(\gamma^k(t_i))'|^2\right)^{1/2}\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\left(\sum_{k=1}^{d}|(\gamma^k(\tau_{ik}))'-\gamma^k(t_i))'|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\left(\sum_{k=1}^{d}\omega(\lambda_\Pi,(\gamma^k)')^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{d}\omega(\lambda_\Pi,(\gamma^k)')^2\right)^{1/2}\cdot(\beta-\alpha)\to 0$$

при $\lambda_\Pi\to 0$. $\square$

3.2. Интегралы вдоль путей

Определение 14.4 *Пусть* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ *— спрямляемый путь и на следе пути* $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ *задана функция* $f \in C(\Gamma)$.

Интегралом первого рода вдоль пути γ *от функции* f *называется интеграл Стилтьеса*

$$\oint_\gamma f\,dl = \int_\alpha^\beta (f \circ \gamma)\,dl, \tag{14.7}$$

где $l(t) = l_\gamma[\alpha, t]$.

В силу теоремы 14.4 интеграл справа в (14.7) существует и определение 14.4 является корректным.

Отметим, что это новое понятие интеграла обобщает понятие интеграла Римана по отрезку, введенное в главе 5. В самом деле, рассмотрим отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ и путь $\gamma(t) = t$, $t \in [\alpha, \beta]$, следом которого этот отрезок является. Тогда, очевидно, выполнено равенство

$$\oint_\gamma f\,dl = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt.$$

Определение 14.5 *Пусть* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ *— спрямляемый путь и на следе пути* $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ *задана функция* $f \in C(\Gamma, \mathbb{R}^d)$. ***Интегралом второго рода вдоль пути*** γ *от функции* f *называется*

$$\oint_\gamma f\,dx = \oint_\gamma \sum_{k=1}^d f^k\,dx^k = \sum_{k=1}^d \int_\alpha^\beta (f^k \circ \gamma)\,d\gamma^k. \tag{14.8}$$

В силу теоремы 14.4 интегралы справа в (14.8) существуют и определение 14.5 является корректным.

Упражнение 14.3
1) Если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ — кусочно гладкий путь и $f \in C(\Gamma)$, то

$$\oint_\gamma f\,dl = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \left(\sum_{k=1}^d \left[\left(\gamma^k\right)'(t) \right]^2 \right)^{1/2} dt.$$

2) Если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ — кусочно гладкий путь и $f \in C(\Gamma, \mathbb{R}^d)$, то

$$\oint_\gamma f\,dx = \sum_{k=1}^d \int_\alpha^\beta f^k(\gamma(t))\,(\gamma^k)'(t)\,dt.$$

§ 4. Кривые и криволинейные интегралы

4.1. Жордановы кривые и их параметризации

Определение 14.6 *Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ называется* ***жордановой кривой****, если существует взаимно однозначный путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$, для которого*

$$\Gamma = \gamma([\alpha, \beta]) .$$

Путь γ называется в этом случае ***параметризацией кривой****. Точки $a = \gamma(\alpha)$ и $b = \gamma(\beta)$ называются концами Γ.*

Другими словами, жорданова кривая в $\mathbb{R}^d$ — это след взаимно однозначного пути в $\mathbb{R}^d$. Подчеркнем, что концы жордановой кривой равноправны.

Параметризация жордановой кривой не определяется однозначно. Действительно, легко видеть, что если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ — параметризация кривой Γ, то для любой строго монотонной непрерывной функции $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \leftrightarrow [\alpha, \beta]$ композиция $\gamma \circ \varphi$ также является параметризацией Γ. Класс всех параметризаций кривой Γ обозначается $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ — параметризация жордановой кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, то любую непрерывную строго монотонную функцию $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha, \beta]$ будем называть **заменой параметра.** Таким образом, предыдущее утверждение можно переформулировать так: если γ параметризация жордановой кривой и φ — замена параметра, то $\gamma \circ \varphi$ также является параметризацией для Γ. Справедливо и обратное.

Теорема 14.8 *Для любых двух параметризаций $\gamma_k : [\alpha_k, \beta_k] \to \mathbb{R}^d$ $(k = 1, 2)$ жордановой кривой Γ существует замена параметра φ, для которой $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.*

Доказательство. Сначала покажем, что если $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$, то $\gamma^{-1} \in C(\Gamma)$.

В самом деле, пусть $x_n \in \Gamma$, $x_n \to x_0 \in \Gamma$, но $|\gamma^{-1}(x_n) - \gamma^{-1}(x_0)| \geqslant \delta > 0$. По свойству Больцано–Вейерштрасса (см. лемму 2.3) из ограниченной последовательности $t_n = \gamma^{-1}(x_n)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $t_{n_j} \to t_0$. Тогда $x_{n_j} \to \gamma(t_0) = x_0$ в силу непрерывности γ. В то же время $\left|t_{n_j} - t_0\right| > \delta > 0$. Противоречие.

Докажем теперь утверждение теоремы. Функция $\varphi = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$ непрерывна и взаимно однозначна, как композиция непрерывных и взаимно однозначных отображений. По теореме 3.11 она строго монотонна и является заменой параметра. □

4.2. Длина и натуральная параметризация

Определение 14.7 ***Длиной*** *l_Γ жордановой кривой Γ называется длина любой ее параметризации.*

Нетрудно убедиться, что длина не зависит от выбора параметризации. В самом деле, пусть заданы две параметризации $\gamma_i : [\alpha_i, \beta_i] \to \Gamma$ $(i = 1, 2)$. Рассмотрим замену параметра $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha_2, \beta_2]$, связывающую эти параметризации (см. теорему 14.8) $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Пусть $\Pi_1 = \{t_i^1\}_{i=0}^n$ — произвольное разбиение отрезка $[\alpha_1, \beta_1]$. Оно порождает разбиение $\Pi_2 = \{t_i^2\}_{i=0}^n$ отрезка $[\alpha_2, \beta_2]$, где $t_i^2 = \varphi(t_i^1)$ $(i = 0, \ldots, n)$. Следовательно, справедливо равенство

$$l_{\gamma_1}(\Pi_1) = \sum_{i=1}^n |\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1})| = l_{\gamma_2}(\Pi_2),$$

которое показывает (см. определение 14.3), что $l_{\gamma_1} = l_{\gamma_2}$.

Лемма 14.1 *Если Γ — спрямляемая жорданова кривая, то существует такая параметризация $\gamma_0 \in \mathcal{P}(\Gamma)$, $\gamma_0 : [0, l_\Gamma] \to \Gamma$, что*

$$l_{\gamma_0}[0, s] = s$$

для всех $s \in [0, l_\Gamma]$.

Доказательство. Возьмем какую-нибудь параметризацию $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$. Тогда переменная длина $l(t) = l_\gamma[\alpha, t]$ непрерывна и строго возрастает на $[\alpha, \beta]$, следовательно, по теореме 3.11 у нее есть непрерывная обратная $l^{-1} : [0, l_\Gamma] \to [\alpha, \beta]$. Тогда функция

$$\gamma_0 = \gamma \circ l^{-1} : [0, l_\Gamma] \to \Gamma$$

является искомой. □

Параметризация γ_0, существование которой устанавливает лемма 14.1, называется **натуральной** параметризацией Γ.

4.3. Интегралы вдоль жордановой кривой

Определение 14.8 *Если Γ — спрямляемая жорданова кривая и $f \in C(\Gamma)$, то криволинейным* ***интегралом первого рода*** *от f вдоль Γ называется*

$$\oint_\Gamma f\, dl = \oint_\gamma f\, dl,$$

где $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$.

Это определение не зависит от выбора параметризации $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$. Действительно, пусть заданы две параметризации $\gamma_i : [\alpha_i, \beta_i] \to \Gamma$ и $l_i(t) = l_{\gamma_i}[\alpha_i, t]$ $(i = 1, 2)$. Рассмотрим замену параметра $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha_2, \beta_2]$, связывающую эти параметризации (см. теорему 14.8) $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Пусть $\Pi_1 = \{t_i^1\}_{i=0}^n$ — произвольное разбиение отрезка $[\alpha_1, \beta_1]$ с отмеченными точками $\tau_i^1 \in [t_{i-1}^1, t_i^1]$. Оно порождает разбиение $\Pi_2 = \{t_i^2\}_{i=0}^n$ отрезка $[\alpha_2, \beta_2]$ с отмеченными точками $\tau_i^2 \in [t_{i-1}^2, t_i^2]$, где $t_i^2 = \varphi(t_i^1)$ и $\tau_i^2 = \varphi(\tau_i^1)$. Следовательно, справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} f(\gamma_1(\tau_i^1))[l_1(t_i) - l_1(t_{i-1})] \quad \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_2(\tau_i^2))[l_2(t_i) - l_2(t_{i-1})],$$

предельный переход в котором приводит к равенству

$$\oint_{\gamma_1} f\,dl = \oint_{\gamma_2} f\,dl.$$

Отметим, что проще всего вычислять криволинейный интеграл первого рода, используя натуральную параметризацию

$$\oint_{\Gamma} f\,dl = \int_0^{l_\Gamma} f(\gamma_0(t))\,dt.$$

Для того, чтобы ввести интеграл второго рода по жордановой кривой, нам понадобится понятие ориентации кривой.

Определение 14.9 *Задать* ***ориентацию*** *жордановой кривой — это значит задать порядок во множестве ее концов (то есть указать, какой из ее концов является первым (или началом), а какой — вторым (или концом)). Жорданова кривая с заданной ориентацией называется* ***ориентированной****.*

Задание ориентации жордановой кривой Γ разбивает все ее параметризации на два класса. Для любой параметризации $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ справедливо одно из двух: либо начало параметризации $\gamma(\alpha)$ совпадает с началом кривой Γ (тогда и конец параметризации $\gamma(\beta)$ совпадает с концом кривой Γ), либо, наоборот, начало параметризации совпадает к концом кривой (и тогда конец параметризации совпадает с началом кривой). В первом из этих случаев мы будем говорить, что параметризация сохраняет ориентацию кривой, а во втором — меняет.

Упражнение 14.4 Любые параметризации одного класса связаны строго возрастающей заменой параметра, а параметризации из разных классов — строго убывающей (см. теорему 14.8).

Определение 14.10 *Если $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — спрямляемая ориентированная жорданова кривая и $f \in C(\Gamma, \mathbb{R}^d)$, то криволинейным* ***интегралом второго рода*** *от функции f вдоль Γ называется*

$$\oint_{\Gamma} f\,dx = \oint_{\gamma} f\,dx,$$

где $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ — любая параметризация, сохраняющая ориентацию.

Как и выше легко установить, что это определение не зависит от выбора параметризации γ, сохраняющей ориентацию.

4.4. Контур: ориентация и интеграл по контуру

Определение 14.11 ***Контуром*** *(замкнутой жордановой кривой) в* $\mathbb{R}^d$ *называется след* $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ *пути* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$, *удовлетворяющего условиям*

1) $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$;

2) сужение $\gamma|_{[\alpha,\beta)}$ *— биекция.*

Путь γ *называется* ***параметризацией*** *контура* Γ.

Упражнение 14.5 Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ является контуром тогда и только тогда, когда Γ гомеоморфно окружности

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^d : (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = \cdots = x^d = 0\right\}.$$

Длина контура и криволинейный интеграл первого рода вдоль контура определяются точно так же, как и для жордановой кривой (см. определения 14.7 и 14.8). Для определения интеграла второго рода вдоль контура надо определить его ориентацию.

Определение 14.12 *Задать* ***ориентацию*** *контура — это значит задать "порядок прохождения" трех его точек*

$$x \to y \to z \to x \quad \text{или} \quad x \to z \to y \to x.$$

(неважно, с какой именно из трех точек начинается обход, важен порядок). Контур с заданной ориентацией называется ***ориентированным***.

Все параметризации контура тогда разбиваются на два класса: сохраняющие ориентацию и меняющие ориентацию. Любые параметризации из одного класса связаны строго возрастающей заменой параметра. Параметризации из разных классов, напротив, связаны строго убывающей заменой параметра.

Задание ориентации не зависит от выбора точек x, y, z в том смысле, что если параметризация "проходит" какие-то три точки x_1, y_1, z_1 в определенном порядке, то любая параметризация того же класса проходит их в том же порядке.

Криволинейный интеграл второго рода вдоль ориентированного спрямляемого контура определяется точно так же, как и выше для случая жордановой кривой в определении 14.10.

Отметим, что если изменить ориентацию контура, то от этого абсолютная величина криволинейного интеграла вдоль контура не изменится, а изменится лишь его знак.

§ 5. Первообразная функции многих переменных

5.1. Области

Жорданова кривая называется **гладкой**, если она является следом гладкого пути. Жорданова кривая называется **кусочно-гладкой**, если она является объединением конечного числа гладких жордановых кривых с последовательно соединенными началами и концами. **Ломаной** называется жорданова кривая, являющаяся объединением конечного числа отрезков с последовательно соединенными началами и концами. Ясно, что ломаная является кусочно-гладкой жордановой кривой.

Непустое открытое связное множество в $\mathbb{R}^d$ называется **областью**. Как мы уже знаем (см. упражнение 6.5.1)), линейно связное множество (определение 6.31) является связным. Для открытых множеств в $\mathbb{R}^d$ справедливо и обратное.

Лемма 14.2 *Область является линейно связным множеством. Более того, любые две точки области можно соединить ломаной, лежащей в области.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in D$ — фиксированная точка. Обозначим D_1 множество точек из D, которые можно соединить с x_0 ломаной, содержащейся в D. Тогда D_1 содержит некоторый шар $B(x_0, r)$. Это же верно и для любой другой точки из D_1. Таким образом, D_1 открыто.

Множество $D_2 = D \setminus D_1$ также открыто, так как если $x \in D_2$ и шар $B(x, r)$ содержится в D, то ни одна точка $B(x, r)$ не входит в D_1.

Итак, множества D_1, D_2 открыты, $D = D_1 \cup D_2$ и $D_1 \neq \varnothing$. Так как D связно, то $D_2 = \varnothing$ и $D = D_1$. □

5.2. Определение первообразной и ее свойства

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество.

Определение 14.13 *Скалярная функция $F : D \to \mathbb{R}$ называется* ***первообразной*** *для векторной функции $f : D \to \mathbb{R}^d$ в области D, если для всех $i = 1, \dots, d$*

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(x) = f^i(x), \quad x \in D. \tag{14.9}$$

Конечно, (14.9) можно переписать в терминах градиента (см. 7.9)

$$f(x) = \nabla F(x).$$

Ниже мы будем искать условия, при которых такая F существует, а также укажем способ ее определения. Начнем с описания простейших свойств первообразных.

Лемма 14.3 *Если F_1 и F_2 — две первообразные для функции $f : D \to \mathbb{R}^d$ в области $D \subset \mathbb{R}^d$, то существует такое число $C \in \mathbb{R}$, что $F_1(x) - F_2(x) = C$ для всех $x \in D$.*

Доказательство. Рассмотрим разность $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Тогда $\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}(x) = 0$ для всех $x \in D$ и функция Φ дифференцируема в области D (по лемме 7.4), причем $\Phi'(x) = 0$ ($x \in D$).

Зафиксируем точку $x_0 \in D$ и пусть x — произвольная точка из D. Соединим эти точки ломаной $\Gamma \subset D$ с узлами в точках $x_k \in D$ ($k = 0, \dots, n$), причем $x_n = x$. На каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ применим формулу Лагранжа (теорема 7.1), получая

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \sum_{k=1}^{n} [\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} \Phi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = 0$$

(где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ — некоторые точки). $\square$

5.3. Независимость криволинейного интеграла от пути

Пусть задана функция $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$.

Определение 14.14 *Будем говорить, что $\oint_\Gamma f\,dx$ не зависит от пути в области D, если для любых точек $x_0, x_1 \in D$ и любой кусочно-гладкой жордановой кривой $\Gamma \subset D$ с началом в x_0 и концом в x_1 $\oint_\Gamma f\,dx$ имеет одно и то же значение.*

Следующая теорема проясняет важность понятия криволинейного интеграла второго рода, так как с его помощью можно находить первообразную векторной функции многих переменных.

Теорема 14.9 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ — область и $f \in C\big(D, \mathbb{R}^d\big)$. Следующие условия равносильны:*

i) f имеет первообразную в D;

ii) $\oint_\Gamma f\,dx$ не зависит от пути в D.

Если эти условия выполнены, то

$$F(x) = F(x_0) + \oint_\Gamma f\,dx$$

для любых $x, x_0 \in D$ и для любой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset D$ с началом в x_0 и концом в x.

Доказательство. $ii) \Rightarrow i)$ Положим

$$F(x) = \oint_\Gamma f\,dx,$$

где $\Gamma \subset D$ — любая кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки x_0 и x (в силу условия ii) это определение корректно).

Пусть $1 \leqslant i \leqslant d$ и Γ — ломаная в D, соединяющая точки x_0 и x, не имеющая других общих точек с отрезком

$$[x, x + te_i] = \{x + se_i : s \in [0, t]\},$$

соединяющим x и $x + te_i$, кроме точки x (нетрудно видеть, что такая ломаная существует). Дополним Γ этим отрезком, получая значение функции F в точке $x + te_i$

$$F(x + te_i) = \oint_{\Gamma \cup [x, x + te_i]} f\, dx$$

Тогда

$$\frac{F(x + te_i) - F(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t f^i(x + se_i)\, ds \to f^i(x).$$

при $t \to 0$. Следовательно, существует и предел левой части, а он равен $\frac{\partial F}{\partial x^i}(x)$. Таким образом, мы доказали существование $\frac{\partial F}{\partial x^i}(x)$ и равенство $\frac{\partial F}{\partial x^i}(x) = f^i(x)$.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Обратно, для кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset D$ в силу теоремы 8.1 о производной композиции (см. также (8.8)) справедливы равенства

$$\oint_\Gamma f\, dx = \int_\alpha^\beta \sum_{i=1}^d (f^i \circ \gamma)(t) \cdot (\gamma^i)'(t)\, dt =$$

$$\int_\alpha^\beta (F \circ \gamma)'(t)\, dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = F(x) - F(x_0). \ \Box$$

Использовать утверждение этой теоремы для проверки того, является ли заданная векторная функция градиентом некоторой скалярной функции, неудобно. К этому вопросу мы сейчас вернемся и укажем более простое средство для проверки этого.

Основное назначение теоремы 14.9 в том, что она дает способ нахождения первообразной с помощью криволинейных интегралов второго рода. Кроме того, если известно, что функция f имеет первообразную и мы сумели ее вычислить, то мы получаем способ вычисления криволинейных интегралов с помощью первообразной (это показывает последнее равенство в доказательстве теоремы 14.9).

Удобнее всего пользоваться этим способом вычисления первообразной в случае, когда D — интервал. В таком случае можно выбрать в качестве кривой интегрирования ломаную, у которой образующие отрезки параллельны координатным осям.

Например, в случае функций двух переменных первообразная может быть найдена по формуле

$$F(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, t)\, dt + \int_{x_0}^x \frac{\partial F}{\partial y}(t, y)\, dt + F(x_0, y_0), \tag{14.10}$$

которую можно использовать в случае, когда $F : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ и $a < x_0, x < b$ и $c < y_0, y < d$.

5.4. Условие существования первообразной

Здесь мы найдем условия существования первообразной в области D для функции $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$. Эти условия выражаются в терминах самой этой функции и потому являются удобными для проверки. Начнем со следующего простого замечания.

Если F — первообразная для $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$ в D, то

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x) \quad (x \in D). \tag{14.11}$$

при всех $i, j = 1, \ldots, d$.

Действительно, если $F \in C^2(D)$ — первообразная для f, то в силу теоремы Шварца (теорема 7.2)

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i}.$$

Наша основная цель сейчас — доказать, что справедливо и обратное, то есть условие (14.11) является также и достаточным для существования первообразной. Однако, это можно сделать лишь налагая дополнительные условия на область D.

Теорема 14.10 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ — выпуклая область и $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$. Тогда следующие условия равносильны*

1) функция f имеет первообразную,

2) выполнено условие (14.11).

Доказательство. То, что из 1) следует 2) было доказано только что, при этом условие выпуклости D не использовалось.

Докажем, что из 2) следует 1). Для нахождения первообразной мы будем использовать идею доказательства леммы 7.4, состоящую в том, чтобы "пройти" от одной точки к другой по отрезкам, параллельным координатным осям.

Сначала покажем, каким образом можно найти первообразную для любого открытого куба $Q \subset D$. Пусть a — центр Q, $x \in Q$ — произвольная точка, тогда сегмент

$$I_{a,x} = \{y \in \mathbb{R}^d : a^k \leqslant y^k \leqslant x^k \ (k = 1, \ldots, d)\}$$

содержится в Q. Введем обозначения

$$g_k(t) = a + \sum_{j=1}^{k-1} (x^j - a^j) e_j + (t - a^k) e_k, \quad k = 1, \ldots, d$$

(e_j — j-й вектор стандартного базиса в $\mathbb{R}^d$, см. определение 6.23) и отметим, что справедливы равенства

$$g_k(a^k) = g_{k-1}(x^{k-1}), \quad k = 2, \ldots, d. \tag{14.12}$$

Рассмотрим функцию

$$F_Q(x) = \sum_{k=1}^{d} \int_{a^k}^{x^k} f^k(g_k(t))\,dt$$

и покажем, что $\frac{\partial F}{\partial x^i}(x) = f^i(x)$ для всех $i = 1, \ldots, d$. Для этого вычислим ее частные производные, используя правило Лейбница (теорема 11.3), основное условие (14.11), формулу Ньютона–Лейбница и равенства (14.12)

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(x) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\int_{a^k}^{x^k} f^k(g_k(t))\,dt\right) =$$

$$= f^i(g_i(x^i)) + \sum_{k=i+1}^{d} \int_{a^k}^{x^k} \frac{\partial f^k}{\partial x^i}(g_k(t))\,dt = f^i(g_i(x^i)) + \sum_{k=i+1}^{d} \int_{a^k}^{x^k} \frac{\partial f^i}{\partial x^k}(g_k(t))\,dt =$$

$$= f^i(g_i(x^i)) + \sum_{k=i+1}^{d} [f^i(g_k(x^k)) - f^i(g_k(a^k))] =$$

$$= f^i(g_i(x^i)) + \sum_{k=i+1}^{d} [f^i(g_k(x^k)) - f^i(g_{k-1}(x^{k-1}))] = f^i(g_d(x^d)) = f^i(x).$$

Итак, F_Q — первообразная для f в Q. Отметим еще, что, прибавляя к F_Q любую постоянную функцию, мы снова получим первообразную для f в Q.

Теперь докажем наше утверждение, считая D ограниченной областью. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим замкнутое ограниченное множество

$$D_n = \left\{x \in D : \operatorname{dist}(x, \partial D) \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Тогда $D_n \subset D_{n+1}$ и найдется номер n_0, для которого $D_{n_0} \neq \varnothing$. Кроме того, ясно, что

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} D_n = D.$$

Зафиксируем $n \geqslant n_0$ и для каждой точки $x \in D_n$ найдем открытый куб $Q_x \subset D$. Тогда семейство таких кубов $\{Q_x\}_{x \in D_n}$ образует открытое покрытие компакта D_n и из него можно выделить конечное подпокрытие $Q_{x_1}, \ldots, Q_{x_m}$. Считаем, что эти кубы пронумерованы так, чтобы каждый следующий пересекался с предыдущим.

Теперь определим первообразную $F_{Q_{x_1}}$ для куба Q_{x_1} как это было сделано выше. Далее определим первообразную $F_{Q_{x_2}}$ для куба Q_{x_2} так, чтобы она совпадала с $F_{Q_{x_1}}$ в некоторой общей точке кубов Q_{x_1} и Q_{x_2} и тогда по лемме 14.3 $F_{Q_{x_1}}$ и $F_{Q_{x_1}}$ совпадают на $Q_{x_1} \cap Q_{x_2}$. Продолжая этот процесс, мы найдем первообразную на объединении кубов $Q_{x_1}, \ldots, Q_{x_m}$, а, следовательно, и на D_n. Итак, мы нашли первообразную для f на D_n.

Чтобы найти первообразную для всей области D, зафиксируем точку $a \in D_{n_0}$ и возьмем некоторую первообразную F для f в D_{n_0}. Далее возьмем первообразную для D_{n_0+1} так, чтобы она совпала с F в точке a. По лемме 14.3 она будет совпадать с F на общей части D_{n_0} и D_{n_0+1}. Продолжая этот процесс, мы построим первообразную на объединении областей D_n, то есть на D.

От условия ограниченности D избавляемся с помощью аналогичного рассуждения с последовательностью областей $D \cap B(a, n)$, исчерпывающей неограниченную область D. $\square$

Отметим, что с целью упрощения доказательства этой теоремы мы потребовали выпуклость области D. На самом деле, ее утверждение верно для так называемых односвязных областей.

§ 6. Формула Грина

В этом параграфе мы будем работать на плоскости и интегралы по плоским множествам будем обозначать $\iint_D$, напоминая этим обозначением, что интегрирование происходит по двумерному множеству.

6.1. Положительная ориентация контура

Пусть Γ — спрямляемый контур, тогда его можно ориентировать двумя способами (см. п.4.4). Одну из ориентаций можно назвать положительной, а другую — отрицательной. При этом в качестве положительной принято выбирать ту, для которой при обходе контура с помощью параметризации, сохраняющей эту ориентацию, область, ограниченная контуром, остается слева (обход совершается "против часовой стрелки"). Это определение не является, конечно, строгим, но оно интуитивно ясно в случае, когда контур является гладким или кусочно-гладким.

Условимся в дальнейшем **многоугольником** называть любое ограниченное множество в $\mathbb{R}^2$, границей которого является **полигон** — контур, являющийся объединением отрезков, конец каждого из которых совпадает с началом следующего, а конец последнего — с началом первого.

6.2. Основная теорема

Нашей основной целью в этом параграфе является доказательство следующей важной теоремы.

Теорема 14.11 (формула Грина) *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество, $D \subset G$ — компакт, граница которого ∂D — спрямляемый контур. Пусть также задана функция $f \in C(G, \mathbb{R}^2)$.*

Тогда

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2 = \oint\limits_{\partial^+ D} f\,dx, \tag{14.13}$$

где $\partial^+ D$ — *положительно ориентированная граница* D.

Доказательству теоремы 14.11 посвящена оставшаяся часть параграфа. При доказательстве, в частности, будет установлено, что интеграл слева в (14.13) существует.

6.3. Формула Грина для многоугольника

Пусть D — многоугольник. Докажем, что

$$\iint\limits_D \frac{\partial g}{\partial x^2} dx^1 dx^2 = -\oint\limits_{\partial^+ D} g\,dx^1. \tag{14.14}$$

Это равенство нетрудно проверить, если D — треугольник, одна из сторон которых параллельна оси Ox^2. Прежде всего отметим, что

$$\oint_{CA} g\,dx^1 = 0$$

Кроме того, если $x^2 = a_1 x^1 + b_1$ — уравнение прямой, содержащей сторону AB, $x^2 = a_2 x^1 + b_2$ — уравнение прямой, содержащей сторону BC, то отображения

$$t \mapsto (t, a_1 t + b_1), \quad t \mapsto (t, a_2 t + b_2) \quad (t \in [\alpha, \beta])$$

параметризуют соответственно отрезки AB и CB. Следовательно,

$$\oint_{AB} g\,dx^1 = \int_\alpha^\beta g(x^1, a_1 x^1 + b_1)\,dx^1,$$

$$\oint_{BC} g\,dx^1 = -\oint_{CB} g\,dx^1 = -\int_\alpha^\beta g(x^1, a_2 x^1 + b_2)\,dx^1.$$

Поэтому, используя еще формулу Ньютона–Лейбница (5.22), мы получаем равенство

$$\oint_{\partial^+ D} g\,dx^1 = -\int_\alpha^\beta [g(x^1, a_2 x^1 + b_2) - g(x^1, a_1 x^1 + b_1)]\,dx^1 =$$

$$= -\int_\alpha^\beta \left[\int\limits_{a_1 x^1 + b_1}^{a_2 x^1 + b_2} \frac{\partial g}{\partial x^2}(x^1, x^2)\,dx^2\right] dx^1 = -\iint\limits_D \frac{\partial g}{\partial x^2}(x^1, x^2)\,dx^2 dx^1.$$

Отсюда сразу следует, что оно верно для любого треугольника, так как его можно разбить на два треугольника, одна из сторон которых параллельна оси Ox^2.

Так как любой многоугольник можно разбить на конечное число треугольников, то отсюда следует (14.14) и для многоугольника.

Равенство
$$\iint\limits_{D} \frac{\partial g}{\partial x^1} dx^1 dx^2 = \oint\limits_{\partial^+ D} g\, dx^2 \tag{14.15}$$
доказывется точно также, только на первом шаге надо рассматривать треугольники, одна из сторон которых параллельна оси Ox^1 (проверьте это самостоятельно).

Из (14.14) с $g = f^1$ и (14.15) с $g = f^2$ вытекает (14.13) для случая многоугольника.

Для того, чтобы доказать(14.13) в общем случае, будем исходить из идеи аппроксимации области D некоторым многоугольником.

6.4. Вспомогательная конструкция

Пусть $\Gamma = \partial^+ D$ — спрямляемый контур, $l = l_\Gamma$ и $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ — какая-нибудь его положительная параметризация.

Возьмем натуральное число $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ и разобьем $\mathbb{R}^2$ с помощью сетки прямых
$$x^1 = \frac{l}{n} i;\ x^2 = \frac{l}{n} j\ (i, j \in \mathbb{Z})$$
на квадраты с непересекающимися внутренностями.

Докажем, что Γ имеет жорданову меру 0. В самом деле, найдем разбиение $\alpha = \tau_0 < \dots < \tau_n = \beta$ так, что $l_\gamma[\tau_{k-1}, \tau_k] = \frac{l}{n}$. Тогда Γ является объединением жордановых кривых $\gamma([\tau_{k-1}, \tau_k])$ $(k = 1, \dots, n)$, каждая из которых содержится не более чем в 9 квадратах из сетки, поэтому Γ покрыта не более чем $9n$ квадратами площади $\left(\frac{l}{n}\right)^2$ каждый. Общая площадь этих квадратов не превосходит $\frac{9l^2}{n}$ и может быть сделана сколь угодно малой.

Отметим, что отсюда и из критерия измеримости (см. теорему 12.1) вытекает, что двойной интеграл в (14.13) берется по множеству, измеримому по Жордану.

Обозначим Q_n множество квадратов I, пересекающихся с Γ. Тогда Q_n состоит из конечного числа квадратов, так как Γ ограничена. Для $I \in Q_n$ обозначим $x(I)$ "последнюю точку выхода" Γ из I.

Пусть I_0 — какой-нибудь квадрат из Q_n, I_1 — тот, для которого $x(I_0)$ — точка входа в него и т.д. Продолжая процесс, мы построим квадраты
$$I_0, \dots, I_{m_n} \in Q_n,$$
причем $x(I_{k-1})$ — точка входа в I_k. Процесс закончим тогда, когда I_{m_n} совпадает с одним из предыдущих уже выбранных (это обязательно произойдет). Можно считать, что $I_{m_n} = I_0$ (иначе повторим процесс, начиная с I_{m_n} на месте I_0).

Пусть Γ_n — полигон с вершинами в точках $x_k = x(I_k)$. Тогда Γ_n является контуром, так как его звенья лежат в различных квадратах I_k.

Можно считать, что $x_0 = \gamma(\alpha)$ (если $\gamma(t_0) = x_0 \neq \gamma(\alpha)$, то заменим γ на некоторую другую параметризацию

$$\widetilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{если } t \in [t_0, \beta]\,, \\ \gamma(t-\beta+\alpha), & \text{если } t \in [\beta, \beta-\alpha+t_0]\,, \end{cases}$$

которая начинается в точке x_0 и также является положительной).

6.5. Окончание доказательства

Пусть

$$x_k = \gamma(t_k^n), \;\; k = 0, \ldots, m_n,$$

и

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} \frac{\gamma(t_k^n)-\gamma(t_{k-1}^n)}{t_k^n-t_{k-1}^n}(t-t_{k-1}^n) + \gamma(t_{k-1}^n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } \; t \in \left[t_{k-1}^n, t_k^n\right]\,, \; k = 0, \ldots, m_n \end{cases}$$

Тогда $\gamma_n \in \mathcal{P}(\Gamma_n)$, причем она проходит точки $\{x_k\}_{k=0}^{m_n}$ в том же порядке, что и γ.

Отметим для дальнейшего, что для разбиения $\Pi_n : t_0^n < \cdots < t_{m_n}^n$ выполнено $\lambda_{\Pi_n} \to 0$. Чтобы убедиться в этом возьмем $\tau \in (\alpha, \beta)$ и разобьем Γ на две жордановы кривые $\gamma([\alpha,\tau])$ и $\gamma([\tau,\beta])$ точками $\gamma(\alpha)$ и $\gamma(\tau)$. Наше утверждение следует из равномерной непрерывности обратных отображений $\left(\gamma|_{[\alpha,\tau]}\right)^{-1}$ и $\left(\gamma|_{[\tau,\beta]}\right)^{-1}$ (см. доказательство леммы 14.1).

Сначала покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \oint_{\Gamma_n^+} f\,dx = \oint_{\partial^+ D} f\,dx, \tag{14.16}$$

Запишем, например,

$$\oint_{\Gamma_n^+} f^1\,dx^1 = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{\gamma^1(t_k^n) - \gamma^1(t_{k-1}^n)}{t_k^n - t_{k-1}^n} \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} f^1(\gamma_n(t))\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} f^1(\gamma_n(\tau_k^n))\left[\gamma^1(t_k^n) - \gamma^1(t_{k-1}^n)\right] = \sum_{k=1}^{m_n} f^1(\gamma(\tau_k^n))\left[\gamma^1(t_k^n) - \gamma^1(t_{k-1}^n)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_n}\left[f^1(\gamma_n(\tau_k^n)) - f^1(\gamma(\tau_k^n))\right]\left[\gamma^1(t_k^n) - \gamma^1(t_{k-1}^n)\right],$$

где $\tau_k^n \in [t_{k-1}^n, t_k^n]$ — некоторые точки.

Первая сумма справа — интегральная сумма для интеграла Стилтьеса, определяющего криволинейный интеграл второго рода $\oint_{\partial^+ D} f^1\,dx^1$. Предел второй суммы равен нулю. Это следует из того, что

$$\left|f^1(\gamma_n(\tau_k^n)) - f^1(\gamma(\tau_k^n))\right| \leqslant \omega\bigl(\left|\gamma_n(\tau_k^n) - \gamma(\tau_k^n)\right|, f^1\bigr) \leqslant \omega\bigl(2\omega(\lambda_{\Pi_n}, \gamma), f^1\bigr)\,,$$

так как
$$|\gamma_n(\tau_k^n) - \gamma(\tau_k^n)| \leqslant 2\omega(\lambda_{\Pi_n}, \gamma).$$
Следовательно,
$$\lim_{n\to\infty} \oint_{\Gamma_n^+} f^1\, dx^1 = \oint_{\partial^+ D} f^1\, dx^1$$
Точно так же доказывается, что и
$$\lim_{n\to\infty} \oint_{\Gamma_n^+} f^2\, dx^2 = \oint_{\partial^+ D} f^2\, dx^2$$
и соотношение (14.16) доказано.

Далее покажем, что если D_n — многоугольник, для которого $\Gamma_n = \partial D_n$, то
$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2 = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2. \qquad (14.17)$$

В самом деле, так как
$$(D \setminus D_n) \cup (D_n \setminus D) \subset \bigcup_{I\in Q_n} I = S_n,$$
то, обозначая для краткости $g = \frac{\partial f^2}{\partial x^1} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2}$, получим
$$\left| \iint\limits_{D} g dx^1 dx^2 - \iint\limits_{D_n} g dx^1 dx^2 \right| = \left| \iint\limits_{D\setminus D_n} g dx^1 dx^2 - \iint\limits_{D_n\setminus D} g dx^1 dx^2 \right| \leqslant$$
$$\leqslant \iint\limits_{(D\setminus D_n)\cup(D_n\setminus D)} |g|\, dx^1 dx^2 \leqslant \iint\limits_{S_n} |g|\, dx^1 dx^2 \to 0 \quad (n \to \infty)$$
так как $\mu S_n \to 0$.

Для завершения доказательства формулы Грина, запишем для D_n уже доказанное равенство (14.13) и, используя (14.16), (14.17), перейдем в нем к пределу при $n \to \infty$.

В заключение параграфа покажем, как формула Грина может быть использована для вычисления площадей. Отметим, однако, что основные ее применения лежат в теории функций комплексного переменного.

6.6. Вычисление площадей

Если $D \subset \mathbb{R}^2$ — компакт, границей которого является спрямляемый контур, то
$$\mu(D) = \oint_{\partial^+ D} x^1 dx^2 = -\oint_{\partial^+ D} x^2 dx^1 = \frac{1}{2}\oint_{\partial^+ D} (-x^2 dx^1 + x^1 dx^2)$$

Например, для первой формулы надо применить формулу Грина к функции $f(x) = (0, x^1)$, для второй — к функции $f(x) = (x^2, 0)$, третья формула получается сложением первых двух.

Вычислим, например, площадь эллипса

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1.$$

Рассмотрим положительную параметризацию эллипса

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t),\ t \in [0, 2\pi]\,.$$

Тогда

$$S = \frac{1}{2}\oint_\gamma (x^1 dx^2 - x^2 dx^1) = \frac{1}{2}\oint_0^{2\pi} [(x^1 \circ \gamma)\cdot(\gamma^1)' - (x^2 \circ \gamma)\cdot(\gamma^2)']\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\oint_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\cos t) dt = \pi ab.$$

Глава 15
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ФОРМУЛА СТОКСА

§ 1. Поверхности

1.1. Параметрические поверхности

Напомним некоторые сведения из геометрии, касающихся параметрического задания поверхностей.

Определение 15.1 *Множество $S \subset \mathbb{R}^3$ называется* ***элементарной параметрической гладкой поверхностью*** *, если существуют такие открытое множество $G \in \mathbb{R}^2$ и гомеоморфизм $F \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$, что*

1) ранг матрицы Якоби $\mathbf{J}F(u)$ функции F равен двум при $u \in G$,

2) $F(G) \quad S$.

Функцию F будем называть ***параметризацией*** *элементарной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$.*

Частным случаем элементарной параметрической гладкой поверхности является график гладкой функции. Именно, если $G \subset \mathbb{R}^2$ и задана функция $f \in C^1(G, \mathbb{R})$, то множество

$$S \quad \left\{(x^1, x^2, f(x^1, x^2)) : (x^1, x^2) \in G\right\} \tag{15.1}$$

является элементарной параметрической гладкой поверхностью, параметризацией которой является отображение

$$F(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2)), \quad u = (u^1, u^2) \in G.$$

В самом деле, матрица Якоби в таком случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x^1}(u) & \frac{\partial f}{\partial x^2}(u) \end{pmatrix}$$

и ее верхний минор второго порядка равен 1 в любой точке $u \in G$.

Определение 15.2 *Множество $S \subset \mathbb{R}^3$ называется* ***параметрической*** *(гладкой) поверхностью, если для любой точки $a \in S$ существуют такая окрестность U_a, что $U_a \cap S$ — элементарная параметрическая поверхность.*

Параметризацию для $U_a \cap S$ будем называть также локальной ***параметризацией*** *поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ в точке $a \in S$.*

Следующее рассуждение показывает, что локально (в некоторой окрестности каждой своей точки) параметризованная поверхность устроена как график гладкой функции.

Действительно, если $a \in S$ — точка поверхности, F — ее локальная параметризация в точке $a \in S$, $b = F^{-1}(a)$. Запишем матрицу Якоби параметризации

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u^1}(b) & \frac{\partial F^1}{\partial u^2}(b) \\ \frac{\partial F^2}{\partial u^1}(b) & \frac{\partial F^2}{\partial u^2}(b) \\ \frac{\partial F^3}{\partial u^1}(b) & \frac{\partial F^3}{\partial u^2}(b) \end{pmatrix}.$$

Один из ее миноров второго порядка отличен от нуля. Пусть для определенности

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u^1}(b) & \frac{\partial F^1}{\partial u^2}(b) \\ \frac{\partial F^2}{\partial u^1}(b) & \frac{\partial F^2}{\partial u^2}(b) \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогда для функции

$$g : u \to (F^1(u), F^2(u))$$

выполнены все условия теоремы 8.3 об обратной функции. Поэтому существуют такие открытые множества $V \subset G$ и W, содержащие точки $b = (b^1, b^2)$ и $a = (a^1, a^2)$ соответственно, что сужение $g|_V$ имеет обратную функцию $g^{-1} : W \to V$. Тогда образ $F(u^1, u^2)$ любой точки $(u^1, u^2) \in V$ принадлежит S и

$$F(u^1, u^2) = (F \circ g^{-1})(x^1, x^2) = \left(g \circ g^{-1}(x^1, x^2), F^3 \circ g^{-1}(x^1, x^2)\right) =$$

$$= \left(x^1, x^2, F^3 \circ g^{-1}(x^1, x^2)\right).$$

Таким образом, "кусок" поверхности S, содержащий точку a, задается графиком гладкой функции.

Часто встречается способ задания параметрической поверхности с помощью неявного уравнения. Именно, пусть задана функция $F \in C^1(D)$ на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^3$, причем $\operatorname{grad} F(x) \neq 0$ в каждой точке $x \in D$. Тогда если $y_0 \in F(D)$ и $y_0 = F(x_0)$, где x_0 некоторая точка из D, и, например, $\frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0) \neq 0$, то к отображению $F - y_0$ можно применить теорему 8.4 о неявной функции, согласно которой существует окрестность $U \subset \mathbb{R}^2$ точки (x_0^1, x_0^2), на которой определена (неявная) функция $f : U \to \mathbb{R}$ из класса $C^1(U)$, удовлетворяющая равенству

$$F(x^1, x^2, f(x^1, x^2)) - y_0 = 0, \quad \text{при } (x^1, x^2) \in U.$$

Таким образом, для каждого y_0 из области определения функции F уравнение $F(x) - y_0 = 0$ локально определяет поверхность — график неявной функции f.

Примером такого задания поверхности может служить сфера

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = R^2$$

с центром в начале координат радиуса $R > 0$.

1.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ параметрическая поверхность, F локальная параметризация S, $a \in S$, b $F^{-1}(a)$. Ниже мы систематически будем использовать обозначение

$$A(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^2}{\partial u^1} & \frac{\partial F^3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial F^2}{\partial u^2} & \frac{\partial F^3}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \quad B(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^3}{\partial u^1} & \frac{\partial F^1}{\partial u^1} \\ \frac{\partial F^3}{\partial u^2} & \frac{\partial F^1}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \quad C(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u^1} & \frac{\partial F^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial F^1}{\partial u^2} & \frac{\partial F^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \tag{15.2}$$

(все частные производные вычисляются в точке $b - F^{-1}(a)$).

Вектор

$$(A(a), B(a), C(a))$$

называется **нормальным** для S в точке a.

Если поверхность задана явным уравнением, как график функции $f \in C^1(G)$, то

$$A(a) \quad -\frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad B(a) \quad -\frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad C(a) \quad 1, \tag{15.3}$$

где частные производные вычисляются в точке (a^1, a^2). Нормальный вектор в точке $(a^1, a^2, f(a^1, a^2))$ поверхности приобретает тогда вид

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x^1}, -\frac{\partial f}{\partial x^2}, 1\right)$$

(частные производные вычисляются в точке (a^1, a^2)).

Равенство

$$\begin{vmatrix} x^1 - a^1 & x^2 - a^2 & x^3 - a^3 \\ \frac{\partial F^1}{\partial u^1}(b) & \frac{\partial F^2}{\partial u^1}(b) & \frac{\partial F^3}{\partial u^1}(b) \\ \frac{\partial F^1}{\partial u^2}(b) & \frac{\partial F^2}{\partial u^2}(b) & \frac{\partial F^3}{\partial u^2}(b) \end{vmatrix} - 0$$

задает уравнение **касательной плоскости** к S в точке a.

Разлагая этот определитель по элементам первой строки, видим, что касательная плоскость к S в точке a множество точек $x \in \mathbb{R}^3$, для которых разность $x - a$ ортогональна нормальному вектору.

Пример 15.1 Найти нормаль и касательную плоскость к винтовой поверхности

$$(u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, u^2), \quad u \in \mathbb{R}^2$$

1.3. Площадь поверхности

Сначала введем понятие площади элементарной поверхности.

Определение 15.3 ***Площадью*** *элементарной поверхности называется*

$$\sigma(S) \quad \iint\limits_G \sqrt{A^2(u) + B^2(u) + C^2(u)}\, du. \tag{15.4}$$

Приведем некоторые аргументы в пользу такого определения. Если элементарная поверхность S задана явным уравнением, как график функции $f \in C^1(G)$, то разобьем G на измеримые (по Жордану) множества

$$G = \bigcup_{k=1}^{n} G_k, \quad G_k \cap G_l = \varnothing,$$

в каждом множестве G_k зафиксируем точку x_k, и будем считать, что площадь графика сужения $f|_{G_k}$ приблизительно равна площади той части касательной плоскости к S в точке x_k, которая проектируется на G_k. Последняя равна $\frac{\mu(G_k)}{|\cos\alpha_k|}$, где α_k угол между нормалью к S в точке x_k и вектором $(0, 0, 1)$. Таким образом, приближенное значение площади поверхности равно

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(G_k)}{|\cos\alpha_k|}$$

Предельный переход и приводит к интегралу

$$\iint\limits_{G} \frac{dx}{|\cos\alpha|}.$$

В рассматриваемом случае (поверхность задана явным уравнением) нормальным является вектор $\left(-\frac{\partial f}{\partial x^1}, -\frac{\partial f}{\partial x^2}, 1\right)$ и (см. (15.3))

$$\frac{1}{|\cos\alpha|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Аналогичные аргументы подходят и в случае элементарной поверхности. Именно, пусть S элементарная поверхность, $F \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$ ее параметризация и в области $G_0 \subset G$ ее можно задать явным уравнением $x^3 = f(x^1, x^2)$. Обозначим D_0 образ G_0 при отображении $\varphi : u \to (F^1(u), F^2(u))$. Тогда, совершая замену переменной с помощью обратного отображения $\varphi^{-1} : D_0 \to G_0$, по теореме 13.6 получаем

$$\iint\limits_{G_0} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du^1\, du^2 =$$

$$\iint\limits_{D_0} \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|}\, dx^1\, dx^2 = \iint\limits_{D_0} \frac{dx^1 dx^2}{|\cos\alpha|}.$$

Если поверхность удалось "разбить" на конечное число элементарных поверхностей, то площадью этой поверхности назовем сумму площадей составляющих элементарных кусков. Такое определение естественно с точки зрения свойства аддитивности площади.

В геометрии часто используются **гауссовы коэффициенты** поверхности

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left(\tfrac{\partial F^1}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial F^2}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial F^3}{\partial u^1}\right)^2, \\ \mathcal{F} &= \tfrac{\partial F^1}{\partial u^1}\tfrac{\partial F^1}{\partial u^2} + \tfrac{\partial F^2}{\partial u^1}\tfrac{\partial F^2}{\partial u^2} + \tfrac{\partial F^3}{\partial u^1}\tfrac{\partial F^3}{\partial u^2}, \\ \mathcal{G} &= \left(\tfrac{\partial F^1}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial F^2}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial F^3}{\partial u^2}\right)^2. \end{aligned} \tag{15.5}$$

С помощью равенства

$$A^2 + B^2 + C^2 = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2,$$

которое проверяется непосредственно, формулу (15.4) для площади поверхности можно переписать в виде

$$\sigma(S) = \iint\limits_G \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\, du.$$

§ 2. Формула Стокса

2.1. Ориентация поверхности

Понятие стороны поверхности связано с понятием направления нормали. У гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ в каждой точке $a \in S$ есть два единичных нормальных вектора $\nu(a)$ и $-\nu(a)$. Поэтому кажется естественным, что у поверхности должно быть две стороны. Однако, это не так. В отличие, например, от сферы или плоскости, лист Мебиуса или бутылка Клейна имеет лишь одну сторону.

Ориентировать поверхность означает возможность зафиксировать одну из двух сторон поверхности.

Определение 15.4 *Гладкая поверхность называется* ***ориентируемой****, если существует непрерывное отображение $a \mapsto \nu(a)$ $(a \in S)$, где $\nu(a)$ — единичный нормальный вектор к S в точке a.*

Если выбрано такое отображение, то говорят, что на поверхности задана ориентация (или выбрана сторона поверхности).

Отображение $a \to \nu(a)$ мы будем называть обычно **ориентирующим полем нормалей**. Часто мы будем отождествлять непрерывное поле нормалей и ориентацию поверхности.

Теорема 15.1 *Ориентируемая связная поверхность имеет в точности две ориентации.*

Доказательство. Так как наша поверхность ориентируема, то существует непрерывное поле нормалей $a \mapsto \nu(a)$, тогда $a \mapsto -\nu(a)$ — также непрерывное поле нормалей. Итак, мы нашли две ориентации.

Предположим, что есть еще одна ориентация $a \to \mu(a)$, не совпадающая с указанными выше. Тогда найдутся точки $a_1, a_2 \in S$, для которых $\mu(a_1) = \nu(a_1)$, $\mu(a_2) = -\nu(a_2)$. Рассмотрим функцию

$$f(a) = (\nu(a), \mu(a)), \quad a \in S,$$

которая непрерывна на S и может принимать только два значения ± 1 (в каждой точке есть только два единичных нормальных вектора) и оба принимает, так как $f(a_1) = 1$, $f(a_2) = -1$. Следовательно, $f(S) = \{-1, +1\}$, что противоречит теореме 6.11 о непрерывном образе связного множества. □

Упражнение 15.1

1) Если гладкая поверхность задана неявным уравнением

$$f(x) = 0, \quad \nabla f(x) \neq 0,$$

то она ориентируема и ориентацию можно задать полем нормалей

$$\nu(a) = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}, \quad a \in S.$$

2) Параметрическая гладкая поверхность S ориентируема и ориентацию можно задать равенством

$$\nu(a) = \frac{(A(a), B(a), C(a))}{\sqrt{A^2(a) + B^2(a) + C^2(a)}}, \quad a \in S.$$

где F — параметризация S (см. (15.2)).

2.2. Поверхностные интегралы

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая элементарная поверхность и $F \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$ — ее параметризация, причем ее область определения G является множеством, измеримым по Жордану. Тогда **поверхностным интегралом первого рода** по поверхности S от функции $P \in C(S)$ называется

$$\iint\limits_S P\, d\sigma = \iint\limits_G (P \circ F)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du^1 du^2$$

Пусть дополнительно поверхность S ориентирована, причем ориентирующим полем нормалей является

$$\nu = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{15.6}$$

Тогда положим

$$\iint\limits_S P\, dx^1 dx^2 = \iint\limits_G (P \circ F) C\, du$$

Аналогично можно определить интегралы.

$$\iint\limits_S P\,dx^2dx^3 = \iint\limits_G (P\circ F)A\,du$$

$$\iint\limits_S P\,dx^3dx^1 = \iint\limits_G (P\circ F)B\,du$$

Общий **поверхностный интеграл второго рода** от векторной функции $P \in C(S,\mathbb{R}^3)$ по элементарной ориентированной поверхности S определяется как

$$\iint\limits_S P^1\,dx^2dx^3 + P^2\,dx^3dx^1 + P^3\,dx^1dx^2 =$$

$$= \iint\limits_G \big[(P^1\circ F)A + (P^2\circ F)B + (P^3\circ F)C\big]\ du$$

Упражнение 15.2

1) Если поверхность S задана явным уравнением, как график функции $f \in C^1(D)$, $D\subset\mathbb{R}^2$, то

$$\iint\limits_S P\,d\sigma = \iint\limits_D P(x^1,x^2,f(x^1,x^2))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2}\,dx^1dx^2.$$

2) Общий поверхностный интеграл второго рода можно вычислить по формуле

$$\iint\limits_S P^1\,dx^2dx^3 + P^2\,dx^3dx^1 + P^3\,dx^1dx^2 = \iint\limits_G \begin{vmatrix} P^1\circ F & P^2\circ F & P^3\circ F \\ \frac{\partial F^1}{\partial u^1} & \frac{\partial F^2}{\partial u^1} & \frac{\partial F^3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial F^1}{\partial u^2} & \frac{\partial F^2}{\partial u^2} & \frac{\partial F^3}{\partial u^2}\end{vmatrix}\,du.$$

3) Поверхностные интегралы первого и второго рода связаны равенством

$$\iint\limits_S P^1\,dx^2dx^3 + P^2\,dx^3dx^1 + P^3\,dx^1dx^2 = \iint\limits_S (P,\nu)\,d\sigma, \qquad (15.7)$$

где ν — ориентирующее поле нормалей.

Если поверхность удается разбить на конечное число элементарных поверхностей, то интегралом (первого и второго рода) по ней будем называть сумму соответствующих интегралов по ее частям.

2.3. Поверхности с краем

Пусть $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая ориентированная параметрическая поверхность и $F \in C^1(G_0, \mathbb{R}^3)$ — ее параметризация, причем ориентирующим полем нормалей является

$$\nu = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(как в определении поверхностного интеграла второго рода (см. (15.6)).

Пусть область $G \subset G_0$ такова, что $\overline{G} \subset G_0$ и ее границей является кусочно гладкий контур. Тогда образ $S = F(G)$ также является элементарной параметрической поверхностью. Образ $F(\partial G)$ будем называть **краем** поверхности S и обозначать ∂S.

Не следует путать край поверхности с ее топологической границей — последняя совпадает с $\overline{S}$. Ясно, что ∂S является кусочно гладким контуром и $F \circ \gamma$ — его естественная параметризация, если γ — параметризация ∂G.

Ориентация (выбор стороны) поверхности S определяет положительное направление обхода контуров на поверхности по тому же правилу, которое мы использовали на плоскости в начале § 6 — при обходе контура с помощью положительной параметризации часть поверхности, ограниченная контуром, остается слева (обход совершается "против часовой стрелки").

Мы будем считать ориентации поверхности S и ее края ∂S согласованными в том смысле, что если γ — положительная параметризация ∂G, то $F \circ \gamma$ — положительная параметризация ∂S.

Все обозначения и соглашения этого пункта будут использоваться сейчас при выводе так называемой формулы Стокса.

2.4. Формула Стокса

Пусть в окрестности U поверхности S задана функция $P \in C^1(U, \mathbb{R})$. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{\partial^+ S} P\,dx^1 = \oint\limits_{\partial^+ G} P\frac{\partial F^1}{\partial u^1}du^1 + P\frac{\partial F^1}{\partial u^2}du^2 \tag{15.8}$$

(это равенство легко проверить, сводя каждый из интегралов к интегралу Римана). К последнему интегралу применим формулу Грина

$$\oint\limits_{\partial^+ G} P\frac{\partial F^1}{\partial u^1}du^1 + P\frac{\partial F^1}{\partial u^2}du^2 = \iint\limits_G \left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(P\frac{\partial F^1}{\partial u^2}\right) - \frac{\partial}{\partial u^2}\left(P\frac{\partial F^1}{\partial u^1}\right)\right]\,du$$

и преобразуем выражение под знаком двойного интеграла

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\left(P\frac{\partial F^1}{\partial u^2}\right) - \frac{\partial}{\partial u^2}\left(P\frac{\partial F^1}{\partial u^1}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x^1}\frac{\partial F^1}{\partial u^1}+\frac{\partial P}{\partial x^2}\frac{\partial F^2}{\partial u^1}+\frac{\partial P}{\partial x^3}\frac{\partial F^3}{\partial u^1}\right)\frac{\partial F^1}{\partial u^2}+P\frac{\partial^2 F^1}{\partial u^1 u^2}-$$
$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x^1}\frac{\partial F^1}{\partial u^2}+\frac{\partial P}{\partial x^2}\frac{\partial F^2}{\partial u^2}+\frac{\partial P}{\partial x^3}\frac{\partial F^3}{\partial u^2}\right)\frac{\partial F^1}{\partial u^1}-P\frac{\partial^2 F^1}{\partial u^2 u^1}=$$
$$=\frac{\partial P}{\partial x^1}\left[\frac{\partial F^1}{\partial u^1}\frac{\partial F^1}{\partial u^2}-\frac{\partial F^1}{\partial u^1}\frac{\partial F^1}{\partial u^2}\right]+$$
$$+\frac{\partial P}{\partial x^2}\left[\frac{\partial F^2}{\partial u^1}\frac{\partial F^1}{\partial u^2}-\frac{\partial F^2}{\partial u^2}\frac{\partial F^1}{\partial u^1}\right]+\frac{\partial P}{\partial x^3}\left[\frac{\partial F^3}{\partial u^1}\frac{\partial F^1}{\partial u^2}-\frac{\partial F^3}{\partial u^2}\frac{\partial F^1}{\partial u^1}\right]=$$
$$=\frac{\partial P}{\partial x^3}B-\frac{\partial P}{\partial x^2}C.$$

Таким образом, из равенства (15.8) получаем соотношение

$$\oint\limits_{\partial^+ S} P\,dx^1=\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x^3}dx^3dx^1-\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x^2}dx^1dx^2.$$

Точно так же можно доказать равенства

$$\oint\limits_{\partial^+ S} P\,dx^2=\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x^1}dx^1dx^2-\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x^3}dx^2dx^3,$$
$$\oint\limits_{\partial^+ S} P\,dx^3=\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x^2}dx^2dx^3-\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x^1}dx^3dx^1$$

(они получаются из первого с помощью циклической перестановки в x^1, x^2, x^3).

Применяя эти равенства к компонентам векторной функции $P \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, получаем

$$\oint\limits_{\partial^+ S} P\,dx=\iint\limits_S \left[\frac{\partial P^2}{\partial x^1}-\frac{\partial P^1}{\partial x^2}\right]dx^1dx^2+$$
$$+\iint\limits_S \left[\frac{\partial P^3}{\partial x^2}-\frac{\partial P^2}{\partial x^3}\right]dx^2dx^3+\iint\limits_S \left[\frac{\partial P^1}{\partial x^3}-\frac{\partial P^3}{\partial x^1}\right]dx^3dx^1. \tag{15.9}$$

Это равенство называют обычно **формулой Стокса**.

2.5. Формула Гаусса-Остроградского

Приведем еще одно тождество, содержащее поверхностный интеграл. Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутое выпуклое ограниченное множество, границей которого является гладкая замкнутая поверхность. Ориентируем границу с помощью внешнего поля нормалей. Тогда если U некоторая окрестность V и $P \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, то справедливо равенство

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P^1}{\partial x^1}+\frac{\partial P^2}{\partial x^2}+\frac{\partial P^3}{\partial x^3}\right)dx^1dx^2dx^3=$$

$$= \iint\limits_{\partial^+ V} P^1\, dx^2 dx^3 + P^2\, dx^3 dx^1 + P^3\, dx^1 dx^2, \tag{15.10}$$

называемое **формулой Гаусса–Остроградского**.

Равенство (15.10) распадается на следующие

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P^1}{\partial x^1}\, dx = \iint\limits_{\partial^+ V} P^1\, dx^2 dx^3,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P^2}{\partial x^2}\, dx = \iint\limits_{\partial^+ V} P^2\, dx^3 dx^1,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P^3}{\partial x^3}\, dx = \iint\limits_{\partial^+ V} P^3\, dx^1 dx^2.$$

Эти равенства доказываются одинаково и мы остановимся только на доказательстве последнего из них. Пусть D — проекция V на плоскость $x^3 = 0$. В силу выпуклости V каждая прямая, параллельная оси Ox^3 и пересекающая D, будет пересекать V по отрезку

$$[(x^1, x^2, \varphi_1(x^1, x^2)), (x^1, x^2, \varphi_2(x^1, x^2))], \quad (x^1, x^2) \in D.$$

Тогда поверхность ∂V разбивается на три гладкие части

$$S_1 = \left\{(x^1, x^2, x^3) : x^3 = \varphi_1(x^1, x^2)), \quad (x^1, x^2) \in D\right\},$$

$$S_2 = \left\{(x^1, x^2, x^3) : x^3 = \varphi_2(x^1, x^2)), \quad (x^1, x^2) \in D\right\},$$

$$S_3 = \partial V \setminus (S_1 \cup S_2)$$

(S_3 — "боковая часть" границы V). В соответствии с этим поверхностный интеграл по $\partial^+ V$ будет равен сумме интегралов по S_1 (интегрирование ведется по нижней стороне S_1) и по S_2 (интегрирование ведется по верхней стороне S_2). Интеграл по S_3 равен нулю, так как нормаль к S_3 перпендикулярна оси Ox^3. Следовательно, используя еще формулу сведения кратных интегралов к повторным (см. следствие 13.3) и формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P^3}{\partial x^3}\, dx = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\varphi_1(x^1,x^2)}^{\varphi_2(x^1,x^2)} \frac{\partial P^3}{\partial x^3}\, dx^3\right] dx^1\, dx^2 =$$

$$= \iint\limits_D \left[P^3(x^1, x^2, \varphi_2(x^1, x^2)) - P^3(x^1, x^2, \varphi_1(x^1, x^2))\right] dx^1\, dx^2 =$$

$$= \iint\limits_{S_2} P^3\, dx^1\, dx^2 + \iint\limits_{S_1} P^3\, dx^1\, dx^2 = \iint\limits_{\partial^+ V} P^3\, dx^1\, dx^2.$$

§ 3. Теория поля

Рассмотрим выпуклую область $V \subset \mathbb{R}^3$ и две функции

$$f : V \to \mathbb{R}, \quad F : V \to \mathbb{R}^3. \tag{15.11}$$

В приложениях математического анализа в математической физике и механике изучение таких функций традиционно выделяется в особый раздел, который носит название **векторного анализа** или **теории поля**. Для нас он не будет содержать существенной математической новизны, а будет состоять в использовании специфической терминологии теории поля и трактовки ряда наших результатов в терминах этого языка. Приступим к его изложению.

3.1. Язык теории поля

Функция $f : V \to \mathbb{R}$ называется **скалярным полем**, а функция $F : V \to \mathbb{R}^3$ — **векторным полем**. Примерами скалярных полей могут служить поле температуры или электрического потенциала. Силовое поле или поле скоростей движения жидкости — примеры векторных полей.

В дальнейшем будут использоваться частные производные функции f и компонент функции F. Поэтому будем предполагать, что $f \in C^1(V)$ и $F \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$.

Векторное поле

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) \tag{15.12}$$

называется **градиентом** скалярного поля f.

Скалярное поле

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3} \tag{15.13}$$

называется **дивергенцией** векторного поля F.

Векторное поле

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}, \frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1}, \frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right) \tag{15.14}$$

называется **ротором** векторного поля F.

Отметим, следующие часто используемые в теории поля тождества

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f \equiv 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} F \equiv 0. \tag{15.15}$$

Они доказываются с помощью непосредственного вычисления.

Криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_C F\, dx$$

по ориентированному контуру $C \subset V$ называется **циркуляцией** векторного поля F по контуру C.

Если обозначить τ — единичный касательный вектор в положительном направлении обхода контура C, то циркуляцию можно записать в виде

$$\oint_C F\,dx = \oint_C (F,\tau)\,dl$$

Поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S F^1\,dx^2dx^3 + F^2\,dx^3dx^1 + F^3\,dx^1dx^2$$

по ориентированной поверхности S называется **потоком** векторного поля F через поверхность S.

Если ν — ориентирующее поле нормалей S, то поток можно записать в виде (см. (15.7))

$$\iint\limits_S P^1\,dx^2dx^3 + P^2\,dx^3dx^1 + P^3\,dx^1dx^2 = \iint\limits_S (P,\nu)\,d\sigma.$$

3.2. Основные теоремы теории поля

Следующие две теоремы дают перевод формул Гаусса–Остроградского и Стокса на язык теории поля.

Теорема 15.2 (формула Гаусса–Остроградского) *Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая поверхность с кусочно-гладким краем C и $F \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ — векторное поле, определенное в некоторой окрестности U поверхности S.*

Тогда циркуляция векторного поля F по поверхности S равна потоку ротора F через эту поверхность, то есть

$$\oint\limits_C (F,\tau)\,dl = \iint\limits_S (\operatorname{rot} F,\nu)\,d\sigma.$$

Здесь τ — единичный касательный вектор к C, согласованный с ориентирующим полем нормалей ν так, чтобы обход контура C в направлении τ совершался "против часовой стрелки".

Теорема 15.3 (формула Стокса) *Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ — выпуклая область, границей которой является гладкая замкнутая поверхность S, $F \in C^1(V,\mathbb{R}^3)$ — векторное поле.*

Тогда поток поля F через S равен интегралу от его дивергенции по V

$$\iint\limits_S (F,\nu)\,dl = \iiint\limits_V \operatorname{div} F\,dx$$

(ν — поле внешней нормали к S).

Глава 16

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА В $\mathbb{R}^d$

Всюду в этой главе измеримость множества понимается в смысле Лебега. Противное оговаривается особо.

§ 1. Измеримые по Лебегу функции и их свойства

1.1. Определение измеримости функции

Если $P = P(x)$ — некоторое свойство, относящееся к точкам $x \in \mathbb{R}^d$ и, $E \subset \mathbb{R}^d$, то для краткости условимся обозначать через $E(P)$ множество тех точек $x \in E$, для которых это свойство выполнено.

Например, если заданы функция $f : E \to \mathbb{R}$ и число $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$E(f > \lambda) = \{x \in E : f(x) > \lambda\}.$$

Эти множества играют важную роль в дальнейшем и имеют специальное название — **лебеговы множества** (иногда говорят — множества уровня).

Определение 16.1 *Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримое(по Лебегу) множество и $f : E \to \mathbb{R}$. Тогда f называется* ***измеримой*** *(по Лебегу) на E, если для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ множество $E(f > \lambda)$ измеримо.*

Класс всех измеримых по Лебегу функций на множестве E обозначаем $M(E)$.

Здесь необходимо подчеркнуть два момента. Во-первых, область определения измеримой функции необходимо измерима. Во-вторых, в определении речь идет об измеримости целого семейства множеств $\{E(f > \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Упражнение 16.1

1) Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримо и $f : E \to \mathbb{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

i) f измерима;

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ E(f \geqslant \lambda)$ измеримо;

iii)$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ E(f < \lambda)$ измеримо;

iv) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ E(f \leqslant \lambda)$ измеримо.

2) Если $f \in M(E)$, то $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ E(f = \lambda)$ измеримо, обратное неверно.

3) Пусть $\forall r \in \mathbb{Q}\ E(f > r)$ измеримо. Обязана ли f быть измеримой?

4) Доказать включение

$$C(E) \subset M(E). \tag{16.1}$$

Доказательство. 1) *i)* $\Longrightarrow$ *ii)* Для $\lambda \in \mathbb{R}$ запишем

$$E(f \geqslant \lambda) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > \lambda - \frac{1}{k}) \tag{16.2}$$

(это легко можно проверить непосредственно) и все следует из того, что счетное пересечение измеримых множеств измеримо.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Следует из $E(f < \lambda) = E \setminus E(f \geqslant \lambda)$.

Остальное предлагается сделать самостоятельно.□

1.2. Простые функции

Определение 16.2 *Пусть измеримое множество* $E \subset \mathbb{R}^d$ *представлено в виде не более чем счетной суммы* $E = \bigcup_{k \geqslant 1} E_k$ *попарно не пересекающихся измеримых множеств* E_k. *Пусть еще* $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$. *Тогда функция*

$$f(x) = a_k \quad \text{при} \quad x \in E_k \quad (k \geqslant 1) \tag{16.3}$$

называется ***простой***. *Класс всех простых функций на* E *обозначаем* $S(E)$.

Характеристической функцией множества называется

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d \setminus E \end{cases}. \tag{16.4}$$

Упражнение 16.2

1) Функция является χ_E простой тогда и только тогда, когда множество измеримо.

2) $S(E) \subset M(E)$.

3) Если $f \in M(E)$ и $c \in \mathbb{R}$, то $f + c \in M(E)$, $c \cdot f \in M(E)$.

4) Если $f \in M(E)$, $g \in M(E)$, то множество $E(f > g)$ измеримо.

Доказательство. 3) Неравенство $f(x) > g(x)$ выполнено тогда и только тогда, когда для некоторого рационального $r \in \mathbb{Q}$ $f(x) > r > g(x)$, поэтому

$$E(f > g) = \bigcup_{k} (E(f > r_k) \cap E(g < r_k))$$

и примененные операции не выводят из класса измеримых множеств. Здесь $\{r_k\}$ — последовательность всех рациональных чисел, занумерованная каким-либо образом. □

1.3. Операции над измеримыми функциями

Теорема 16.1 *Если $f, g \in M(E)$, то*

$$f \pm g;\ f \cdot g;\ f/g \in M(E) \tag{16.5}$$

(последнее при $g(x) \neq 0$).

Доказательство. Измеримость $f \pm g$ вытекает из предыдущего утверждения. Далее,

$$E(f^2 > \lambda) = \begin{cases} E, & \text{если } \lambda < 0, \\ E(f > \sqrt{\lambda}) \cap E(f < -\sqrt{\lambda}), & \text{если } \lambda \geqslant 0 \end{cases}$$

и $f^2 \in M(E)$. Поэтому

$$f \cdot g = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2] \in M(E). \tag{16.6}$$

Наконец, достаточно доказать, что $1/g \in M(E)$, а это следует из того, что

$$E(1/g > \lambda) = \begin{cases} E(g > 0) & \text{при } \lambda = 0, \\ E(g > 0) \cup \big(E(g < 0) \cap E(g > \frac{1}{\lambda})\big) & \text{при } \lambda < 0 \\ E(g > 0) \cap E(g < \frac{1}{\lambda}) & \text{при } \lambda > 0 \end{cases} \quad \square$$

Упражнение 16.3
1) Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго монотонна, $g \in M(E)$, то $f \circ g \in M(E)$.
2) Если $f \in M(E)$, то$|f| \in M(E)$.

§ 2. Последовательности измеримых функций

2.1. Измеримость предела

Теорема 16.2 *Если $\{f_n\} \subset M(E)$ и почти всюду на E существует*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

то $f \in M(E)$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ существует всюду, то наше утверждение следует из равенства

$$E(f > \lambda) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E\Big(f_n > \lambda + \frac{1}{k}\Big).$$

В общем случае предельная функция f определена лишь почти всюду. Но ясно, что при любом определении ее на оставшемся множестве меры нуль, полученная функция будет измеримой, так как измеримость множества не нарушится от добавления к нему множества меры нуль. $\square$

Упражнение 16.4

1) Если $\{f_n\} \subset M(E)$, то множество $E(\exists \lim f_n)$ измеримо.

2) Если $\{f_n\} \subset M(E)$ и последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена в каждой точке, то $\sup n f_n \in M(E)$ и $\inf n f_n \in M(E)$.

3) Если $\{f_n\} \subset M(E)$ и последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена в каждой точке, то $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n \in M(E)$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n \in M(E)$.

2.2. Сходимость по мере

Определение 16.3 *Будем говорить, что некоторое свойство $P(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ выполнено* ***почти всюду****, если множество точек, в которых оно не выполнено, имеет меру нуль.*

Определение 16.4 *Функции $f, g : E \to \mathbb{R}$ называются* ***эквивалентными****, если они совпадают почти всюду. Кратко это записывают $f \sim g$ (или $f \sim g$ на E).*

Определение 16.5 *Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n\} \subset M(E)$* ***сходится по мере*** *к функции $f \in M(E)$ на множестве E (краткая запись $f_n \xrightarrow{\mu} f$), если*

$$\forall\, \sigma > 0 \ \lim_{n\to\infty} \mu E(|f_n - f| > \sigma) = 0.$$

Упражнение 16.5

1) Показать, что отношение $f \sim g$ является отношением эквивалентности на классе $M(E)$.

2) Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $g \sim f$, то $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

3) Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $f_n \xrightarrow{\mu} g$, то $f \sim g$.

Доказательство. 3) Для $\sigma > 0$ выполнено неравенство

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - g(x)| \tag{16.7}$$

Поэтому

$$E(|f - g| > \sigma) \subset E\Big(|f_n - f| > \frac{\sigma}{2}\Big) \cup E\Big(|f_n - g| > \frac{\sigma}{2}\Big)$$

и

$$\mu E(|f - g| > \sigma) \leqslant \mu E\Big(|f_n - f| > \frac{\sigma}{2}\Big) + \mu E\Big(|f_n - g| > \frac{\sigma}{2}\Big) \to 0 \tag{16.8}$$

и $\mu E(|f - g| > \sigma) = 0$ для любого $\sigma > 0$. Осталось заметить, что

$$E(f \neq g) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E\Big(|f - g| > \frac{1}{k}\Big) \tag{16.9}$$

и использовать счетную аддитивность меры Лебега.$\square$

2.3. Связь сходимости по мере и сходимости почти всюду

Теорема 16.3 (Лебег) *Если $\{f_n\} \subset M(E)$, $\mu(E) < \infty$, сходится почти всюду и $f \in M(E)$, то $f_n \overset{\mu}{\to} f$.*

Доказательство. Пусть $e = E(f_n \nrightarrow f)$, тогда $\mu e = 0$. Положим

$$E_n(\sigma) = E(|f_n - f| > \sigma); \tag{16.10}$$

$$Q_m(\sigma) = \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n(\sigma). \tag{16.11}$$

Тогда $\bigcap_{m=1}^{\infty} Q_m(\sigma) \subset e$. Действительно, если $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} Q_m(\sigma)$, то для любого m $x \in Q_m(\sigma)$ и существует $n \geqslant m$ для которого $x \in E_n(\sigma)$. Итак, неравенство $|f_n(x) - f(x)| > \sigma$ выполнено для бесконечно многих n, т.е. $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$ при $x \in e$. Так как $Q_m(\sigma) \supset Q_{m+1}(\sigma)$, то в силу свойства непрерывности меры Лебега (теорема 12.11.5) (здесь используется условие $\mu(E) < \infty$)

$$0 = \mu \bigcap_{m=1}^{\infty} Q_m(\sigma) = \lim_{m\to\infty} \mu Q_m(\sigma) \tag{16.12}$$

Осталось заметить, что $E_n(\sigma) \subset Q_n(\sigma)$.□

Последовательность, сходящаяся по мере не обязана сходиться хотя бы в одной точке. Это показывает следующий пример.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}] \\ 0, & x \in [0,1] \setminus [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}] \end{cases}$$

если $n = 2^k + j$ ($k \geqslant 0$; $1 \leqslant j \leqslant 2^k$). Тогда, очевидно, последовательность $\{f_n(x)\}$ расходится в каждой точке из $[0,1]$, так как она содержит бесконечно много нулей и бесконечно много единиц. С другой стороны, то

$$\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| > \sigma\} = \begin{cases} 2^{-k} & \text{при } 0 < \sigma < 1 \\ 0 & \text{при } \sigma \geqslant 1 \end{cases} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{16.13}$$

т.е. f_n сходится по мере и $f(x) \equiv 0$.

Теорема 16.4 (Ф.Рисс) *Если $\{f_n\} \subset M(E)$ сходится по мере к $f \in M(E)$, то существует такая последовательность $\{n_k\}$, что*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \tag{16.14}$$

для почти всех $x \in E$.

Доказательство. Сначала предположим, что $\mu E < \infty$. По индукции легко построить последовательность так, чтобы

$$\mu E\left(|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2^{k+1}}$$

и покажем, что $\{n_k\}$ удовлетворяет требованию. Пусть $E_k = E(|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k})$ и

$$\Delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k.$$

В силу свойства непрерывности меры

$$\mu\Delta = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} E_k\right) \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \mu E_k \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 2^{-m} = 0.$$

Кроме того, если $x \notin \Delta$, то $x \notin \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k$ при некотором m. Следовательно, $x \notin E_k$ при всех $k \geqslant m$, т.е.

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \quad (k \geqslant m)$$

и $f_{n_k}(x) \to f(x)$.

В общем случае применяем диагональный процесс Кантора. □

Теорема 16.5 (Д.Ф.Егоров) *Если последовательность $\{f_n\} \subset M(E)$ сходится почти всюду к функции $f \in M(E)$, $\mu(E) < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E_\varepsilon \subset E$ со свойствами*

1) $\mu(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$,

2) f_n сходится к f равномерно на E_ε.

Доказательство. Пусть

$$Q_m(\sigma) = \bigcup_{n=m}^{\infty} E(|f_n - f| > \sigma),$$

Тогда (как показано в доказательстве теоремы Лебега) $\mu Q_m(\sigma) \to 0$. По индукции можно указать последовательность индексов $\{m_k\}$ так, что

$$\mu Q_{m_k}\left(\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{16.15}$$

Положим

$$E_\varepsilon = E \setminus \bigcup_{k=k_0}^{\infty} Q_{m_k}\left(\frac{1}{k}\right), \tag{16.16}$$

где k_0 выбрано так, чтобы $2^{-k_0} < \varepsilon$ и покажем, что это множество является искомым.

В самом деле, во-первых,

$$\mu(E \setminus E_\varepsilon) = \mu \bigcup_{k=k_0}^{\infty} Q_{m_k}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k-1} = 2^{-k_0} < \varepsilon \tag{16.17}$$

и, во-вторых, при $x \in E_\varepsilon$ будет $x \notin \bigcup_{k=k_0}^{\infty} Q_{m_k}\left(\frac{1}{k}\right)$ и для каждого $k \geqslant k_0$ существует такое m_k, что $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}$ при $n \geqslant m_k$, т.е. на E_ε имеет место равномерная сходимость. □

§ 3. Структура измеримых функций

Определение 16.6 *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ обладает C-**свойством Лузина** , если для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F_\varepsilon \subset E$ со свойствами*

1) $\mu(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$,

2) $f|_{F_\varepsilon}$ непрерывна на F_ε.

Упражнение 16.6

1) Если множество $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримо и $f \in C(E)$, то f обладает C-свойством Лузина.

2) Если $f : E \to \mathbb{R}$, $\mu E < \infty$, обладает C-свойством, то она измерима.

Доказательство. 2) По индукции легко построить последовательности замкнутых множеств $\{F_k\} \subset E$ со свойствами

$$F_k \subset E \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} F_i, \tag{16.18}$$

$$\mu\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i\right) < \frac{1}{2^k}, \quad f|_{F_k} \in C(F_k). \tag{16.19}$$

Положим $E_0 = E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, тогда $\mu E_0 = 0$ и при $\lambda \in \mathbb{R}$

$$E(f > \lambda) = E_0(f > \lambda) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i(f > \lambda)\right) \tag{16.20}$$

и все множества справа измеримы. □

Более важным является то, что в предположении $\mu E < \infty$ верно обратное утверждение (см. ниже теорему 16.6).

Лемма 16.1 *Если $E \subset \mathbb{R}^d$ — измеримое множество, $\mu E < \infty$, то простая функция на E обладает C-свойством.*

Доказательство. Пусть $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \cap E_m = \varnothing\, (n \neq m)$ и $f(x) = a_n$ при $x \in E_n\, (n \geqslant 1)$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и для каждого n найдем $F_n \subset E_n$ так, что $\mu F_n > \mu E_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Затем найдем m так, чтобы $\sum_{n=m+1}^{\infty} \mu E_n < \frac{\varepsilon}{2}$ и положим $F_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{m} F_n$. Тогда

$$E \setminus F_\varepsilon = \left(\bigcup_{n=1}^{m} (E_n \setminus F_n)\right) \cup \left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n\right).$$

Легко видеть, что $\mu(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Кроме того, так как F_n попарно не пересекаются, то из непрерывности f на F_n следует непрерывность f на $\bigcup_{n=1}^{m} F_n = F_\varepsilon$. В самом деле, если $x \in F_\varepsilon$, то $x \in F_k$ при некотором $k = 1, \ldots, n$. Так как $F_\varepsilon \setminus F_k$ замкнуто, то в некоторой окрестности U_x точки x нет точек из $F_\varepsilon \setminus F_k$. Следовательно, f постоянна в $U_x \cap F_\varepsilon$. □

Лемма 16.2 *Для любой функции $f \in M(E)$ существует последовательность простых функций $f_n \in S(E)$, равномерно сходящаяся к f.*

Доказательство. Положим

$$E_n^i = E\left(\frac{i-1}{n} \leqslant f < \frac{i}{n}\right),\ i \in \mathbb{Z}$$

Эти множества измеримы, попарно не пересекаются и $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} E_n^i = E$. Положим

$$f_n(x) \equiv \frac{i-1}{n}, \quad x \in E_n^i \quad (i \in \mathbb{Z})$$

Тогда f_n — простая функция и $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ Для всех $x \in E$. □

Теорема 16.6 (Н.Н.Лузин) *Если $f \in M(E)$, $\mu E < \infty$, то f обладает C-свойством.*

Доказательство. Используя лемму 16.2, найдем последовательность простых функций $\{f_n\}$, равномерно сходящуюся к f. По лемме 16.1, для любого n найдем замкнутое множество $F_n \subset E$ так, что

$$\mu(E \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \quad f_n|_{F_n} \in C(F_n).$$

и положим $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Тогда $F \subset E$ — замкнутое множество и

$$\mu(E \setminus F) = \mu \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus F_n) < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon$$

$f \in C(F)$ как равномерный предел функций, непрерывных на F.□

§ 4. Интеграл Лебега по множеству конечной меры

Всюду в этом параграфе $E \subset \mathbb{R}^d$ — измеримое множество и $\mu E < \infty$.

4.1. Интеграл для простой функции

Рассмотрим простую функцию

$$f(x) \equiv a_k, \quad x \in E_k,$$

причем E_k измеримы, $E_k \cap E_i = \varnothing$, $(k \neq i)$, $\bigcup_k E_k = E$.

Определение 16.7 *Если ряд $\sum_k a_k \mu E_k$ сходится абсолютно, то его сумма называется **интегралом Лебега** функции f по множеству E и обозначается*

$$\int_E f\, d\mu = \sum_k a_k \mu E_k$$

*Функция f в таком случае называется **суммируемой на** E*

Нам необходимо показать корректность такого определения — независимость от записи простой функции в указанном виде.

Рассмотрим представление простой функции в виде (16.3), где a_k попарно различны и пусть

$$f(x) = a'_i, \quad x \in A_i$$

другое представление f. Тогда обозначим

$$A_k = \{i : a'_i = a_k\}$$

и, очевидно, имеем

$$E_k = \bigcup_{i \in A_k} A_i; \ \mu E_k = \sum_{i \in A_k} \mu A_i$$

Следовательно

$$\sum_i |a'_i| \mu A_i = \sum_k |a_k| \sum_{i \in A_k} \mu A_i = \sum_k |a_k| \mu E_k$$

и крайние ряды сходятся или расходятся одновременно.

Кроме того, из тех же соображений,

$$\sum_i a'_i \mu A_i = \sum_k a_k \mu E_k$$

и корректность доказана.

Упражнение 16.7

1) Если простые функции f, g суммируемы на E, то $\alpha f + \beta g$ также суммируема на E и

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu + \beta \int_E g\, d\mu.$$

2) Если простая функция f ограничена на E, то она суммируема на E и при $|f(x)| \leqslant M$ на E

$$\left| \int_E f\, d\mu \right| \leqslant M\mu E.$$

3) $f(x) = k$, $x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ $(k \in \mathbb{N})$ не является суммируемой.

4) $f(x) = \sqrt{k}$, $x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ $(k \in \mathbb{N})$ суммируема.

Доказательство. 1) Если $f(x) \equiv a_k^1$ на E_k^1, $g(x) \equiv a_i^2$ на E_i^2; то $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \equiv \alpha \cdot a_k^1 + \beta \cdot a_i^2$ на $E_k^1 \cap E_i^2$

Поэтому

$$\sum_k \sum_i (\alpha \cdot a_k^1 + \beta \cdot a_i^2)\mu(E_k^1 \cap E_i^2) =$$

$$= \alpha \sum_k a_k^1 \cdot \sum_i \mu(E_k^1 \cap E_i^2) + \beta \sum_i a_i^2 \sum_k \mu(E_k^1 \cap E_i^2) =$$

$$= \alpha \sum_k a_k^1 \mu E_k^1 + \beta \sum_i a_i^2 \mu E_i^2 = \alpha \int_E f\, d\mu + \beta \int_E g\, d\mu. \square$$

4.2. Определение интеграла в общем случае

Определение 16.8 *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется* ***суммируемой на*** *E, если существует последовательность суммируемых простых функций $\{f_n\}$, равномерно сходящихся к f. Предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, dx \tag{16.21}$$

называется тогда ***интегралом Лебега*** *для f по E.*

Класс функций, суммируемых на E обозначаем $L(E)$.

В определении интеграла неявно участвуют некоторые интегральные суммы. Достаточно вспомнить лемму 16.2, которая дает явную конструкцию последовательности простых функций, равномерно сходящуюся к f. На самом деле

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{i}{n} \mu E\left(\frac{i-1}{n} \leqslant f < \frac{i}{n}\right),$$

и определение 16.8 является конструктивным.

4.3. Корректность определения интеграла

Снова надо устанавливать корректность определения.

Во-первых, предел (16.21) обязательно существует. Пусть при $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = a_n^k, \quad x \in E_n^k \quad (k, n \geqslant 1)$$

где

$$E_n^k \cap E_n^i = \varnothing, \quad (k \neq i), \quad E = \bigcup_k E_n^k.$$

Тогда $f_n - f_m$ — простая функция для любых $n, m \geqslant 1$, причем

$$f_n(x) - f_m(x) = a_n^k - a_m^i, \quad x \in E_{nm}^{ki} = E_n^k \cap E_m^i \quad (i, k \geqslant 1).$$

Так как

$$E_n^k = \bigcup_i E_{nm}^{ki},$$

то в силу счетной аддитивности меры Лебега

$$\mu E_n^k = \sum_i \mu E_{nm}^{ki}.$$

Следовательно, по определению 16.7

$$\left| \int_E f_n \, d\mu - \int_E f_m \, d\mu \right| = \left| \sum_k a_n^k \mu E_n^k - \sum_i a_m^i \mu E_m^i \right| =$$

$$\left| \sum_k a_n^k \sum_i \mu E_{nm}^{ki} - \sum_i a_m^i \sum_k \mu E_{nm}^{ki} \right| =$$

$$= \left| \sum_i \sum_k \left(a_n^k - a_m^i \right) \mu E_{nm}^{ki} \right| \leqslant \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \sum_i \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_{nm}^{ki} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \sum_{i1} \mu E_m^i = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \mu E \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

(изменение порядка суммирования возможно в силу абсолютной сходимости рядов).

Далее, этот предел не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$ (надо смешать две последовательности).

Наконец, для простых функций новое определение совпадает со старым (достаточно рассмотреть стационарную последовательность).

4.4. Простейшие свойства интеграла

Прежде всего отметим, что суммируемая функция обязательно измерима, то есть $L(E) \subset M(E)$ (см. теорему 16.2).

Упражнение 16.8
1) $\int_E 1 \cdot d\mu = \mu E$.
2) Если $\mu E = 0$, то $\int_E f\, d\mu = 0$.
3) Ограниченная измеримая функция суммируема;
4) Если f суммируема и $f(x) \geqslant 0$, то

$$\int_E f\, d\mu \geqslant 0.$$

5) Если $f \in M(E)$, то f и $|f|$ суммируемы на E или нет одновременно.

Теорема 16.7 (свойства интеграла Лебега)
1) Если $f, g \in L(E)$, то $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in L(E)$ и

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu + \beta \int_E g\, d\mu$$

(линейность).
2) Если $f, g \in L(E)$ и $f(x) \leqslant g(x)$ на E, то

$$\int_E f\, d\mu \leqslant \int_E g\, d\mu.$$

(монотонность).
3) Если $f \in M(E)$ ограничена и $m_f = \inf f(E)$, $m_f = \sup f(E)$, то

$$m_f \cdot \mu E \leqslant \int_E f\, d\mu \leqslant M_f \cdot \mu E.$$

4) Если $f \in M(E)$, $\varphi \in L(E)$, $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, то $f \in L(E)$ и

$$\left| \int_E f\, d\mu \right| \leqslant \int_E \varphi\, d\mu.$$

§ 5. Интеграл Лебега как функция множества

Всюду в этом параграфе $E \subset \mathbb{R}^d$ — измеримое множество и $\mu E < \infty$.

Упражнение 16.9
1) Если $f \in L(E)$ и $A \subset E$ — измеримо, то $f \in L(A)$.

2) Если $f \in L(E)$ и $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то

$$\int_E f\,d\mu = \int_{E_1} f\,d\mu + \int_{E_2} f\,d\mu$$

(аддитивность интеграла Лебега).

3) Если $f \in L(E)$ и $g \sim f$, то $g \in L(E)$ и

$$\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$$

Доказательство. 1) Для простой функции это следует из неравенства

$$\sum_k |a_k|\mu(A \cap E_k) \leqslant \sum_k |a_k|\mu E_k$$

(если $f(x) = a_k$ на E_k). В общем случае следует из определения 16.8 и того, что $f \in L(E)$.

2) Очевидно для простых функций и получается предельным переходом в общем случае. □

Теорема 16.8 (σ-аддитивность интеграла Лебега)
1) Пусть

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,\ E_k \cap E_i = \varnothing \quad (k \neq i)$$

и все E_k измеримы. Пусть также $f \in L(E_k)$ ($k \in \mathbb{N}$).

Тогда следующие условия равносильны

i) $f \in L(E)$,

ii) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f|\,d\mu$ сходится.

2) Если $f \in L(E)$, то

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f\,d\mu.$$

Доказательство. Докажем сначала утверждение теоремы для простых функций. Пусть $f(x) \equiv a_i$ на A_i ($i \geqslant 1$). Тогда

$$\int_E |f|\,d\mu = \sum_i |a_i|\mu A_i = \sum_i |a_i| \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_i |a_i|\mu(A_i \cap E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f|\,d\mu,$$

причем это верно как "слева направо", так и наоборот. Это доказывает 1). Это же равенство без модуля дает и 2) для простых функций.

В общем случае 1) получается так. Если $f_n \in L(E)$ — последовательность простых функций, равномерно сходящаяся к f, то

$$\int_E |f_n|\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f_n|\,d\mu \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k} |f_n|\,d\mu.$$

Пусть теперь $n \to \infty$

$$\int_E |f|\,d\mu \geqslant \sum_{k}^{m} \int_{E_k} |f|\,d\mu$$

и мы доказали $i) \Longrightarrow ii)$.

Обратно, пусть ряд $\sum_k \int_{E_k} |f|\,d\mu$ сходится и последовательность простых функций $\{f_n\}$, равномерно сходится к f. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f_n|\,d\mu \leqslant \mu E \sup_E |f - f_n| + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f|\,d\mu$$

Поэтому $f_n \in L(E)$ и по определению 16.8 $f \in L(E)$.

2) Если $f \in L(E)$ и f_n — последовательность простых функций, равномерно сходящаяся к f, то

$$\left|\int_E f\,d\mu - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f\,d\mu\right| \leqslant \left|\int_E (f_n - f)\,d\mu\right| + \left|\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} (f_n - f)\,d\mu\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \cdot \mu E \sup_E |f - f_n| \to 0 \quad (n \to \infty).\square$$

Упражнение 16.10

1) Если $f \in L(E)$, $f(x) \geqslant 0$ и $\int_E f\,d\mu = 0$, то $f \sim 0$.

2)

3)

Теорема 16.9 (свойство абсолютной непрерывности) *Если $f \in L(E)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого измеримого подмножества $A \subset E$ из $\mu A < \delta$ вытекает неравенство*

$$\int_A |f|\,d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $E_k = E(k - 1 \leqslant |f| < k)$, $k = 1, 2, \ldots$ и пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} f, \text{ на } \bigcup_{k=1}^{n} E_k \\ 0, \text{ на } \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k \end{cases}$$

тогда $|f_n(x)| \leqslant n$ и

$$\int_A |f|\,d\mu \leqslant \int_E |f - f_n|\,d\mu + \int_A |f_n|\,d\mu = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{E_k} |f|\,d\mu + n \cdot \mu A$$

Возьмем n так, чтобы первое слагаемое не превосходило $\frac{\varepsilon}{2}$, тогда можно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. $\square$

5.1. Меры, порожденные суммируемыми функциями

Если функция f неотрицательна и $f \in L(E)$, то

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$$

обладает основными свойствами меры: неотрицательность, монотонность и σ-аддитивность, она определена на классе всех измеримых подмножеств E. При этом из $\mu A = 0$ следует $\nu(A) = 0$.

Конечно, в частном случае $f(x) = 1$ $(x \in E)$, получаем

$$\mu E = \int_E d\mu.$$

§ 6. Предельный переход под знаком интеграла Лебега

6.1. Теоремы о мажорируемой и ограниченной сходимости

Теорема 16.10 (Лебег) *Пусть последовательность измеримых функций $\{f_n\} \subset M(E)$ удовлетворяет условиям*

1)$f_n \overset{\mu}{\to} f$,

2) $\exists \varphi \in L(E)$ $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ почти всюду на E.

Тогда $f \in L(E)$ и

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$$

Доказательство. Ясно, что $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ почти всюду на E (это вытекает из теоремы 16.4).

Далее

$$\left|\int_E f\, d\mu - \int_E f_n\, d\mu\right| \leqslant \int_{E(|f-f_n|\leqslant\sigma)} |f - f_n|\, d\mu + 2\int_{E(|f-f_n|>\sigma)} \varphi\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \sigma \cdot \mu E + 2\int_{E(|f-f_n|>\sigma)} \varphi\, d\mu.$$

Возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{2\mu E}$, тогда при больших n $\mu E(|f_n - f| > \sigma) < \delta$ (из свойства абсолютной непрерывности — теорема 16.9) и второе слагаемое справа не превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$. $\square$

Теорема называется обычно "теоремой Лебега о мажорируемой сходимости". В частности, из теоремы вытекает следствие, носящее название "теорема Лебега об ограниченной сходимости".

Следствие 16.1 (Лебег) *Пусть последовательность* $\{f_n\} \subset M(E)$ *удовлетворяет условиям*

1) $f_n \xrightarrow{\mu} f$

2) $\exists\, M\ \forall\, n\ \forall\, x \in E \quad |f_n(x)| \leqslant M$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu.$$

6.2. Теорема о монотонной сходимости

Теорема 16.11 (Леви, о монотонной сходимости) *Пусть* $f_n \in L(E)$ $(n \in \mathbb{N})$ *и*

1) $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ $(n \in \mathbb{N},\ x \in E)$,

2) $\int_E f_n\, d\mu \leqslant M$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *существует почти всюду,* $f \in L(E)$ *и*

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$$

Доказательство. Можно считать, что $f_1(x) \geqslant 0$ (иначе будем рассматривать $f_n - f_1$ вместо f_n).

Если $f(x) = +\infty$ при $x \in A \subset E$, $\mu A > 0$, то $\frac{1}{f_n(x)} \to 0$ при $x \in A$ и по теореме Егорова 16.5 эта сходимость равномерная на некотором подмножестве $A_1 \subset A$, $\mu A_1 > 0$, то есть

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon \quad \forall\, x \in A_1 \quad \frac{1}{f_n(x)} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$M \geqslant \int_E f_n\, d\mu \geqslant \int_{A_1} f_n\, d\mu \geqslant \frac{\mu A_1}{\varepsilon}.$$

Итак, $M\varepsilon \geqslant \mu A_1 > 0$ при любом $\varepsilon > 0$, что невозможно.

Обозначим

$$E_k = E(k-1 \leqslant f < k), \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Тогда множества E_k измеримы, попарно не пересекаются и $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Запишем для любого $m \in \mathbb{N}$ неравенство

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{m} E_k} f_n\, d\mu \leqslant \int_E f_n\, d\mu \leqslant M.$$

Так как $0 \leqslant f_n(x) \leqslant m$ при $x \in \bigcup_{k=1}^m E_k$, то в нем можно перейти к пределу при $n \to \infty$ (см. следствие 16.1)

$$\sum_{k=1}^m \int_{E_k} f\,d\mu = \int_{\bigcup_{k=1}^m E_k} f\,d\mu \leqslant M$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f\,d\mu$$

сходится и $f \in L(E)$ по теореме 16.8.

Доказательство заканчивается применением теоремы 16.10 о мажорируемой сходимости. $\square$

Следствие 16.2 *Если* $\{f_k\} \subset L(E)$, $f_k(x) \geqslant 0$, *и*

$$\sum_{k=1}^\infty \int_E f_k\,d\mu < \infty,$$

то ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ *сходится почти всюду и*

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^\infty f_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_E f_k\,d\mu.$$

6.3. Теорема Фату

Теорема 16.12 (Фату) *Если* $\{f_n\} \subset L(E)$, $f_n(x) \geqslant 0$, *сходится почти всюду к* f,

$$\exists\, M\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \int_E f_n\,d\mu \leqslant M,$$

то $f \in L(E)$ *и*

$$\int_E f\,d\mu \leqslant M.$$

Доказательство. Положим

$$\varphi_n(x) = \inf_{k \geqslant n} f_k(x),$$

тогда $\varphi_n \in M(E)$, $\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$. Можно применять теорему 16.11. $\square$

На самом деле тем же способом можно доказать больше.

Упражнение 16.11

1) Если последовательность $\{f_n\} \subset L(E)$, $f_n(x) \geqslant 0$,

$$\exists\, M\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \int_E f_n\,d\mu \leqslant M,$$

то
$$\int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

2) Если $\{f_n\} \subset L(E)$ и $\sup_n |f_n| \in L(E)$, то

$$\int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_E f_n\,d\mu \leqslant \int_E \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n\,d\mu.$$

6.4. Сравнение интегралов Римана и Лебега

Сейчас мы будем рассматривать интегралы Римана и Лебега одновременно. Чтобы их различать, введем обозначения

$$(R)\int_E f\,dx, \quad (L)\int_E f\,d\mu.$$

Теорема 16.13 *Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Жордану, $f \in R(E)$. Тогда $f \in L(E)$ и*

$$(R)\int_E f\,dx = (L)\int_E f\,d\mu.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность вложенных разбиений множества E

$$\Pi_n = \left\{E_1^n, \ldots, E_{N_n}^n\right\}, \quad \lambda(\Pi_n) \to 0,$$

положим

$$m_k^n = \inf f(E_k^n), \quad M_k^n = \sup f(E_k^n)$$

и

$$\varphi_n(x) \equiv m_k^n, \quad \Phi_n(x) \equiv M_k^n \quad (x \in E_k^n).$$

Тогда $\varphi_n, \Phi_n \in S(E)$, $\varphi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \Phi_n(x)$ и

$$S_*(\Pi_n) = (L)\int_E \varphi_n\,d\mu, \quad S^*(\Pi_n) = (L)\int_E \Phi_n\,d\mu$$

По критерию интегрируемости по Риману (теорема 13.1)

$$0 = \lim_{n\to\infty}(S^*(\Pi_n) - S_*(\Pi_n)) = \lim_{n\to\infty}(L)\int_E (\Phi_n - \varphi_n)\,d\mu$$

Ясно, что $\varphi_n(x)\uparrow$, $\Phi_n(x)\downarrow$, поэтому существуют пределы

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \lim_{n\to\infty}\Phi_n(x) = \Phi(x)$$

По теореме Лебега об ограниченной сходимости (следствие 16.1)

$$\int_E (\Phi - \varphi)\,d\mu = 0,$$

следовательно, $\Phi(x) = \varphi(x) = f(x)$ почти всюду (см. упражнение 16.10.1)). Поэтому $f \in M(E)$

$$S_*(\Pi_n) = \sum_{k=1}^{N_n} m_k^n \mu E_k^n \leqslant \sum_{k=1}^{N_n} (L) \int_{E_k^n} f\, d\mu = (L) \int_E f\, d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{N_n} M_k^n \mu E_k^n = S^*(\Pi_n).$$

Крайние части сходятся к интегралу Римана, средняя равна интегралу Лебега и

$$(R) \int_E f\, dx = (L) \int_E f\, d\mu. \square$$

§ 7. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры

Рассмотрим определение интеграла Лебега по множеству бесконечной меры. Начнем с неотрицательных функций.

Определение 16.9 *Последовательность измеримых множеств* $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^d$ *называется* ***исчерпывающей*** *, если*

$$A_n \subset A_{n+1}, \quad \mu A_n < \infty, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}^d$$

Определение 16.10 *Пусть функция* $f \in M(E)$, $f(x) \geqslant 0$, *суммируема на каждом измеримом* $A \subset E$, $\mu A < \infty$.

Пусть $\{A_n\}$ *— исчерпывающая последовательность. Тогда предел*

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap A_n} f\, d\mu \qquad (16.22)$$

называется ***интегралом Лебега*** f *по* E. *Если он конечен, то* f *называется* ***суммируемой*** *на* E *(краткая запись —* $f \in L(E)$*).*

Упражнение 16.12 (корректность определения интеграла)

1) Предел (16.22) существует, либо $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{E\cap A_n} f\, d\mu = +\infty$.

2) Предел (16.22) не зависит от выбора $\{A_n\}$.

3) Если $\mu E < \infty$ и $f \in M(E)$, $f(x) \geqslant 0$, то новое определение 16.10 интеграла совпадает со старым.

Доказательство. 2) В самом деле, если $\{B_m\}$ — другая исчерпывающая последовательность, то,полагая $A_0 = \varnothing$, получим

$$B_m = B_m \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = B_m \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k-1})\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_m \cap (A_k \setminus A_{k-1}))$$

и множества справа не пересекаются. Потому в силу σ-аддитивности

$$\int_{B_m} f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_m \cap (A_k \setminus A_{k-1})} f\,d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{B_m \cap (A_k \setminus A_{k-1})} f\,d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k \setminus A_{k-1}} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\,d\mu$$

Итак, $\lim\limits_{m\to\infty} \int_{B_m} f\,d\mu \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \int_{A_n} f\,d\mu$. Меняя A_n и B_m местами, получим противоположное неравенство.$\square$

Положим

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}\,, \quad f^-(x) = f^+ - f.$$

Определение 16.11 *Функция $f \in M(E)$ называется* ***суммируемой*** *на E, если $f^\pm \in L(E)$. Интегралом Лебега для f по E называется*

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu$$

Упражнение 16.13

1) Если $\mu E = 0$, то $\int_E f\,d\mu = 0$.

2) Ограниченная измеримая функция не обязана быть суммируемой на множестве бесконечной меры. В частности, если $f(x) \equiv c \neq 0$ на E, $\mu E = +\infty$, то $f \notin L(E)$.

3) Если f суммируема и $f(x) \geqslant 0$, то

$$\int_E f\,d\mu \geqslant 0.$$

4) Если $f \in L(E)$ и $A \subset E$ — измеримо, то $f \in L(A)$.

5) Если $f \in L(E)$ и $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то

$$\int_E f\,d\mu = \int_{E_1} f\,d\mu + \int_{E_2} f\,d\mu$$

(аддитивность).

6) Если $f \in L(E)$ и $g \sim f$, то $g \in L(E)$ и

$$\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$$

Теорема 16.14 (свойства интеграла Лебега)

1) Если $f, g \in L(E)$, $f(x) \leqslant g(x)$, то

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$$

(монотонность).

2) Если $f, g \in L(E)$, то $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in L(E)$ и

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu + \beta \int_E g\, d\mu$$

(линейность).

3) Если $f \in M(E)$, $\varphi \in L(E)$ и $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, то $f \in L(E)$.

4) Функция $f \in M(E)$ суммируема тогда и только тогда, когда $|f| \in L(E)$.

Теорема 16.15 *Теоремы 16.8–16.12 о σ-аддитивности, абсолютной непрерывности, Лебега, Фату и Леви сохраняют силу для множеств бесконечной меры.*

Доказательство. 1) σ-аддитивность достаточно доказать для неотрицательных функций. В силу монотонности

$$\int_E f\, d\mu \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f\, d\mu$$

и $n \to \infty$.

Чтобы получить обратное неравенство, возьмем исчерпывающую последовательность $\{A_n\}$, тогда

$$\int_{E \cap A_n} f\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k \cap A_n} f\, d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f\, d\mu$$

и $n \to \infty$.

2) Абсолютная непрерывность доказывается точно также, как и раньше.

3) Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем измеримое множество $E_\varepsilon \subset E$ с $\mu E_\varepsilon < \infty$ и

$$\int_{E \setminus E_\varepsilon} \varphi\, d\mu < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left| \int_E f_n\, d\mu - \int_E f\, d\mu \right| \leqslant 2 \int_{E \setminus E_\varepsilon} \varphi\, d\mu + \left| \int_{E_\varepsilon} f_n\, d\mu - \int_{E_\varepsilon} f\, d\mu \right| < 3\varepsilon$$

при достаточно больших n.

4) Теорема Леви доказывается, так же, как и теорема Лебега.

5) Теорема Фату доказывается точно так же, как и раньше. □

Упражнение 16.14

1) Функция $f_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$ $(x \in \mathbb{R}^d, |x| < 1)$, суммируема тогда и только тогда, когда $\alpha < d$.

2) Функция $f_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$ $(x \in \mathbb{R}^d, |x| > 1)$, суммируема тогда и только тогда, когда $\alpha > d$.

3) Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Лебегу, $\mu E < +\infty$, $f \in M(E)$. Тогда следующие условия равносильны

i) $f \in L(E)$,

ii) ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \mu E\big(2^{k+1} \geqslant f > 2^k\big)$ сходится,

iii) ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \mu E\big(f > 2^k\big)$ сходится.

3) Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Лебегу, $f \in M(E)$. Тогда следующие условия равносильны

i) $f \in L(E)$,

ii) ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \mu E\big(2^{k+1} \geqslant f > 2^k\big)$ сходится,

iii) ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \mu E\big(f > 2^k\big)$ сходится.

Для интеграла Лебега справедлив аналог теоремы 13.6, которую мы приведем здесь без доказательства.

Теорема 16.16 (замена переменной) *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $\varphi : G \to \mathbb{R}^d$ — диффеоморфизм.*

Тогда для любого компакта $K \subset G$ образ $\varphi(K)$ измерим по Лебегу и для любой функции $f \in L(\varphi(K))$ справедливо равенство

$$\int_{\varphi(K)} f \, d\mu = \int_K (f \circ \varphi) \cdot |\mathbf{J}\varphi| \, d\mu. \tag{16.23}$$

§ 8. Интегралы, зависящие от параметра

Мы будем заниматься изучением свойств функций вида

$$I(y) = \int_X f(x, y) \, d\mu(x), \tag{16.24}$$

где $X \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $y \in Y$ (Y — множество). При этом, как и в § 6 главы 10, нас будут интересовать такие свойства этих функций, как непрерывность дифференцируемость и интегрируемость.

8.1. Теорема Фубини

Здесь мы рассмотрим вопрос, аналогичный изученному в § 2 главы 13 — как вычислить интеграл Лебега по декартовому произведению, используя интегрирование по проекциям. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 16.17 (Фубини) *Пусть множества $X \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $Y \subset \mathbb{R}^{d_2}$ измеримы по Лебегу, тогда*

1) произведение $X \times Y \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ измеримо по Лебегу, *2) если $f \in L(X \times Y)$, то для почти всех $y \in Y$ функция $x \to f(x, y)$ принадлежит $L(X)$, функция $y \to \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ принадлежит $L(Y)$ и справедливо равенство*

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\, d\mu(x, y) = \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y). \tag{16.25}$$

Обратим внимание на весьма широкие требования (по сравнению с леммой 13.1), при которых справедливо (16.25).

Далее, при условиях теоремы 16.17 справедливо равенство

$$\int_Y \left(\int_X f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x).$$

Это следует из того, что множества X и Y входят в условия теоремы равноправно.

В частности, теорема 16.17 дает условия, при которых функция (16.24) является суммируемой.

8.2. Непрерывность интеграла от параметра

Теорема 16.18 *Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Лебегу, Y топологическое пространство, $y_0 \in Y$ и функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям*

1) для любого $y \in Y$ функция $x \to f(x, y)$ суммируема на X,

2) существует такая функция $\varphi \in L(X)$, что для каждого $y \in Y$ выполнено неравенство $|f(x, y)| \leqslant \varphi(x)$ (для почти всех $x \in X$),

3) $f(x, y)$ при $y \to y_0$ сходится к $f(x, y_0)$ по мере, то есть

$$\forall \sigma > 0 \quad \lim_{y\to y_0} \mu\{x \in X : |f(x, y) - f(x, y_0)| > \sigma\} \quad 0.$$

Тогда интеграл (16.24) непрерывен в точке y_0.

Доказательство. Возьмем любую последовательность $Y \ni y_n \to y_0$. Тогда равенство

$$\lim_{n\to\infty} I(y_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X f(x, y_n)\, d\mu(x) = \int_X f(x, y_0)\, d\mu(x) = I(y_0)$$

обеспечивается теоремой Лебега о мажорируемой сходимости (теорема 16.10). Наше утверждение вытекает теперь из критерия Гейне предела функции (теорема 2.15). □

Упражнение 16.15

1) Условие 3) теоремы 16.18 выполнено, если для почти всех $x \in X$ функция $y \to f(x, y)$ непрерывна в точке $y_0 \in Y$.

2) Пусть $\mu X < +\infty$. Тогда условия 2) и 3) теоремы 16.18 выполнены, если $f(x, y)$ сходится к $f(x, y_0)$ при $y \to y_0$ равномерно на множестве X.

8.3. Дифференцируемость интеграла по параметру

Теорема 16.19 *Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Лебегу, $Y \subset \mathbb{R}^1$ — открытое множество, $y_0 \in Y$, функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям*

1) для любого $y \in Y$ функция $x \to f(x, y)$ суммируема на X,

2) для почти всех $x \in X$ существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)$,

3) существует такая функция $\varphi \in L(X)$, что для каждого y из некоторой проколотой окрестности точки y_0 выполнено неравенство

$$\left| \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} \right| \leqslant \varphi(x)$$

(для почти всех $x \in X$).

Тогда интеграл (16.24) имеет производную в точке y_0 и

$$I'(y_0) \quad \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) d\mu(x).$$

Доказательство. Доказательство такое же, как и в предыдущей теореме. □

Упражнение 16.16 Условия 1)–3) теоремы 16.19 можно заменить на следующие:

1) для любого $y \in Y$ из некоторой окрестности точки y_0 почти всюду на X существует производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$,

2) существует такая функция $\varphi \in L(X)$, что для каждого y из некоторой проколотой окрестности точки y_0 выполнено неравенство

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leqslant \varphi(x)$$

(для почти всех $x \in X$),

3) для почти всех $x \in X$ производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывна в точке y_0.

Тогда ее утверждение сохраняет силу.

Глава 17

Введение в гармонический анализ

§ 1. Пространства суммируемых функций

1.1. Определение пространств L^p

Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Лебегу и $\mu E > 0$. Напомним (см. определение 16.4), что $M(E)$ обозначает класс всех функций, измеримых по Лебегу. В дальнейшем нам будет удобно не различать эквивалентные функции. Обозначим $Z(E)$ класс функций из $M(E)$, эквивалентных нулю и рассмотрим фактор-пространство $M(E)/Z(E)$ (его элементами являются классы функций — две функции попадают в один класс тогда и только тогда, когда они эквивалентны) и введем для него обозначение $\mathcal{M}(E)$. Другими словами, переход от $M(E)$ к $\mathcal{M}(E)$ и означает, что эквивалентные функции нами не различаются. Об элементах $\mathcal{M}(E)$ мы также будем говорить как об измеримых функциях, подразумевая под этим, конечно, класс эквивалентных функций. Интегралом Лебега элемента $f \in \mathcal{M}(E)$ будем называть интеграл Лебега любого представителя из f. При этом совершенно безразлично, какой именно элемент класса эквивалентности будет выбран нами для работы.

Определение 17.1 *Для $p \geqslant 1$ определим $L^p(E)$ как множество функций $f \in \mathcal{M}(E)$, для которых*

$$\int_E |f|^p \, d\mu < +\infty.$$

Нам понадобятся некоторые свойства интегралов, определяющих $L^p(E)$.

1.2. Неравенства Гельдера и Минковского для интегралов

Неравенства (4.30) и (4.32) (см. также обозначение сопряженного показателя (4.29)) имеют аналоги для интегралов, которые доказываются тем же способом.

Теорема 17.1 (неравенство Гельдера) *Пусть $p > 1$. Тогда для любых $f \in L^p(E)$, $g \in L^{p'}(E)$ справедливо неравенство*

$$\int_E fg \, d\mu \leqslant \left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^{p'} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}. \qquad (17.1)$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство (17.1) при дополнительном предположении

$$X = \left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 1, \quad Y = \left(\int_E |g|^{p'} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} = 1. \tag{17.2}$$

Запишем неравенство Юнга (4.28) при $n = 2$, $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{p'}$

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p'}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{p'},$$

возьмем здесь $a = |f|^p$ и $b = |g|^{p'}$ и проинтегрируем полученное неравенство

$$\int_E |fg| \, d\mu \leqslant \frac{1}{p} \int_E |f|^p \, d\mu + \frac{1}{p'} \int_E |g|^{p'} \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

в силу (17.2).

Чтобы избавиться от предположения (17.2), надо применить уже доказанный случай к функциям $\frac{f}{X}$ и $\frac{g}{Y}$ (для них условие (4.31) выполнено). $\square$

Следующее утверждение показывает, что неравенство Гельдера (17.1) является точным.

Теорема 17.2 *Для любой функции справедливо равенство*

$$\left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \sup\left\{\int_E |fg| \, d\mu : g \in L^{p'}(E), \quad \int_E |g|^{p'} \, d\mu \leqslant 1\right\}. \tag{17.3}$$

Доказательство. То, что правая часть в (17.3) не превосходит левой следует непосредственно из неравенства Гельдера (17.1).

Для доказательства противоположного неравенства положим (сохраняя обозначение из (17.2))

$$g = |f|^{p-1} X^{1-p} \operatorname{sign} f.$$

Тогда

$$\int_E |g|^{p'} \, d\mu = X^{-p'(1-p)} \int_E |f|^{p'(p-1)} \, d\mu = X^{-p'(1-p)+p} = 1$$

и

$$\int_E |fg| \, d\mu = X^{1-p} \int_E |f||f|^{p-1} \, d\mu = X^{1-p} X^p = X. \square$$

Теорема 17.3 (неравенство Минковского) *Пусть $p \geqslant 1$. Тогда для любых $f, g \in L^p(E)$ справедливо неравенство*

$$\left(\int_E |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{17.4}$$

Доказательство. При $p = 1$ доказательство сразу следует из неравенства треугольника.

Пусть $p > 1$. Сначала преобразуем выражение

$$S = \int_E |f+g|^p \, d\mu = \int_E |f+g|^{p-1} |f+g| \, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int_E |f||f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_E |g||f+g|^{p-1} \, d\mu,$$

а затем применим к каждому слагаемому неравенство (17.1):

$$S \leqslant \left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_E |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Теперь надо вынести за скобки общий множитель справа и разделить на него обе части неравенства. □

1.3. Обобщенное неравенство Минковского

Теорема 17.4 *Пусть множества $E_k \subset \mathbb{R}^{d_k}$ $(k = 1, 2)$ измеримы по Лебегу, $f \in L^p(E_1 \times E_2)$, $p \geqslant 1$. Тогда*

$$\left(\int_{E_2} \left[\int_{E_1} |f(x,y)| \, d\mu(x)\right]^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_{E_1} \left[\int_{E_2} |f(x,y)|^p \, d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p}} d\mu(x)$$

Доказательство. Пусть функция $g \in L^{p'}(E_2)$ такова, что

$$\left(\int_{E_2} |g|^{p'} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant 1.$$

Тогда по теореме Фубини 16.17

$$\int_{E_2} |g(y)| \int_{E_1} |f(x,y)| \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \int_{E_1} \int_{E_2} |f(x,y)||g(y)| \, d\mu(y) \, d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |g(y)|^{p'} \, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{E_2} |f(x,y)|^p \, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x,y)|^p \, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x)$$

в силу неравенства Гельдера (17.1), примененного ко внутреннему интегралу. Осталось перейти к точной верхней грани по функциям g и использовать (17.3). □

1.4. Свойства пространств

Упражнение 17.1 Векторные операции в $L^p(E)$ индуцируются векторными операциями в $\mathcal{M}(E)$.

1) Показать, что $L^p(E)$ замкнуто относительно векторных операций.

2) Показать, что

$$\|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{17.5}$$

является нормой на $L^p(E)$.

3) $L^p(E)$ является линейным нормированным пространством.

4) Если $\mu E < \infty$, то $L^{p_1}(E) \subset L^{p_0}(E)$, $1 \leqslant p_0 < p_1$.

5) Для любых $1 \leqslant p_0 < p_1$ существует функция $f \in L^{p_0}(E) \setminus L^{p_1}(E)$.

6) Если $\mu E = \infty$, то для любых $1 \leqslant p_0 < p_1$ существует функция $f \in L^{p_1}(E) \setminus L^{p_0}(E)$.

7) Доказать неравенство Чебышева: если $f \in L^p(E)$, то для любого $\lambda > 0$

$$\mu\{|f| > \lambda\} \leqslant \lambda^{-p} \|f\|_p. \tag{17.6}$$

8) Если последовательность $\{f_n\}$ сходится в $L^p(E)$, то она сходится по мере.

Одним из важнейших свойств интеграла Лебега является то, что он обеспечивает справедливость следующего важного утверждения.

Теорема 17.5 *Пространство $L^p(E)$ является полным линейным нормированным пространством относительно нормы (17.5).*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в $L^p(E)$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

По индукции легко построить такую последовательность $\{n_k\}$, что

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p < 2^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

В силу следствия из теоремы Леви (см. следствие 16.2) ряд

$$|f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$$

сходится почти всюду, а тогда почти всюду сходится и ряд

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right)$$

Пусть f — сумма этого ряда. Так как $\{f_{n_k}\}$ — последовательность частичных сумм этого ряда, то почти всюду

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x).$$

Тогда, переходя к пределу при $i \to \infty$ под знаком интеграла

$$\|f_{n_k} - f_{n_i}\|_p = \left(\int_E |f_{n_k} - f_{n_i}|^p \, d\mu\right)^{1/p} < 2^{-k+1} \quad (i > k)$$

по теореме Фату 16.12 получим

$$\|f_{n_k} - f\|_p = \int_E |f_{n_k} - f|^p \, d\mu \leqslant 2^{-k+1}$$

Это означает, что $\|f_{n_k} - f\|_p \to 0$. Кроме того $\|f\|_p \leqslant \|f_{n_k} - f\|_p + \|f_{n_k}\|_p < \infty$, так что $f \in L^p(E)$.

Итак, последовательность $\{f_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$. Отсюда легко следует (покажите это), что $\|f_n - f\|_p \to 0$. $\Box$

1.5. Плотность класса непрерывных функций

Нам понадобится один вспомогательный факт, относящийся к любому метрическому пространству (X, d). Напомним, что расстоянием между элементом $x \in X$ и множеством $F \subset X$ называется

$$d(x, F) = \inf\{d(x, y) : y \in F\}\,.$$

Лемма 17.1 *Пусть $F \subset X$ — замкнутое множество. Тогда функция $x \to d(x, F)$ непрерывна на X.*

Доказательство. Покажем, что для любых $x, y \in X$ и справедливо неравенство

$$|d(x, F) - d(y, F)| \leqslant d(x, y),$$

из которого сразу следует утверждение леммы.

Для любого $z \in F$ в силу неравенства треугольника

$$d(x, F) \leqslant d(x, z) \leqslant d(y, z) + d(x, y)$$

Переходим здесь к точной нижней грани по $z \in F$

$$d(x, F) - d(y, F) \leqslant d(x, y)$$

Меняя ролями x и y, получаем требуемое. $\Box$

Отметим, что лемма верна и без предположения о замкнутости. Но фактически ее применяют только к замкнутым множествам, так как

$$d(x, F) = d(x, \overline{F}).$$

Носителем функции называется замыкание множества, где она отлична от нуля:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \tag{17.7}$$

Будем в дальнейшем использовать следующее стандартное обозначение: $C_0(X)$ — класс непрерывных функций на X с компактным носителем. Конечно, если X — компактно, то $C_0(X) = C(X)$.

Вернемся к пространствам $L^p(E)$.

Теорема 17.6 *Для любой функции $f \in L^p(E)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$, что*

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $E = \mathbb{R}^d$ (для рассмотрения общего случая, доопределим функцию нулем на дополнении к области определения и к новой функции применим уже доказанное), причем можно считать, что носитель функции содержится в некотором шаре $B = B(0, r)$, так как

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - f\chi_{B_r}|^p \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_r} |f|^p \, d\mu \to 0$$

при $r \to \infty$ (здесь для краткости $B_r = B(0, r)$).

Сначала докажем наше утверждение для характеристической функции ограниченного измеримого множества E.

По критерию измеримости (см. упражнение 12.4.2) найдем открытое множество G и замкнутое множество F так, чтобы

$$\mu(G \setminus F) < \varepsilon, \quad F \subset E \subset G$$

и положим

$$g(x) = \frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, F)}.$$

Тогда в силу леммы 17.1 $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ (знаменатель не обращается в нуль) и

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E - g|^p d\mu \leqslant \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

Отсюда сразу следует справедливость нашего утверждения для простых функций, носитель каждой из которых содержится в некотором шаре B.

Рассмотрим последовательность простых функций, построенную в лемме 16.2

$$f_n(x) \equiv \frac{i-1}{n}, \quad x \in E_n^i \quad (i \in \mathbb{Z})$$

где

$$E_n^i = B\left(\frac{i-1}{n} \leqslant f < \frac{i}{n}\right), i \in \mathbb{Z}.$$

Для нее справедливо

$$\int_B |f - f_n|^p \, d\mu = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{E_n^i} \left| f - \frac{i-1}{n} \right|^p \, d\mu \leqslant \mu B n^{-p} \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда следует наше утверждение для любой функции $f \in L^p(E)$. $\square$

Другими словами, утверждение теоремы можно сформулировать так: замыкание в $L^p(E)$ множества сужений на E функций из $C_0(\mathbb{R}^d)$ совпадает с $L^p(E)$.

В частности, для любой функции $f \in L^p(E)$ существует последовательность $f_n \in C_0(\mathbb{R}^d)$ со свойством

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

Теорема 17.6 имеет многочисленные приложения в анализе. В качестве первого примера ее применения докажем, что функции из $L^p(\mathbb{R}^d)$ являются "равномерно непрерывными в среднем".

Следствие 17.1 *Для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \geqslant 1$,*

$$\lim_{h\to 0} \|f - f_h\|_p = 0, \tag{17.8}$$

где $f_h(x) = f(x + h)$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и по теореме 17.6 найдем функцию $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ так, чтобы $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Тогда

$$\|f - f_h\|_p \leqslant \|g - g_h\|_p + 2\,\|f - g\|_p < \|g - g_h\|_p + 2\varepsilon$$

и первое слагаемое справа стремится к нулю при $|h| \to 0$. $\square$

1.6. Пространство Гильберта

L^2 играет особую роль среди остальных пространств L^p. Причиной этому является то, что его норма на самом деле порождается скалярным произведением, как это было с евклидовой нормой (см. лемму 6.1).

Определение 17.2 *Если функции $f, g \in L^2(E)$, то их* ***скалярным произведением*** *называется*

$$(f, g) = \int_E f g \, d\mu. \tag{17.9}$$

Лемма 17.2 *Скалярное произведение в $L^2(E)$ обладает следующими свойствами*

1) $(f, g) = (g, f)$ (симметричность),

2) $(\lambda f + \mu g, h) = \lambda(f, h) + \mu(g, h)$ (линейность),

3) $(f, f) \geqslant 0$, $(f, f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0$,

4) $\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}$,

5) $|(f, g)| \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$ (неравенство Коши), 6) $\|f + g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$ (неравенство треугольника),

7) при любом фиксированном $g \in L^2(E)$ функция $f \to (f, g)$ непрерывна на $L^2(E)$.

Доказательство. Первые четыре свойства вытекают непосредственно из определения 17.2.

Свойства 5) и 6) сразу следуют из неравенства Гельдера (17.1) и Минковского (17.4) при $p = 2$. Но в этом случае можно повторить доказательство, проведенное нами в евклидовом случае (см. лемму 6.1).

Для доказательства неравенства Коши рассмотрим неотрицательный квадратный трехчлен

$$0 \leqslant \|f + \lambda g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + 2\lambda(f, g) + \lambda^2 \|g\|_2^2$$

Его дискриминант не положителен

$$D = 4(f, g)^2 - 4 \|f\|_2^2 \|g\|_2^2 \leqslant 0,$$

а это и есть нужное неравенство.

Неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши

$$\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + 2(f, g) + \|g\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2 + 2 \|f\|_2 \|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 . \square$$

Если $\|f_n - f\|_2 \to 0$, то

$$|(f_n, g) - (f, g)| = |(f - f_n, g)| \leqslant \|f - f_n\|_2 \|g\|_2 \to 0. \square$$

в силу неравенства Коши. $\square$

§ 2. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве

Принципиальной возможностью, которую дает нам скалярное произведение в $L^2(E)$, является определение угла между ненулевыми элементами

$$\cos\alpha = \frac{(f, g)}{\|f\|_2 \|g\|_2}$$

Нас будет интересовать случай, когда $\cos\alpha = 0$. Так появляется понятие ортогональности.

2.1. Ортогональность и приближения.

Определение 17.3 *Функции $f, g \in L^2(E)$ называются* ***ортогональными****, если $(f, g) = 0$.*

Краткая запись для этого $f \perp g$.

Если $S \subset L^2$ и $f \in L^2$, то запись $f \perp S$ означает, что $f \perp g$ для любого $g \in S$.

Упражнение 17.2

1) Доказать **тождество параллелограмма**

$$\|f + g\|_2^2 + \|f - g\|_2^2 = 2\big(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2\big) .$$

2) Если $f \perp g$, то $\|f \pm g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$ (теорема Пифагора)

Определение 17.4 *Пусть $M \subset L^2$ — линейное многообразие (множество, замкнутое относительно векторных операций в L^2) и $f \in L^2$. Элемент $g \in M$ называется* ***элементом наилучшего приближения*** *для f в M, если*

$$d(f, M) \quad \|f - g\|_{L^2}.$$

Теорема 17.7 *Пусть $M \subset L^2$ — линейное многообразие и $f \in L^2$. Тогда следующие условия равносильны*

i) $g \in M$ элемент наилучшего приближения для f в M,

ii) $f - g \perp M$.

Доказательство. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Предположим противное, тогда существует элемент $g_0 \in M$, для которого $(f - g, g_0) \neq 0$. Выберем число $\lambda \in \mathbb{R}$ так, чтобы $f - g - \lambda g_0 \perp g_0$

$$0 = (f - g - \lambda g_0, g_0) = (f - g, g_0) - \lambda(g_0, g_0) = (f - g, g_0) - \lambda \|g_0\|^2$$

Отсюда

$$\lambda \quad \frac{(f - g, g_0)}{\|g_0\|^2}.$$

Теперь, используя теорему Пифагора, получим

$$\|f - g\|^2 \quad \|f - g - \lambda g_0 + \lambda g_0\|^2 \quad \|f - g - \lambda g_0\|^2 + \lambda^2 \|g_0\|^2 > \|f - g - \lambda g_0\|^2$$

и g не является элементом наилучшего приближения.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Для любого элемента $h \in M$ по теореме Пифагора

$$\|f - h\|^2 = \|(f - g) + (g - h)\|^2 = \|f - g\|^2 + \|g - h\|^2 \geqslant \|f - g\|^2$$

и g элемент наилучшего приближения. □

Отметим, что доказательство второй части теоремы показывает, что элемент наилучшего приближения единственный (если он существует).

2.2. Ортогональные системы и ряды Фурье

Определение 17.5 *Последовательность $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2$ называется* ***ортонормированной системой****, если*

$$(\varphi_k, \varphi_i) \quad \delta_{ki} \quad \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases} \qquad (17.10)$$

δ_{ki} обычно называют символом Кронекера.

Упражнение 17.3

1) Ортонормированная система линейно независима в том смысле, что линейно независима любая ее конечная подсистема.

2) Для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^d$ в $L^2(E)$ существует ортонормированная система.

Определение 17.6 *Если* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2$ *— ортонормированная система и* $f \in L^2$*, то ряд*

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k \tag{17.11}$$

называется ***рядом Фурье*** *для* f*, а число* (f, φ_k) *—* k*-м* ***коэффициентом Фурье*** *для* f*.*

В дальнейшем мы часто будем использовать следующие обозначения: $\Phi_n = \{\varphi_k\}_{k=1}^{n} \subset L^2$, $\mathrm{Lin}(S)$ — линейная оболочка множества $S \subset L^2$ (множество всех линейных комбинаций функций из S). Кроме того, будем обозначать

$$S_n f = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\varphi_k \tag{17.12}$$

частные суммы ряда Фурье (17.11).

Теорема 17.8 *Пусть* Φ *— ортонормированная система. Тогда для любых* $f \in L^2$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *сумма Фурье* $S_n f$ *является элементом наилучшего приближения для* f *в* $\mathrm{Lin}(\Phi_n)$*.*

Доказательство. При доказательстве будем опираться на теорему 17.7. В силу условия ортогональности (17.10) при каждом $i = 1, \dots, n$

$$(f - S_n f, \varphi_i) = (f, \varphi_i) - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi_i) = (f, \varphi_i) - (f, \varphi_i) = 0.$$

Отсюда следует, что $f - S_n f \perp \varphi$ для любого элемента $\varphi \in \mathrm{Lin}(\Phi_n)$. По теореме 17.7 $S_n f$ является элементом наилучшего приближения для f в $\mathrm{Lin}(\Phi_n)$. $\square$

2.3. Теорема Ф.Рисса-Э.Фишера

Лемма 17.3 (тождество Бесселя) *Пусть* Φ *— ортонормированная система. Тогда для любых* $f \in L^2$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)^2 + \|f - S_n f\|^2 . \tag{17.13}$$

Доказательство. Доказательство состоит в использовании свойства ортогональности и двукратном применении теоремы Пифагора:

$$\|f\|^2 = \|f - S_n f + S_n f\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + \|S_n f\|^2 =$$

$$= \|f - S_n f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|(f, \varphi_k)\varphi_k\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)^2.$$

$\square$

Упражнение 17.4 Пусть Φ — ортонормированная система.

1) Для любой функции $f \in L^2$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)^2$ сходится и справедливо

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)^2 \leqslant \|f\|^2 \tag{17.14}$$

(неравенство Бесселя).

2) Для любой функции $f \in L^2$ сходимость ее ряда Фурье к f равносильна условию

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)^2 \tag{17.15}$$

(равенство Парсеваля или Парсеваля-Стеклова) .

3) Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \tag{17.16}$$

сходится, то он является рядом Фурье своей суммы.

В частности, неравенство Бесселя (17.14) означает, что условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty \tag{17.17}$$

необходимо для того, чтобы ряд (17.16) был рядом Фурье некоторой функции из L^2. Следующая глубокая теорема 17.9 утверждает, что оно является и достаточным. Центральным моментом в ее доказательстве является использование теоремы 17.5.

Теорема 17.9 (Ф.Рисса-Фишера) *Пусть Φ — ортонормированная система и последовательность чисел $\{c_k\}$ удовлетворяет условию (17.17).*

Тогда существует функция $f \in L^2$ со свойствами

1) для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется $(f, \varphi_k) = c_k$,

2) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$.

Доказательство. Рассмотрим ряд (17.16). Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k.$$

По теореме Пифагора

$$\|S_n - S_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} c_k^2$$

при $n > m \geqslant 1$. Из (17.17) следует, что $\{S_n\}$ — фундаментальная последовательность. В силу полноты L^2 (теорема 17.5) существует функция $f \in L^2$, для которой $\|S_n - f\| \to 0$. Покажем, что это — нужный элемент.

Рассмотрим $(f, \varphi_i) = (f - S_n, \varphi_i) + (S_n, \varphi_i)$. Второе слагаемое можно преобразовать

$$(S_n, \varphi_i) = \sum_{k=1}^{n} c_k(\varphi_k, \varphi_i) = c_i, \quad n \geqslant i.$$

Первое слагаемое сходится к нулю:

$$\|f - S_n, \varphi_i\| \leq \|\varphi_i\| \cdot \|f - S_n\| = \|f - S_n\| \to 0.$$

Следовательно, ряд (17.16) является рядом Фурье своей суммы и (см. упражнение 17.4) верно равенство Парсеваля (17.15). □

2.4. Полнота и замкнутость

Определение 17.7 *Ортонормированная система* Φ *называется* ***замкнутой****, если* $\overline{\mathrm{Lin}(\Phi)} = L^2$.

Другими словами, замкнутость Φ означает, что для любой функции $f \in L^2$ существует последовательность линейных комбинаций из функций системы Φ, сходящаяся в L^2 к f.

Определение 17.8 *Ортонормированная система* Φ *называется* ***полной****, если для любой функции* $f \in L^2$ *из* $(f, \varphi_k) = 0$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$ *следует* $f = 0$.

Другими словами, это означает, что нулевой элемент — единственный в L^2, ортогональный всем функциям системы Φ.

Иначе свойство полноты можно переформулировать так: соответствие между функциями $f \in L^2$ и их рядами Фурье для полной системы Φ является взаимно однозначным.

Теорема 17.10 *Пусть* Φ *— ортонормированная система. Тогда следующие условия равносильны*

i) для любой функции $f \in L^2$ *справедливо равенство Парсеваля (17.15),*

ii) ряд Фурье любой функции $f \in L^2$ *сходится к* f *в* L^2*,*

iii) система Φ *замкнута,*

iv) система Φ *полна.*

Доказательство. *i)* $\Longrightarrow$ *ii)* Это утверждение вытекает из тождества Бесселя (17.13) (см. также упражнение 17.4.2)).

ii) $\Longrightarrow$ *iii)* Это утверждение очевидно (см. определение 17.7).

iii) $\Longrightarrow$ *iv)* Пусть $(f, \varphi_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, тогда $f \perp \mathrm{Lin}(\Phi)$. В силу замкнутости Φ существует такая последовательность $g_n \in \mathrm{Lin}(\Phi)$, что $\|f - g_n\| \to 0$.

Так как $f \perp g_n$, то по теореме Пифагора (упражнение 17.2.2)

$$\|f\|^2 \leqslant \|f\|^2 + \|g_n\|^2 = \|f - g_n\|^2 \to 0$$

Следовательно, $\|f\|^2 = 0$.

$iv) \Longrightarrow i)$ Пусть $f \in L^2$, тогда в силу неравенства Бесселя (17.14) и теоремы 17.9 Рисса-Фишера ее ряд Фурье сходится в L^2 к некоторой функции $g \in L^2$.

В силу непрерывности скалярного произведения (лемма 17.2.7))

$$(g, \varphi_i) = \sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_i)(\varphi_k, \varphi_i) = (f, \varphi_i)$$

для всех $i \in \mathbb{N}$. Следовательно $(f - g, \varphi_i) = 0$, для всех $i \in \mathbb{N}$. Используя полноту Φ, получаем $f = g$. Осталось использовать упражнение 17.4.2). □

В следующих параграфах мы изучим основные свойства двух конкретных ортонормированных систем — тригонометрической и системы Хаара.

§ 3. Тригонометрические ряды Фурье

3.1. Пространства комплекснозначных функций

Тригонометрическая система существует в двух вариантах — комплекснозначном и действительнозначном. Оба эти варианта тесно связаны друг с другом, но первый из них является более удобным для изложения. Для его использования нам понадобится определение измеримости и интеграла Лебега для функций, принимающих значения в поле комплексных чисел. Это делается без труда.

Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Лебегу. Будем говорить, что функция $f : E \to \mathbb{C}$ измерима, если измеримы функции $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$. Интегралом Лебега функции $f \in \mathcal{M}(E)$ будем называть

$$\int_E f\, d\mu = \int_E \operatorname{Re} f\, d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f\, d\mu, \tag{17.18}$$

если оба интеграла справа существуют. При таком подходе все свойства измеримых функций и интеграла Лебега сохраняют силу (в этом легко убедиться) для комплекснозначных функций.

Пространства комплекснозначных функций $L^p(E)$ вводятся точно так же, как и выше. Мы не будем вводить специального обозначения для этих пространств, из контекста каждый раз будет ясно, какие функции (действительные или комплексные) рассматриваются.

Для того, чтобы сохранить основное свойство пространства L^2 для комплексного случая, надо переопределить скалярное произведение, полагая

$$(f, g) = \int_E f\overline{g}\, d\mu. \tag{17.19}$$

При таком определении все свойства скалярного произведения (см. лемму 17.2) сохраняются. Исключение составляет только свойство симметричности, которое теперь заменяется близким свойством

$$(f, g) = \overline{(g, f)}.$$

Это объясняет появление ниже в формулах для коэффициентов Фурье комплексного сопряжения. Множество E в определении $L^p(E)$ выбираем так $E = [-\pi, \pi]$. Обычно для сокращения записи пишут $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$.

Кроме того, будем обозначать

$$C_{2\pi} = \{f \in C(\mathbb{T}) : f(-\pi) = f(\pi)\} \tag{17.20}$$

класс непрерывных 2π-периодических функций. Это название объясняется тем, что функции из этого класса при 2π-периодическом продолжении функции на $\mathbb{R}$ будут непрерывными на всей прямой.

И вообще, если X какой-либо класс функций на $\mathbb{T}$, то $X_{2\pi}$ означает множество 2π-периодических продолжений функций из X 2π-периодически продолженных на всю прямую.

3.2. Тригонометрическая система (комплексный случай)

Определение 17.9 *Последовательность функций*

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{17.21}$$

называется ***комплексной тригонометрической системой.***

Лемма 17.4 *Комплексная тригонометрическая система является ортонормированной относительно скалярного произведения (17.19).*

Доказательство. Надо просто вычислить интегралы

$$\int_{\mathbb{T}} e^{ikx} \overline{e^{ilx}} \, dt \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x} \, dx \quad \frac{1}{i(k-l)} e^{i(k-l)x} |_{-\pi}^{\pi} \quad 0$$

при $k \neq l$ и

$$\int_{\mathbb{T}} e^{ikx} \overline{e^{ikx}} \, dx \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx \quad 2\pi. \square$$

Коэффициенты Фурье по комплексной тригонометрической системе принято обозначать особо

$$\hat{f}(k) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} f(y) e^{-iky} \, dy. \tag{17.22}$$

Ряд Фурье записывается в виде

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

и теперь он имеет смысл для любой функции $f \in L^1$ (а не только из L^2).

Позже (см. теорему 17.17) мы узнаем, что наша ортонормированная система является полной и замкнутой, поэтому вопрос о сходимости рядов Фурье класса $L^2_{2\pi}$ решается теоремой 17.10. Сейчас нас будут интересовать вопросы равномерной сходимости и сходимости в точке. Для изучения этих вопросов надо поближе познакомиться с частными суммами ряда Фурье, которые понимаются как

$$S_n f(x) = \sum_{|k|\leqslant n} \hat{f}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{17.23}$$

Лемма 17.5 *Пусть $f \in L^1$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$S_n f(x) = \int_{\mathbb{T}} f(y) D_n(x-y)dy, \tag{17.24}$$

где

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|\leq n} e^{ikt} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{17.25}$$

Доказательство. Функция (17.25) называется n-м ядром Дирихле. Она уже встречалась нам при изучении условной сходимости рядов. От ядер (10.16) они отличаются лишь множителем $\frac{1}{\pi}$.

Для доказательства надо подставить интегральные представления для коэффициентов Фурье (17.22) в выражение для сумм Фурье (17.23). □

3.3. Тригонометрическая система (действительный случай)

Рассмотрим систему функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right\}_{k=1}^{\infty}$. Она называется **действительной тригонометрической системой**.

Упражнение 17.5

1) Показать, что действительная тригонометрическая система является ортонормированной.

2) Если функция принимает действительные значения и ее ряд Фурье по действительной тригонометрической системе имеет вид

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx \tag{17.26}$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_k(f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{T}} f(x)\cos kx\, dx, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{17.27}$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{T}} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{17.28}$$

то комплексный ряд Фурье можно записать в виде

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

где

$$\hat{f}(0) = \frac{a_0(f)}{2}, \quad \hat{f}(k) = a_k(f) - ib_k(f), \quad \hat{f}(-k) = a_k(f) + ib_k(f) = \overline{c_k}, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

3) Доказать, что если $f \in L^1_{2\pi}$ — четная функция, то ее ряд Фурье имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$.

4) Доказать, что если функция $f \in L^1_{2\pi}$ нечетная функция, то ее ряд Фурье имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$.

5) Пусть $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$. Показать, что ее ряд Фурье имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$

6) Доказать, что существует такая постоянная $c \in \mathbb{R}$, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leqslant c \tag{17.29}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$.

Для функций, принимающих действительные значения, более естественным является рассмотрение ее ряда Фурье по действительной тригонометрической системе. Второе из этих упражнений показывает, что комплексная и тригонометрическая формы ряда Фурье тесно связаны и могут быть легко выражены друг через друга.

Мы предпочитаем всегда иметь дело с более простой и симметричной комплексной записью.

3.4. Принцип локализации

Мы покажем, что сходимость ряда Фурье является локальным свойством функции. Для этого нам понадобятся оценки для коэффициентов Фурье функций, которые, впрочем, представляют и самостоятельный интерес.

Введем интегральный модуль непрерывности функции $f \in L^p_{2\pi}$ как

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{0 < h \leqslant \delta} \|f - f_h\|_{L^p(\mathbb{T})}, \tag{17.30}$$

где $f_h(x) = f(x + h)$. Он будет выполнять по отношению к функциям из $L^p_{2\pi}$ ту же роль, которую играл обычный модуль непрерывности (см. (3.5)) для непрерывных функций.

Упражнение 17.6
1) Если $f \in L^p_{2\pi}$, то $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega_p(\delta, f) = 0$.
2) Если $f \in L^p_{2\pi}$, то $\omega_q(\delta, f) \leqslant \omega_p(\delta, f)$ при $1 \leqslant q < p$, $\delta > 0$.
3) Если $f \in C_{2\pi}$ (см. (17.20)), то $\omega_p(\delta, f) \leqslant \omega(\delta, f)$ при $\delta > 0$.
4) Если $f \in BV(\mathbb{T})$, то $\omega_1(\delta, f) = O(\delta)$ при $\delta \to +0$.

Лемма 17.6 *Если $f \in L^1$, то при $k = \pm 1, \pm 2, \dots$*

$$|\hat f(k)| \leqslant \int_{\mathbb{T}} \Big| f\Big(y + \frac{\pi}{k}\Big) - f(y)\Big|\, dy \leqslant \omega_1\Big(\frac{\pi}{|k|}, f\Big). \tag{17.31}$$

Доказательство. Заменим y на $y + \frac{\pi}{k}$ в интеграле (17.22), определяющем коэффициенты Фурье. Тогда

$$\hat f(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} f\Big(y + \frac{\pi}{k}\Big) e^{-iky}\, dy$$

Следовательно

$$\hat f(k) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} \Big[f\Big(y + \frac{\pi}{k}\Big) - f(y)\Big] e^{-iky}\, dy$$

и

$$|\hat f(k)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} \Big| f\Big(y + \frac{\pi}{k}\Big) - f(y)\Big|\, dy. \ \square$$

Лемма 17.7 (Римана-Лебега) *Если $f \in L^1_{2\pi}$ и функция $g \in \mathcal{M}$ ограничена, то*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{T}} f(x+y) g(y) e^{-iky}\, dy = 0.$$

равномерно по x.

Доказательство. Сначала заметим, что из очевидного неравенства

$$|f(x+y+h)g(y+h) - f(x+y)g(y)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x+y+h) - f(x+y)||g(y+h)| + |f(x+y)||g(y+h) - g(y)|$$

и из леммы 17.6 следует, что

$$\left|\int_{\mathbb{T}} f(x+y)g(y)e^{-iky}\, dy\right| \leqslant \omega_1\Big(\frac{\pi}{|k|}, f\Big) \|g\|_C + \int_{\mathbb{T}} |f(x+y)||g(y+h) - g(y)|\, dy.$$

Первое слагаемое справа стремится к 0 при $k \to \infty$ (см. упражнение 17.6.1). Чтобы доказать это же и для второго слагаемого, зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и запишем f в виде $f = f_1 + f_2$, где $\|f_1\|_1 < \varepsilon$ и $f_2 \in C_{2\pi}$ (это можно сделать по теореме 17.6). Тогда

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x+y)||g(y+h) - g(y)|\, dy \leqslant 2\varepsilon \|g\|_C + \|f_2\|_C\, \omega_1\Big(\frac{\pi}{|k|}, g\Big)$$

Здесь второе слагаемое меньше ε при достаточно больших k в силу упражнения 17.6.1). $\Box$

Отметим, что из этой леммы вытекает также, что при тех же условиях

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{T}} f(x+y)g(y)\sin ky\,dy = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{T}} f(x+y)g(y)\cos ky\,dy = 0.$$

Это, конечно, следует из тождества Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

Теорема 17.11 (принцип локализации Римана) *Если $f \in L^1_{2\pi}$, то для любого фиксированного $\delta > 0$*

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+y)\frac{\sin ny}{y}\,dy + \varepsilon_n(x) \tag{17.32}$$

где ε_n сходится к 0 равномерно на $\mathbb{T}$.

В частности, если две функции совпадают на некотором интервале $(a,b) \subset \mathbb{T}$, то ряд Фурье их разности сходится к 0 равномерно на любом отрезке $[a',b'] \subset (a,b)$.

Доказательство. Преобразуем ядро Дирихле (17.25) следующим образом

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}} = \frac{\sin ny}{2\operatorname{tg}\frac{y}{2}} + \frac{1}{2}\cos ny.$$

Далее заметим, что функция

$$g(y) = \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{y}{2}} - \frac{1}{y}, \quad g(0) = 0,$$

принадлежит $C_{2\pi}$ (это легко установить, например, с помощью правила Лопиталя). Таким образом,

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}} = \frac{\sin ny}{y} + g(y)\sin ny + \frac{1}{2}\cos ny.$$

Используем это равенство в интегральном представлении сумм Фурье (17.24)

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\frac{\sin ny}{y}\,dy +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)g(y)\sin ny\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\cos ny\,dy.$$

Два последних интеграла стремятся равномерно к 0 по лемме 17.7 (см. также замечание после нее).

Наконец, если мы положим для $\delta > 0$

$$g_\delta(y) - \left\{\begin{array}{ll} 0, & y \in (-\delta,\delta) \\ \frac{1}{y}, & \mathbb{T}\setminus(-\delta,\delta) \end{array}\right. ,$$

то
$$S_nf(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+y)\frac{\sin ny}{y}\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)g_\delta(y)\frac{\sin ny}{y}\,dy.$$
Так как g_δ ограниченная функция, то, снова применяя лемму 17.7, получаем нужное утверждение. □

Другими словами, утверждение доказанной теоремы означает, что сходимость или расходимость ряда Фурье функции $f \in L^1_{2\pi}$ в некоторой точке $x \in \mathbb{T}$ зависит лишь от поведения этой функции лишь в сколь угодно малой окрестности точки x.

§ 4. Условия сходимости ряда Фурье

4.1. Расходящийся ряд Фурье

К сожалению, ряды Фурье могут оказаться расходящимися в некоторых точках, даже если от функции потребовать непрерывности. Первые примеры такого рода были построены Дю Буа-Реймоном.

Мы приведем пример непрерывной функции с расходящимся рядом Фурье, принадлежащий Л.Фейеру. В основе его построения лежит интересная конструкция полиномов Фейера
$$Q(x,m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\cos(2m-k)x - \cos(2m+k)x}{k}. \tag{17.33}$$

Для дальнейшего нам понадобится следующее свойство этих полиномов: существует такая постоянная $c \in \mathbb{R}$, что
$$|Q_m(x)| \leqslant c \tag{17.34}$$
для всех $m \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$.

В самом деле, ясно, что
$$Q(x,m) = 2\sin 2mx \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin kx}{k}$$
и (17.34) вытекает из (17.29).

Теорема 17.12 (Дю Буа-Реймона) *Существует функция $f \in C_{2\pi}$, ряд Фурье которой расходится в некоторой точке.*

Доказательство. Положим $m_k = 3^{k^3}$ и
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q(x, m_k)\,.$$

Из условия (17.34) следует, что этот ряд сходится равномерно к некоторой функции $f \in C_{2\pi}$. Поэтому, если в нем раскрыть скобки, то он является рядом Фурье своей суммы (в этом легко убедиться, умножая его на $\cos nx$ и почленно интегрируя).

С другой стороны, ясно, что

$$S_{3m_n-1}f(0) - m\ln 3 \to \infty$$

при $m \to \infty$. □

4.2. Условия сходимости ряда Фурье в точке

Таким образом, без дополнительных локальных условий ряд Фурье не обязан сходиться. Для нахождения таких условий, преобразуем суммы Фурье к еще более удобному виду.

Лемма 17.8 *Если $f \in L^1_{2\pi}$, то для любого фиксированного $\delta > 0$ и любого числа s*

$$S_nf(x) - s = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \{f(x+y) + f(x-y) - 2s\}\,\frac{\sin ny}{y}\,dy + \varepsilon_n(x) \qquad (17.35)$$

где ε_n сходится к 0 равномерно на $\mathbb{T}$.

Доказательство. Разобьем интеграл (17.32) на два

$$S_nf(x) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\delta}^0 + \int_0^\delta\right) f(x+y)\frac{\sin ny}{y}\,dy + \varepsilon_n(x)$$

и в первом заменим y на $-y$. Тогда в силу четности ядра $\frac{\sin ny}{y}$

$$S_nf(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x+y) + f(x-y)]\frac{\sin ny}{y}\,dy + \varepsilon_n(x)$$

Теперь применим это равенство к функции, тождественно равной s, получая

$$s = \frac{2s}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin ny}{y}\,dy + \varepsilon'_n(x)$$

где ε'_n сходится к 0 равномерно на $\mathbb{T}$.

Вычитая полученные соотношения, приходим к (17.35). □

Для краткости введем следующее обозначение для функции

$$\varphi_x(y) = f(x+y) + f(x-y) - 2s, \quad y \in \mathbb{T}, \qquad (17.36)$$

которое будет использоваться до конца параграфа.

Теорема 17.13 (признак Дини) *Пусть $f \in L^1_{2\pi}$ и $x \in \mathbb{T}$. Если интеграл*

$$\int_0^\pi \frac{|\varphi_x(y)|}{y}\,dy \tag{17.37}$$

конечен, то ряд Фурье функции f в точке x сходится к s.

Доказательство. Выберем число $0 < \eta < \pi$ настолько малым, чтобы

$$\int_0^\eta \frac{|\varphi_x(y)|}{y}\,dy < \varepsilon.$$

Это можно сделать в силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега (теорема 16.9).

$$|S_n f(x) - f(x)| \leqslant \int_0^\eta \frac{|\varphi_x(y)|}{y}\,dy + \frac{1}{\pi}\left|\int_{\mathbb{T}} \chi_{(\eta,\pi)}(y)\frac{\varphi_x(y)}{y}\sin ny\,dy\right| + |\varepsilon_n(x)|$$

$$\leqslant \varepsilon + |\varepsilon_n(x)| + \frac{1}{\pi}\left|\int_{\mathbb{T}} \chi_{(\eta,\pi)}(y)\frac{\varphi_x(y)}{y}\sin ny\,dy\right|.$$

По лемме 17.7 последнее слагаемое сходится к 0 при $n \to \infty$. $\square$

Условию (17.37) можно придать другую форму.

Упражнение 17.7 Пусть $f \in L^1_{2\pi}$ и $x \in \mathbb{T}$. Тогда условие (17.37) выполнено в каждом из следующих случаев

1) при некотором $a > 0$ выполнено $\varphi_x(y) = O\left(\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{-1-a}\right)$ при $y \to +0$,
2) при некотором $a > 0$ выполнено $\varphi_x(y) = O(|y|^a)$ при $y \to +0$.
3) интеграл $\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+y)-s}{y}\right|\,dy$ конечен,
4) при некотором $a > 0$ выполнено $f(x+y) - s = O\left(\left(\ln\frac{1}{|y|}\right)^{-1-a}\right)$ при $y \to 0$,
5) при некотором $a > 0$ выполнено $f(x+y) - s = O(|y|^a)$ при $y \to 0$.

Ясно, что существует не более одного числа s, для которого выполнено условие (17.37) (или любое другое условие из упражнений 17.7). Отсюда следует, что при его соблюдении существует естественное значение функции f в точке x (напомним, что элементами L^1 являются не функции, а классы эквивалентных функций (см. п.1.1)) — следует положить $f(x) = s$.

4.3. Условия равномерной сходимости ряда Фурье

Прежде всего отметим, что метод доказательства теоремы 17.13 дает следующий признак равномерной сходимости ряда Фурье.

Теорема 17.14 (признак Дини-Липшица) *Пусть $f \in C_{2\pi}$ и*

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega(y,f)}{y}\,dy < \infty, \tag{17.38}$$

то ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на $\mathbb{T}$.

Доказательство. Доказательство копирует рассуждения, проведенные при обосновании теоремы 17.13, только теперь все оценки будут равномерными. □

Упражнение 17.8 Пусть $f \in C_{2\pi}$. Тогда условие (17.38) выполнено в каждом из следующих случаев

1) $\omega(y,f) = O\left(\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{-1-a}\right)$ при некотором $a > 0$,

2) $\omega(y,f) = O(y^a)$ при некотором $0 < a \leqslant 1$ (то есть $f \in H^a$).

В связи с теоремой Дини-Липшица отметим, что Лебег доказал окончательный вариант утверждений такого рода. Именно условие

$$\omega(y,f) = o\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{y}}\right)$$

обеспечивает равномерную сходимость ряда Фурье функции f, а условие

$$\omega(y,f) = O\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{y}}\right)$$

уже не обеспечивает этого.

В следующей теореме содержатся условия другого сорта для равномерной сходимости рядов Фурье.

Теорема 17.15 (признак Жордана) *Если $f \in BV[a,b]$ для некоторого отрезка $[a,b] \subset \mathbb{T}$, то ряд Фурье для f сходится всюду на этом отрезке к $f(x)$ в точках непрерывности и к $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ в точках разрыва.*

Если дополнительно $f \in C[a,b]$, то ряд Фурье сходится к f равномерно на $[a',b']$, где $[a',b'] \subset (a,b)$.

Доказательство. По теореме 14.2 Жордана достаточно доказать наше утверждение для возрастающей функции. Положим $s = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, тогда

$$f(x+y)+f(x-y)-2s = [f(x+y)-f(x-0)] + [f(x-y)-f(x-0)].$$

Так что интеграл в (17.35) распадается на два слагаемых. Оценим первое из них

$$\int_0^{\delta} [f(x+y)-f(x+0)]\frac{\sin ny}{y}\,dy$$

Здесь $\delta > 0$ выбирается по $\varepsilon > 0$ так, чтобы $x \pm \delta \in (a, b)$ и $|f(x+y) - f(x+0)| < \varepsilon$ при $0 < y \leqslant \delta$.

Так как функция $y \to f(x+y) - f(x+0)$ возрастает, то по формулам Бонне (теорема 5.12)

$$\int_0^\delta [f(x+y) - f(x+0)] \frac{\sin ny}{y} \, dy = [f(x+\delta) - f(x+0)] \int_\xi^\delta \frac{\sin ny}{y} \, dy,$$

где $0 < \xi < \delta$. Но так как

$$\left| \int_\xi^\delta \frac{\sin ny}{y} \, dy \right| \leqslant \pi$$

(это легко проверить интегрированием по частям), то

$$\left| \int_0^\delta [f(x+y) - f(x+0)] \frac{\sin ny}{y} \, dy \right| < 2\pi\varepsilon$$

Точно так же оценивается и интеграл

$$\int_0^\delta [f(x-y) - f(x-0)] \frac{\sin ny}{y} \, dy$$

На основании леммы 17.8 ряд Фурье для сходится к s.

Если дополнительно $f \in C[a, b]$ и $[a', b'] \subset (a, b)$, то можно выбрать $\delta > 0$ столь малым, что

$$|f(x+y) - f(x)| < \varepsilon, \quad |f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$$

при $x \in [a', b']$ и $0 \leqslant y \leqslant \delta$. Поэтому в предыдущих оценках интегралов x может быть взято любым из $[a', b']$. Поэтому

$$\left| \int_0^\delta [f(x+y) + f(x-y) - 2s] \frac{\sin ny}{y} \, dy \right| < 4\pi\varepsilon$$

при $x \in [a', b']$. Снова применяя лемму 17.8, получаем наше утверждение. $\square$

Следствие 17.2 *Ряд Фурье любой функции $f \in BV_{2\pi} \cap C_{2\pi}$ сходится к f равномерно на $\mathbb{T}$.*

4.4. Полнота и замкнутость тригонометрической системы

Расходимость рядов Фурье непрерывных функций обусловлена "плохими" аппроксимативными свойствами ядер Дирихле. Мы заменим в выражениях для сумм Фурье ядра Дирихле на другие для улучшения свойств сходимости. Рассмотрим ядра Фейера

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x) =$$

$$\frac{1}{\pi(n+1)} \cdot \frac{1}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2} \sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(k+\frac{1}{2}\right) x \cdot \sin\frac{x}{2} =$$

$$\frac{1}{\pi(n+1)} \cdot \frac{1}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2} \sum_{k=0}^{n} [\cos kx - \cos(k+1)x] =$$

$$\frac{1}{\pi(n+1)} \cdot \frac{1-\cos(n+1)x}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \tag{17.39}$$

Введем средние Фейера

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k f(x) = \int_{\mathbb{T}} f(y) F_n(x-y)\,dy \tag{17.40}$$

Теорема 17.16 (Фейера) *Для любой функции* $f \in C_{2\pi}$

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_n f\|_{C_{2\pi}} = 0.$$

Доказательство. Сначала заметим, что

$$\int_{\mathbb{T}} F_n(y)\,dy = 1.$$

Далее рассмотрим разность

$$|f(x) - \sigma_n f(x)| = \left| f(x)\int_{\mathbb{T}} F_n(y)\,dy - \int_{\mathbb{T}} f(x+y) F_n(y)\,dy \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{T}} [f(x) - f(x+y)]\, F_n(y)\,dy \right| \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f(x) - f(x+y)|\, F_n(y)\,dy =$$

$$= \left(\int_{|y|\leqslant\delta} + \int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi} \right) |f(x) - f(x+y)|\, F_n(y)\,dy = I_1 + I_2.$$

Выберем и зафиксируем $\delta > 0$ так, чтобы $\omega(\delta, f) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$I_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{T}} K_n(y)\ \ dy = \frac{\varepsilon}{2},$$

Рассмотрим I_2

$$I_2 \leqslant \frac{2\,\|x\|_C}{\pi(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right) y}{\sin\frac{y}{2}}\right]^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi\,\|f\|_C}{n+1}\int_\delta^\pi \frac{dy}{y^2} \leqslant \frac{2\pi\,\|f\|_C}{n+1}\int_\delta^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{2\pi\,\|f\|_C}{(n+1)\,\delta}$$

Таким образом, для достаточно больших n

$$\|f - \sigma_n f\|_C \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\pi\,\|f\|_C}{(n+1)\delta} < \varepsilon. \ \Box$$

Теорема 17.17 *Тригонометрическая система полна и замкнута.*

Доказательство. Докажем замкнутость (см. определение 17.7). Полнота тогда будет следовать из теоремы 17.10.

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и по теореме 17.6 найдем функцию $g \in C_{2\pi}$ так, чтобы $\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. По предыдущей теореме для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$

$$\|f - \sigma_n g\|_2 \leqslant \|f - g\|_2 + \|g - \sigma_n g\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{2\pi}\,\|g - \sigma_n g\|_C < \varepsilon.$$

Осталось заметить, что $\sigma_n g$ — тригонометрический полином. $\Box$

§ 5. Система Хаара

Здесь мы познакомимся с одной замечательной ортонормированной системой, которая дает каждой непрерывной функции равномерно сходящийся ряд Фурье. Она была построена не так давно (по сравнению с другими объектами математического анализа) — в начале прошлого века. Однако, в последние годы внимание к ней снова возросло в связи с новыми достижениями гармонического анализа (см. равенство (17.44)).

5.1. Двоичные отрезки

Пусть

$$\Delta_1 = \Delta_0^0 = [0,1].$$

Далее, каждое натуральное число $n \geqslant 2$ можно однозначно представить в виде

$$n = 2^i + j, \quad i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2^i. \tag{17.41}$$

Положим тогда

$$\Delta_n = \Delta_i^j = \left[\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i}\right) \tag{17.42}$$

($\Delta_i^{2^i}$ считаем замкнутым и справа). Промежутки Δ_n будем называть **двоичными** (или диадическими) отрезками.

Следующая лемма содержит важнейшее и часто используемое свойство двоичных отрезков.

Лемма 17.9 *Любые два двоичных отрезка либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом, причем в его левой или правой половине.*

5.2. Определение системы Хаара

Определим систему Хаара $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом. Для $n = 1$ положим

$$\chi_1(x) = \chi_0^0(x) \equiv 1.$$

а для $n \geqslant 2$ —

$$\chi_n(x) = \chi_i^j(x) = \begin{cases} \sqrt{2^i}, & x \in \Delta_{i+1}^{2j-1}, \\ -\sqrt{2^i}, & x \in \Delta_{i+1}^{2j}, \\ 0, & x \notin \Delta_i^j. \end{cases} \tag{17.43}$$

Для наглядности отметим, что Δ_{i+1}^{2j-1} и Δ_{i+1}^{2j} являются соответственно левой и правой половинками Δ_i^j

$$\Delta_{i+1}^{2j-1} \cup \Delta_{i+1}^{2j} = \Delta_i^j$$

Все функции системы Хаара, начиная со второй, весьма просто выражаются через одну (так называемую материнскую) функцию

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ 0, & x \notin [0, 1). \end{cases}$$

Тогда для всех $x \in [0, 1)$ и $n \geqslant 2$ справедливы равенства (см. также (17.41))

$$\chi_n(x) = 2^{\frac{i}{2}} \chi\left(2^i x - j + 1\right). \tag{17.44}$$

В последние годы ортонормированные системы, обладающие таким свойством, получили широкое распространение (их называют всплесками, вейвлетами или онделеттами). Они находят многочисленные приложения в самых различных прикладных вопросах.

5.3. Ортогональность системы Хаара

Лемма 17.10 *Система Хаара является ортонормированной системой на* $[0, 1]$, *то есть*

$$\int_0^1 \chi_n(x)\chi_m(x)\,dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

В частности,она линейно независима (то есть линейно независима любая ее конечная подсистема).

Доказательство. Случай $n = m$ проверяется непосредственно. Если $n > m$, то возможны следующие случаи

1) либо отрезки Δ_n и Δ_m не пересекаются и тогда произведение $\chi_n(x)\chi_m(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$,

2) либо Δ_n и Δ_m пересекаются, тогда по лемме 17.9 Δ_n содержится в левой или правой половине Δ_m и функция χ_m постоянна на Δ_n, откуда

$$\int_0^1 \chi_n(x)\chi_m(x)\,dx = \int_{\Delta_n} \chi_n(x)\chi_m(x)\,dx = \chi_m(\Delta_n)\int_{\Delta_n} \chi_n(x)\,dx = 0.$$

Чтобы доказать линейную независимость системы Хаара, предположим, что некоторая конечная линейная комбинация функций системы равна нулю

$$\sum_{n=1}^{m} a_n\chi_n(x) = 0, \quad x \in [0,1].$$

Умножим это равенство на любую из функций $\chi_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, проинтегрируем по отрезку $[0,1]$ и используем уже доказанную ортонормированность

$$0 = \int_0^1 \chi_k(x)\sum_{n=1}^{m} a_n\chi_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{m} a_n\int_0^1 \chi_k(x)\chi_n(x)\,dx = a_k.$$

Следовательно, все коэффициенты линейной комбинации равны нулю. □

Для каждого $n \geqslant 2$ обозначим $\mathcal{D}_n$ множество всех функций, постоянных на каждом из n двоичных отрезков из множества

$$\mathcal{P}_n = \left\{\Delta_{i+1}^1, \dots, \Delta_{i+1}^{2j},\ \Delta_i^{j+1}, \dots, \Delta_i^{2^i}\right\} \tag{17.45}$$

(см. (17.41)). Кроме того, пусть $\mathcal{P}_1 = \{[0,1]\}$. Отметим, что $\mathcal{P}_n$ содержит ровно n промежутков.

Лемма 17.11 *Для любого $m \in \mathbb{N}$ линейная оболочка системы функций $\{\chi_n\}_{n=1}^m$ совпадает с $\mathcal{D}_m$.*

Доказательство. Ясно, что эта линейная оболочка содержится в $\mathcal{D}_m$, так как каждая функция χ_n ($n = 1, \dots, m$) постоянна на отрезках (17.45).

Чтобы доказать обратное включение, заметим, что размерность $\mathcal{D}_m$ равна m, так как характеристические функции отрезков (17.45) образуют базис в $\mathcal{D}_m$. Но система $\{\chi_n\}_{n=1}^m$ линейно независима и тоже является базисом в $\mathcal{D}_m$. □

5.4. Ряды Фурье-Хаара

Ортонормированность системы Хаара позволяет определить понятие ряда Фурье для любой функции $f \in R[0,1]$. Именно, если $f \in R[0,1]$, то числа

$$a_n(f) = \int_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

называются **коэффициентами Фурье–Хаара**, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\chi_n(x)$$

— **рядом Фурье–Хаара** функции f.

Сходимость ряда Фурье–Хаара определяется поведением последовательности его частичных сумм

$$S_m f(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n(f)\chi_n(x).$$

Для изучения вопроса о сходимости рядов Фурье получим удобное интегральное представление для сумм Фурье–Хаара, подобно тому, как это было в теории тригонометрических рядов Фурье.

Лемма 17.12 *Для любой функции $f \in R[0,1]$ и любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$S_n f(x) = \int_0^1 f(y) \sum_{m=1}^{n} \chi_m(x)\chi_m(y)\,dy = \frac{1}{\mu\Delta}\int_\Delta f(y)\,dy, \quad \text{\textit{при}} \quad x \in \Delta, \qquad (17.46)$$

где Δ — любой отрезок из $\mathcal{P}_n$ (см. (17.45)).

Доказательство. Первое из равенств получается простым расписыванием формул для коэффициентов Фурье. Второе доказываем по индукции, начиная с очевидного случая $n = 1$.

Предположим, что (17.46) уже доказано для $n-1$ и докажем его для n. Так как

$$S_n f = S_{n-1} f + a_n(f)\chi_n,$$

а $\chi_n(x) \neq 0$ только при $x \in \Delta_n = \Delta_i^j$, то в силу предположения индукции нам достаточно доказать (17.46) только для $x \in \Delta_i^j$.

Для этого воспользуемся предположением индукции и определением коэффициентов Фурье

$$S_n f(x) = S_{n-1} f(x) + \chi_n(x) 2^{i/2}\left[\int_{\Delta_{i+1}^{2j-1}} f(t)\,dt - \int_{\Delta_{i+1}^{2j}} f(t)\,dt\right] =$$

$$= 2^i \int_{\Delta_i^j} f(t)\,dt + \chi_n(x) 2^{i/2}\left[\int_{\Delta_{i+1}^{2j-1}} f(t)\,dt - \int_{\Delta_{i+1}^{2j}} f(t)\,dt\right].$$

Далее рассмотрим сначала случай $x \in \Delta_{i+1}^{2j-1}$, тогда $\chi_n(x) = 2^{i/2}$. Поэтому

$$S_n f(x) = 2^i \int_{\Delta_i^j} f(t)\,dt + 2^i\left[\int_{\Delta_{i+1}^{2j-1}} f(t)\,dt - \int_{\Delta_{i+1}^{2j}} f(t)\,dt\right] = 2^{i+1}\int_{\Delta_{i+1}^{2j-1}} f(t)\,dt.$$

Если же $x \in \Delta_{i+1}^{2j}$, тогда $\chi_n(x) = -2^{i/2}$ и

$$S_n f(x) = 2^i \int_{\Delta_i^j} f(t)\,dt - 2^i \left[\int_{\Delta_{i+1}^{2j-1}} f(t)\,dt - \int_{\Delta_{i+1}^{2j}} f(t)\,dt \right] = 2^{i+1} \int_{\Delta_{i+1}^{2j}} f(t)\,dt.$$

Лемма доказана. □

5.5. Ряды Фурье–Хаара непрерывных функций

Непосредственным поводом для появления системы Хаара на свет явилось замечательное свойство, приведенное в следующей теореме. До этого ни одна из известных систем (например, тригонометрическая) таким свойством не обладала.

Теорема 17.18 (Хаар) *Ряд Фурье-Хаара любой функции $f \in C[0,1]$ сходится к f равномерно и справедлива оценка*

$$\|f - S_n f\|_C \leqslant \omega\left(\frac{2}{n}, f\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $x \in [0,1]$, тогда x принадлежит одному из промежутков (17.45). Обозначим этот промежуток Δ, тогда$|x-y| < 2^{-k} \leqslant \frac{2}{n}$ для любого $y \in \Delta$ и в силу леммы 17.12

$$|f(x) - S_n f(x)| = \left| f(x) - \frac{1}{\mu\Delta} \int_\Delta f(y)\,dy \right| = \left| \frac{1}{\mu\Delta} \int_\Delta [f(x) - f(y)]\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu\Delta} \int_\Delta |f(x) - f(y)|\,dy \leqslant \omega\left(\frac{2}{n}, f\right). \ \square$$

§ 6. Преобразование Фурье

6.1. Плотность ступенчатых функций

В этом параграфе мы рассматриваем комплекснозначные функции. Напомним , что $C_0(\mathbb{R}^d)$ обозначает класс всех непрерывных функций на $\mathbb{R}^d$ с компактным носителем (см. (17.7)).

Нам понадобится одно вспомогательное утверждение, которое является многомерным аналогом теоремы 17.18 и доказывается точно так же.

Для натурального $n \in \mathbb{N}$ и мультииндекса $\nu \in \mathbb{Z}^d$ обозначим

$$\Delta_n^\nu = \prod_{i=1}^d \left[\frac{\nu^i - 1}{2^n}, \frac{\nu^i}{2^n} \right).$$

Тогда семейство промежутков $\{\Delta_n^\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}^d}$ образует дизъюнктное разбиение $\mathbb{R}^d$

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{\nu\in\mathbb{Z}^d} \Delta_n^\nu, \quad \Delta_n^\nu \cap \Delta_n^{\nu'} = \varnothing \quad (\nu \neq \nu').$$

Для $n \in \mathbb{N}$ будем обозначать $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}^d)$ класс функций с компактным носителем, постоянных на каждом из промежутков Δ_n^ν. Кроме того, пусть

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_n(\mathbb{R}^d).$$

Функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ будем называть **ступенчатыми**.

Для функции $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ определим последовательность ступенчатых функций

$$H_n f(x) = \frac{1}{\mu\Delta_n^\nu}\int_{\Delta_n^\nu} f\,d\mu, \quad \text{при} \quad x \in \Delta_n^\nu, \quad (\nu \in \mathbb{Z}^d). \tag{17.47}$$

Ясно, что $H_n \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}^d)$. На самом деле функции определены корректно на классе $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, но они уже не обязаны иметь компактный носитель. Очевидна аналогия между (17.47) и суммами Фурье-Хаара (см. (17.46)).

Лемма 17.13 *Для любой функции $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ и всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$\|f - H_n f\|_C \leqslant \omega(\sqrt{d}2^{-n}, f)$$

В частности, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - H_n\|_C = 0$.

Доказательство. Это доказывается точно так же, как и теорема 17.18. □

Лемма 17.14 *Для любой функции $f \in L^p(E)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $H \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, что*

$$\|f - H\|_p < \varepsilon.$$

Доказательство. Утверждение леммы — непосредственное следствие теоремы 17.6 и леммы 17.13. □

6.2. Преобразование Фурье суммируемых функций

Напомним (см. (6.13)) определение скалярного произведения в $\mathbb{R}^d$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{d} x^k y^k.$$

Оно будет участвовать в центральном определении этого параграфа.

Определение 17.10 ***Преобразованием Фурье*** *функции* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *называется*

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(\xi,y)} f(y)\,dy, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{17.48}$$

Это определение корректно, так как $\left|e^{-2\pi i(\xi,y)}\right| = 1$ и под интегралом в (17.48) находится суммируемая функция.

Упражнение 17.9

1) Если $f = \chi_I$ — характеристическая функция сегмента $I = \prod\limits_{k=1}^{d} [a_k, b_k]$, то

$$\hat{\chi}_I(\xi) = \prod_{k=1}^{d} \frac{e^{-2\pi i\xi^k b^k} - e^{-2\pi i\xi^k a^k}}{2\pi\xi^k}$$

2) Если $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, то $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$.

Простейшие свойства преобразования Фурье собраны в следующей теореме.

Теорема 17.19 *Для любой функции* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$
1) $\|\hat{f}\|_C \leqslant \|f\|_{L^1}$,
2) преобразование Фурье $\hat{f}$ *равномерно непрерывно на* $\mathbb{R}^d$,
3) $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Доказательство. Доказательство 1) очевидно

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d} |e^{-2\pi i(\xi,y)} f(y)|\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\,dy = \|f\|_{L^1}.$$

Докажем 2):

$$|\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} [e^{-2\pi i(\xi+h,y)} - e^{-2\pi i(\xi,y)}] f(y)\,dy\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} [e^{-2\pi i(h,y)} - 1] e^{-2\pi i(\xi,y)} f(y)\,dy\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d} |e^{-2\pi i(h,y)} - 1| \cdot |f(y)|\,dy \to 0$$

при $|h| \to 0$ равномерно по ξ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости (см. теорему 16.15).

Доказательство 3) начнем со случая, когда $f = \chi_I$ — характеристическая функция сегмента $I = \prod\limits_{k=1}^{d} [a_k, b_k]$. Тогда наше утверждение вытекает из упражнения 17.9.1).

Отсюда оно сразу следует и для линейных комбинаций таких функций, в частности, для функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Для произвольной функции $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ зададим $\varepsilon > 0$ и по лемме 17.14 найдем функцию $H \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ так, чтобы $\|f - H\|_{L^1} < \varepsilon$. Тогда в силу 1)

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant |(f-H)\hat{\ }(\xi)| + |\hat{H}(\xi)| \leqslant \|f-H\|_{L_1} + |\hat{H}(\xi)| < \varepsilon + |\hat{H}(x)|$$

и второе слагаемое мало, если норма $|\xi|$ достаточно велика. □

6.3. Преобразование Фурье и операции анализа

Здесь мы хотим продемонстрировать, каким образом преобразование Фурье взаимодействует с другими преобразованиями, часто встречающимися в математическом анализе и других областях математики. Для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением достаточно гладких функций, хотя многие факты остаются справедливыми и при менее жестких ограничениях.

Начнем с операций в области определения функций. Введем преобразования **растяжения**

$$D_\lambda f(x) = f(\lambda x), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

и **сдвига**

$$T_h f(x) = f(x+h), \quad h \in \mathbb{R}^d.$$

Теорема 17.20
1) Если $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, то

$$(D_\lambda f)\hat{\ }(\xi) = \lambda^{-d}\hat{f}\big(\lambda^{-1}\xi\big)\,.$$

2) Если $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, то

$$(T_h f)\hat{\ }(\xi) = e^{2\pi i (h,\xi)}\hat{f}(\xi)$$

Доказательство. 1) Здесь достаточно аккуратно выполнить замену переменной

$$\widehat{(D_\lambda f)}\,(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(\xi,y)} f(\lambda y)\,dy = \begin{bmatrix} u = \lambda y \\ \mathbf{J}(y) = \lambda^{-d} \end{bmatrix} =$$

$$\lambda^{-d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\left(\frac{\xi}{\lambda},u\right)} f(u)\,du = \lambda^{-d}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

2) А здесь совсем просто

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(\xi,y)} f(y+h)\,dy = [u = y+h] =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(\xi,u-h)} f(u)\,du = e^{2\pi i(\xi,h)}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(\xi,u)} f(u)\,du. \;\square$$

Сверткой функций f и g называется преобразование

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy \tag{17.49}$$

Здесь для существования интеграла мы вынуждены предположить дополнительно, например, что $f, g \in C_0(\mathbb{R}^d)$. На самом деле, можно показать, что для любых функций $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ свертка (17.49) существует для почти всех $x \in \mathbb{R}^d$.

Упражнение 17.10
1) $f * g = g * f$,
2) $T_h(f * g) = T_h f * g$.

Теорема 17.21 *Если $f, g \in C_0(\mathbb{R}^d)$, то*

$$\widehat{(f * g)}\,(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi).$$

Доказательство. Здесь используем теорему Фубини (теорема 16.17)

$$\widehat{(f * g)}\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(x,y)} f(y-z)g(z)\,dy\,dz = [y = z + u] =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(x,z+u)} f(u)g(z)\,du\,dz = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(x,z)} g(z)\,dz \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(x,u)} f(u)\,du =$$

$$\hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x). \ \square$$

Одной из важнейших операций математического анализа является дифференцирование. В следующей теореме оно связывается с преобразованием Фурье.

Теорема 17.22 *1) Если $f, g \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$, то*

$$\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)}(\xi) = -2\pi i \xi^k \hat{f}(\xi)$$

2) Если $f, f\pi_k \in L^1(\mathbb{R}^d)$, то преобразование Фурье $\hat{f}$ имеет частную производную по ξ^k и

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi^k}(\xi) = -2\pi i \widehat{(f\pi_k)}(\xi)$$

Доказательство. 1) Это доказывается элементарным интегрированием по частям по переменной y^k в кратном интеграле, определяющем преобразование Фурье частной производной $\frac{\partial f}{\partial x^k}$.

2) Рассмотрим разностное отношение, предел которого равен частной производной

$$\frac{\hat{f}(x + te_k) - \hat{f}(x)}{t} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-2\pi i(x+te_k, y)} - e^{-2\pi i(x,y)}}{t} f(y)\,dy$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-2\pi i t y_k} - 1}{t} e^{-2\pi i (x,y)} f(y)\, dy \to -2\pi i \int\limits_{\mathbb{R}^d} y_k e^{-2\pi i (x,y)} f(y)\, dy$$

Предельный переход под знаком интеграла сейчас возможен в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (см. теорему 16.15). Условие мажорирования

$$\left| \frac{e^{-2\pi i t y_k} - 1}{t} e^{-2\pi i x \cdot y} f(y) \right| \leq |y_k| \cdot |f(y)|$$

выполнено, так как $f\pi_k \in L^1(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Предметный указатель

Именной указатель

Указатель обозначений

ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

1 семестр

№	Тема занятия	Вопросы, которые рассматриваются на занятии	Материальное обеспечение занятия (наглядные, методические пособия и др.)	Литера-тура
1	Элементы теории множеств	Множество и способы его задания. Отношения между множествами.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
2	Элементы теории множеств	Операции над множествами и их свойства.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
3	Аксиоматика вещественных чисел.	Аксиоматическое определение множества действительных чисел. Следствия аксиом действительных чисел. Свойства действительных чисел. Важнейшие подмножества $\mathbb{R}$. Натуральные, целые, рациональные, иррациональные числа.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
4	Грани числовых множеств.	Числовые множества и их границы. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Грани числовых множеств. Окрестность точки. Теорема о гранях	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
5	Числовая последователь-ность.	Понятие последовательности. Основные обозначения. Понятие предела, сходимости и расходимости. Свойства предела числовой последовательности. Теорема об общих свойствах предела.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
6	Предел числовой последователь-ности.	Теоремы о связи неравенств для пределов и неравенств для общих членов последовательности. Доказательство теоремы о неравенстве для общих членов как следствие неравенства для пределов. Теорема о сжатой переменной.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
7	Бесконечно малые и бесконечно большие последователь-ности.	Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства; обобщения сходящихся последовательностей. Теорема об арифметических операциях над б.м.п.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
8	Монотонные последователь-ности.	Предельный переход и арифметические операции над последовательностями. Монотонные последовательности. Число е.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
9	Асимптотичес-кое поведение	Сравнение асимптотического поведения последовательностей. О-символика для	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]

	последователь-ностей.	последовательностей.		
10	Подпоследова-тельности.	Лемма о вложенных отрезках. Подпоследовательности. Принцип выбора. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
11	Верхний и нижний предел.	Нижний и верхний пределы последовательности. Теоремы о верхнем и нижнем пределе.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
12	Функции действительной переменной. Основные классы функций.	Понятие отображения (функции). Типы отображений, композиция отображений. Функции действительной переменной, способы задания и график. Обратимые, монотонные, чётные, периодические функции.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
13	Предел функции.	Классификация точек множества. Предел функции (конечный и бесконечный, в конечных и бесконечных точках). Эквивалентность определений предела Гейне и Коши. Односторонние пределы.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
14	Общие свойства предела функции.	Арифметические операции и предельный переход. Предельный переход и неравенства.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
15	Бесконечно малые и бесконечно большие функции.	Определение и основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
16	Замечательные пределы. Предел композиции.	Первый и второй замечательные пределы. Некоторые важные пределы. Теорема о пределе композиции. Приложение к нахождению некоторых пределов.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
17	Сравнение асимптотичес-кого поведения функций.	О-символика, эквивалентность, асимптотическое равенство. Теорема об эквивалентных функциях	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
18	Предел монотонной функции.	Пределы монотонных функций. Верхний и нижний пределы функции. Критерий Коши для функций.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
19	Непрерывность функции.	Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация. Односторонняя и кусочная непрерывность. Определение непрерывности: в терминах $\varepsilon - \delta$, окрестностей, приращений.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
20	Свойства непрерывных	Локальные свойства непрерывных функций. Глобальные свойства	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]

	функций.	непрерывных функций. Теорема Больцано-Коши. Теоремы Вейерштрасса.		
21	Обратные функции.	Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
22	Равномерная непрерывность.	Равномерная непрерывность. Теорема Кантора. Непрерывность элементарных функций.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
23	Дифференциру-емые функции.	Дифференцируемые функции. Определение производной функции в точке. Условия дифференцируемости функции в точке. Геометрический и механический смысл производной. Касательная и нормаль.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
24	Производная и арифметические операции.	Односторонние и бесконечные производные. Производная и арифметические операции.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
25	Производная композиции.	Производная композиции. Производная обратной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
26	Производные функций, заданных параметрически и неявно.	Производные функций, заданных параметрически и неявно.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
27	Таблица производных.	Нахождение производных некоторых функций. Таблица производных.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
28	Основные теоремы дифференциаль-ного исчисления.	Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
29	Производные и дифференциалы высших порядков.	Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Неинвариантность формы высших дифференциалов.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
30	Формула Тейлора.	Локальная формула Тейлора. Единственность многочлена Тейлора. Представление остаточного члена в формуле Тейлора в формах Лагранжа и Коши.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
31	Разложение по формуле Маклорена важнейших элементарных функций.	Разложение по формуле Маклорена важнейших элементарных функций. Многочлен Тейлора как многочлен наилучшего приближения функции в окрестности данной точки.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
32	Исследование функций с	Признаки постоянства и монотонности функций. Экстремумы. Необходимые и	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]

	помощью производных.	достаточные условия экстремумов.		
33	Исследование функций с помощью производных.	Выпуклость графика функции. Аналитические условия выпуклости. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия перегиба.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
34	Исследование функций с помощью производных.	Асимптоты графика функции. Построение эскизов графиков функций.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]

2 семестр

№	Тема занятия	Вопросы, которые рассматриваются на занятии	Материальное обеспечение занятия (наглядные, методические пособия и др.)	Литера-тура
1	Первообразная.	Первообразная функция и ее основные свойства. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
2	Методы неопределенного интегрирования.	Общие методы неопределенного интегрирования. Метод разложения. Метод внесения под знак дифференциала.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
3	Методы неопределенного интегрирования.	Метод подстановки. Метод интегрирования «по частям».	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
4	Интегрирование рациональных функций.	Постановка задачи интегрирования в конечном виде. Разложение рациональных функций на простейшие дроби. Интегрирование простейших дробей. Интегралы от рациональных функций.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
5	Метод Остроградского.	Метод Остроградского выделения рациональной части интеграла.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
6	Интегрирование тригонометричес ких функций.	Интегрирование функций, рационально зависящих от $\sin x$, $\cos x$. Применение универсальной подстановки. Некоторые частные случаи для $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$. Интегрирование функций, рационально зависящих от $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
7	Интегрирование иррациональных функций.	Интегрирование дробно-линейных иррациональностей. Интегрирование квадратичных иррациональностей. Подстановки Эйлера.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
8	Интегрирование иррациональных функций.	Интегрирование квадратичных иррациональностей. Выделение алгебраической части интеграла. Интегрирование дифференциальных	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]

		биномов.		
9	Определенный интеграл.	Понятие определенного интеграла. Необходимое условие интегрируемости функции в смысле Римана. Определение и свойства сумм Дарбу. Критерий Дарбу. Некоторые классы интегрируемых функций.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
10	Свойства определенного интеграла.	Покрытия множеств. Счетное множество. Множество меры нуль. Критерий Лебега. Свойства интеграла Римана. Интегрируемость модуля функции. Интегрируемость произведения функций.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
11	Оценка определенного интеграла.	Оценка интегралов. Первая теорема о среднем.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
12	Формула Ньютона–Лейбница.	Формула Ньютона-Лейбница. Существование первообразной.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
13	Замена переменной в определенном интеграле.	Замена переменной в определенном интеграле. Интегралы от чётных, нечётных и периодических функций.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
14	Интегрирование «по частям».	Интегрирование «по частям» в определенном интеграле. Вторая теорема о среднем.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
15	Площадь криволинейной трапеции.	Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^2$. Многоугольные фигуры. Квадрируемые фигуры. Критерии квадрируемости плоских фигур. Площадь криволинейной трапеции.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
16	Вычисление площадей и объемов.	Площадь криволинейного сектора. Вычисление объемов пространственных тел.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
17	Нахождение длины кривой.	Кривые и их классы. Длина кривой.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
18	Площадь поверхности вращения.	Площадь поверхности вращения.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
19	Метрические пространства.	Метрические пространства. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
20	Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.	Сходимость в $\mathbb{R}^n$. Полнота $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$. Компактность и связность в $\mathbb{R}^n$.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
21	Пределы отображений $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.	Пределы отображений $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Повторные пределы.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
22	Непрерывность	Непрерывность отображений $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.	Электронный учебник;	[3], [4]

	отображений $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.	Локальные свойства непрерывных отображений.	лабораторный практикум.	
23	Непрерывность отображений $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.	Глобальные свойства непрерывных отображений.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
24	Производная и дифференциал функции многих переменных.	Глобальные свойства непрерывных отображений.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
25	Общие правила дифференцирования.	Общие правила дифференцирования. Частные производные. Матрица Якоби.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
26	Дифференцирование композиции функций.	Дифференцирование композиции функций. Дифференциал и частные производные сложной вещественнозначной функции.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
27	Производная по вектору и градиент функции.	Производная по вектору и градиент функции.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
28	Теорема о среднем.	Теорема о среднем. Достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
29	Частные производные и дифференциалы высших порядков.	Частные производные высшего порядка. Дифференциалы высших порядков и формула Тейлора.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
30	Локальные экстремумы скалярных функций многих переменных.	Необходимое и достаточное условие локального экстремума.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
31	Неявные функции	Неявные функции скалярного аргумента: существование, единственность, непрерывность, дифференцируемость. Неявные функции векторного аргумента.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
32	Теорема об обратной функции.	Теорема об обратной функции.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
33	Метод Лагранжа.	Метод Лагранжа исследования функции на условный экстремум.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
34	Геометрические приложения.	График функции и криволинейные координаты. Касательная плоскость. Нормальный вектор и касательный вектор к графику функции. Геометрический смысл частных производных и полного дифференциала.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]

3 семестр

№	Тема занятия	Вопросы, которые рассматриваются на занятии	Материальное обеспечение занятия (наглядные, методические пособия и др.)	Литера-тура
1	Понятие числового ряда. Простейшие операции над рядами.	Числовой ряд, общий член, частичная сумма, остаток, отрезок ряда, сходимость, сумма ряда. Примеры. Теоремы: Об умножении членов ряда на число, О группировке членов ряда, О перестановке конечного числа членов ряда.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
2	Критерии сходимости числовых рядов.	Критерий Коши, Необходимый признак сходимости, Критерий сходимости в терминах остатков, Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
3	Признаки сравнения для числовых рядов с неотрицательны ми членами.	Мажорантный признак сравнения, Признак сравнения в предельной форме, Признак сравнения отношений.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
4	Интегральный признак сходимости числовых рядов. Признаки Коши и Даламбера для числовых рядов.	Интегральный признак Маклорена–Коши. Теорема о сходимости обобщенного гармонического ряда, Степенной признак сравнения. Признаки Коши и Даламбера для числовых рядов.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
5	Признак Куммера сходимости числовых рядов и следствия из него.	Признак Куммера. Признак Куммера в предельной форме. Признак Даламбера, Признак Раабе, Признак Бертрана, Признак Гаусса.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
6	Знакоперемен-ные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов.	Теоремы об абсолютной сходимости. Теорема об условной сходимости. Признак Лейбница. Преобразование Абеля, Неравенство Абеля, Признак Абеля, Признак Дирихле.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
7	Поточечная	Определения функциональной	Электронный учебник;	[3], [4]

	сходимость функциональных последователь-ностей и рядов.	последовательности, функционального ряда, их поточечной сходимости, области сходимости. Основные проблемы теории ФП и ФР.	лабораторный практикум.	
8	Равномерная сходимость функциональных последователь-ностей и рядов. Критерии равномерной сходимости.	Понятие равномерной сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости ФП (ФР), Общий критерий равномерной сходимости ФП (ФР). Теоремы о сумме равномерно сходящихся ФП (ФР) и умножении на ограниченную функцию.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
9	Достаточные признаки равномерной сходимости функциональных рядов.	Признак Вейерштрасса, Признак Дирихле. Признак Абеля.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
10	Почленный переход к пределу. Непрерывность суммы функционально-го ряда.	Теорема о почленном переходе к пределу ФР (ФП). Теорема о непрерывности суммы функционального ряда (последовательности). Признак Дини.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
11	Почленное интегрирование и дифференциро-вание функциональных последователь-ностей и рядов.	Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании ФР и ФП.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
12	Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда.	1-я теорема Абеля. Теорема о множестве сходимости числового ряда, Теорема о радиусе сходимости числового ряда.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
13	Непрерывность суммы степенного ряда, почленное интегрирование и дифференциро-вание степенных рядов.	Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Теорема о непрерывности суммы степного ряда. 2-я теорема Абеля. Теорема о почленном интегрировании степенного ряда, О почленном дифференцировании, О бесконечной дифференцируемости.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
14	Разложение функции в	Ряд Тейлора. Единственность разложения в степенной ряд, Следствия,	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]

	степенной ряд. Разложение в степенной ряд некоторых элементарных функций. Понятие об аналитических функциях.	Критерий представимости функции рядом Тейлора, Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Разложения функций в ряд Тейлора: $e^x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \sin x, \cos x, \frac{1}{1 \mp x}$, $\ln(1 \pm x), arctg\, x,\ (1+x)^{\alpha}$.		
15	Понятие несобственного интеграла.	НИ по бесконечному промежутку. НИ от неограниченных функций. Определение НИ в общем случае. Интегральный признак сходимости числовых рядов.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
16	Несобственные интегралы от неотрицатель-ных функций. Признаки сравнения.	Критерий сходимости НИ от неотрицательных функций. Мажорантный признак сравнения. Признак сравнения в предельной форме. Степенной признак сравнения.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
17	Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Абеля и Дирихле.	Критерий Коши сходимости НИ, Теорема об абсолютной сходимости. Признак Дирихле. Признак Абеля.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
18	Главное значение несобственного интеграла.	Главное значение несобственного интеграла. Связь сходимости в смысле главного значения и в обычном смысле.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
19	Интегралы Римана, зависящие от параметра.	Теорема о непрерывности СИЗОП, О предельном переходе под знаком интеграла. Теорема об интеграле с переменными пределами. Теорема о дифференцируемости СИЗОП, О вычислении интеграла от СИЗОП. Теорема о дифференцируемости СИЗОП с переменными пределами.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
20	Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость.	НИЗОП. Основные вопросы теории НИЗОП. Равномерная сходимость. Общий критерий равномерной сходимости НИЗОП, Критерий Коши.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
21	Достаточные признаки сходимости	Признак Вейерштрасса, Признак Абеля, Признак Дирихле. Признак Дини.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]

	несобственных интегралов, зависящих от параметра.			
22	Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра.	Теорема о непрерывности НИЗОП. Теорема о дифференцируемости по параметру. Теорема об интегрируемости по параметру. Равносильность равномерной сходимости НИЗОП и ФП. Равносильность равномерной сходимости и непрерывности интеграла, Теоремы об изменении порядка двух несобственных интегрирований.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
23	Интегралы Эйлера–Пуассона и Дирихле. Интегралы Фруллани.	Интегралы Эйлера–Пуассона и Дирихле. Интегралы Фруллани.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
24	Г-функция и ее свойства. В-функция и ее свойства. Формула Стирлинга.	Г-функция и ее свойства. В-функция и ее свойства. Формула Стирлинга.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
25	Некоторые задачи, приводящие к кратному интегрированию. Определение n-кратного интеграла по брусу.	Задача об объеме цилиндрического тела, задача о массе неоднородного тела. Определение интеграла по брусу.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
26	Условия существования n-кратного интеграла по брусу. Простейшие свойства n-кратного интеграла по брусу.	Суммы Дарбу и их свойства. Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывной функции. Критерий Лебега. Простейшие свойства n-кратного интеграла по брусу.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
27	Измеримые по Жордану множества. Характеристи-ческая функция	Измеримые по Жордану множества. Характеристическая функция множества. Лемма о точках разрыва характеристической функции.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]

	множества.			
28	Интегралы по множествам из $\mathbb{R}^n$.	Определение интеграла по множеству. Теорема о независимости интеграла от выбора бруса, Критерий Лебега. Теорема о мере Жордана измеримых множеств.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
29	Некоторые свойства интеграла по измеримому множеству. Постановка вопроса сведения кратного интеграла к повторному.	Свойства кратного интеграла. Задача об объеме цилиндрического тела. Повторный интеграл. Постановка вопроса сведения кратного интеграла к повторному.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
30	Теорема Фубини. Некоторые следствия из теоремы Фубини.	Теорема Фубини. Некоторые следствия из теоремы Фубини. Примеры сведения кратных интегралов к повторным в разных случаях.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
31	Выражение площади в криволинейных координатах. Замена переменных в кратных интегралах.	Выражение площади в криволинейных координатах. Замена переменных в кратных интегралах.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
32	Переход к полярным, цилиндрическим и сферическим координатам.	Переход к полярным, цилиндрическим и сферическим координатам.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
33	Понятие о несобственных кратных интегралах.	Понятие о несобственных кратных интегралах. Теорема о сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции. Вычисление интеграла Эйлера–Пуассона с помощью кратных несобственных интегралов.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
34	Геометрические и физические приложения кратных интегралов.	Площадь поверхности. Масса и центр тяжести неоднородной пластины (неоднородного тела).	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]

4 семестр

№	Тема занятия	Вопросы, которые рассматриваются на занятии	Материальное обеспечение занятия (наглядные, методические пособия и др.)	Литера-тура
1	Определение криволинейного интеграла I рода и его вычисление.	Основные определения, относящиеся к понятию кривой. Дифференциал длины дуги. Натуральный параметр. Носитель кривой, КРИ-I, Теорема о существовании и вычислении КРИ-I по параметрически заданной кривой – с доказательством. Вычисление КРИ-I по кривой, заданной явно и в полярных координатах.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
2	Основные свойства криволинейных интегралов I рода и их приложения.	Инвариантность, независимость от ориентации, линейность, аддитивность. Оценка КРИ-I. Распространение КРИ-I на кусочно-гладкие кривые. Площадь цилиндрической поверхности, масса и центр масс неоднородного стержня.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
3	Определение криволинейного интеграла II рода и его вычисление. Основные свойства криволинейных интегралов II рода и их физические приложения.	КРИ-II вдоль плоских и пространственных кривых. Теорема о существовании и вычислении КРИ-II по параметрически заданной кривой. Вычисление КРИ-II по явно заданной кривой. Векторная запись КРИ-II. Интеграл по противоположному направлению. Связь КРИ-I и КРИ-II. Работа силового поля вдоль пути.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
4	Формула Грина. Выражение площади криволинейным интегралом.	Области и простые области в $\mathbb{R}^2$. Формула Грина. Выражение площади криволинейным интегралом.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
5	Первообразная в области. Интегралы по гомотопным кривым.	Полный дифференциал в области. Первообразная. Общая формула первообразных. Формула Ньютона-Лейбница для КРИ-II. Независимость интеграла от пути. Теорема о существовании локальной первообразной. Односвязные, многосвязные и бесконечносвязные области. Первообразная в односвязной и	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]

		многосвязной области. Условия независимости КРИ-II от пути в односвязной области. Гомотопность кривых с общими концами и замкнутых кривых. Теорема об интегралах по гомотопным кривым.		
6	Вычисление площади поверхности. Поверхностный интеграл I рода.	Параметризованная поверхность в $\mathbb{R}^3$. Гладкая поверхность. Явное задание поверхности. Теорема о гладкости явно заданной поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Направляющие косинусы нормали. Теорема о площади поверхности, заданной явно. Теорема о площади поверхности, заданной параметрически. Определение ПОВИ-I. Теорема о вычислении ПОВИ-I в случае явного задания поверхности. Основные свойства ПОВИ-I.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
7	Определение поверхностного интеграла II рода и его вычисление.	Двусторонняя поверхность. Сторона ориентируемой поверхности. Односторонняя поверхность. Некоторые свойства двусторонних поверхностей. Определение ПОВИ-II. Теорема о вычислении ПОВИ-II в случае явного задания поверхности.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
8	Основные свойства поверхностных интегралов II рода.	Зависимость от выбора стороны, ПОВИ-II по цилиндрической поверхности, линейность, аддитивность, связь ПОВИ-II и ПОВИ-I, краткая запись в векторном виде, выражение ПОВИ-II в случае параметрического задания поверхности.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
9	Формула Стокса. Формула Остроградского.	Простейшая поверхность. Согласование стороны поверхности и ориентации границы. Формула Стокса. Путь, контур, простой контур. Замкнутая поверхность. Односвязная область в $\mathbb{R}^3$. Теорема о криволинейных интегралах в односвязных областях. Стандартная ориентация границы. Простая область. Теорема Остроградского. Выражение объема поверхностным интегралом.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
10	Основные понятия теории поля.	Градиент скалярного поля и его физический смысл. Поток и дивергенция векторного поля. Циркуляция и ротор векторного поля. Потенциальное поле.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
11	Понятие гармонического	Понятие гармонического анализа. Ортогональные системы функций.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]

	анализа. Ряды Фурье.	Тригонометрическая система функций. Ортогональные ряды. Ряды Фурье.		
12	Ряды Фурье.	Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье. Принцип локализации. Условия точечной сходимости ряда Фурье и вычисление его суммы.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
13	Разложение функций в ряд Фурье.	Некоторые классы функций, для которых ряд Фурье сходится поточечно. Условия Гёльдера и Липшица. Разложение функций в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Разложение функций в ряд Фурье на произвольном промежутке.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
14	Экстремальные свойства частичных сумм ряда Фурье.	Среднеквадратичное отклонение. Экстремальное свойство. Неравенство Бесселя (для общего случая и для ОТС). Сходимость в среднем. Равенство Парсеваля.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
15	Достаточные условия равномерной сходимости ряда Фурье.	Достаточные условия равномерной сходимости ряда Фурье. Ядро Фейера и его свойства. Равномерное приближение непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими полиномами.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
16	Интеграл Фурье.	Полнота и замкнутость тригонометрической системы. Почленное интегрирование ряда Фурье. Интеграл Фурье. Исследование сходимости интеграла Фурье.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]
17	Преобразование Фурье.	Преобразование Фурье в вещественной области. Преобразование Фурье в комплексной области.	Электронный учебник; лабораторный практикум.	[3], [4]

КОНТРОЛЬ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

1. Предел последовательности
2. Предел и непрерывность функции.
3. Производная и дифференциал. Применение производных для исследования функций.
4. Неопределенный интеграл. Методы неопределенного интегрирования.
5. Определенный интеграл и его приложения.
6. Предел и непрерывность функций многих переменных.
7. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.
8. Числовые ряды.
9. Функциональные последовательности и ряды.
10. Несобственные интегралы. Собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра.
11. Криволинейные интегралы.
12. Поверхностные интегралы. Элементы теории поля.
13. Ряды Фурье. Интеграл Фурье.

ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Используя определение предела последовательности, доказать, что:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n + 5 \cdot 2^n} = 0.$$

2. Доказать, что последовательность расходится. Найти ее верхний и нижний предел:

$$x_n = 3 - \sin \frac{\pi n}{4}.$$

3. С помощью критерия Коши доказать, что последовательность сходится:

$$x_n = \frac{n}{2n-1}.$$

4. Найти пределы последовательностей:

$$4.1) \quad \frac{(n+2)^3 - n(n-2)^2}{n^2+n};$$

$$4.2) \quad \frac{\sqrt[n]{8n^3} - 1}{\sqrt[n]{2n} - 1};$$

$$4.3) \quad \frac{n \sin(n!)}{\sqrt{n^3+1}};$$

$$4.4) \quad \left(\frac{2n^2+3n+4}{2n^2-5n+7}\right)^n;$$

$$4.5) \quad \frac{\log_2 n + n + 5}{\sqrt[24]{n} + \sqrt{n^3} + 3};$$

$$4.6) \quad x_1 = 0,5; \quad x_{n+1} = \frac{x_n+1}{x_n+2}.$$

5. Если функция $|f(x)|$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то может ли функция $f(x)$ быть разрывной на отрезке $[a;b]$? (Если «нет» – докажите, если «да» – приведите пример).

6. Выяснить, существует ли предел:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} \frac{3}{4x^2}.$$

7. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2-x}, & |x| < 2, \\ 2, & x = 2, \\ \sin\frac{2}{2-x}, & x > 2, \\ \operatorname{arctg}\frac{x}{2}, & x \leqslant -2. \end{cases}$$

8. Найти пределы:

$$8.1)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}\right)^{\frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}};$$

$$8.2)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-5x+2}{x^2+2x-15}\right)^{2x^2-5};$$

$$8.3)\quad \lim_{x\to 0}\frac{4\arcsin x}{\operatorname{tg}4x+\operatorname{tg}9x};$$

$$8.4)\quad \lim_{x\to 0}\frac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2};$$

$$8.5)\quad \lim_{x\to -1}\frac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e};$$

$$8.6)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt[3]{2x^2+1}}{x+2\sin x};$$

$$8.7)\quad \lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}).$$

9. Найти производную функции:

$$f(x)=\frac{a^x}{1+a^{2x}}-\frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arctg}a^{-x}.$$

10. Найти производную функции:

$$f(x)=\frac{x\mathrm{e}^x\operatorname{arctg}x}{\ln^5 x}.$$

11. С помощью формулы Лейбница найти производную:

$$((x^2+1)\sin x)^{(20)}.$$

12. Для функции, заданной параметрически, найти производную второго порядка y''_{xx}:

$$x(t)=a\cos 2t;\quad y(t)=a\cos 3t.$$

13. Для функции, заданной неявно, найти производную y'_x:

$$x+\sqrt{xy}+y=a.$$

14. Применяя правило Лопиталя, найти предел функции:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}.$$

15. Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в указанной точке:

$$y=\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1},\qquad x=0.$$

16. Представить формулой Маклорена функцию:

$$f(x)=\frac{1}{x^4-2x^2-3}.$$

17. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x + 1}{1 - x^2}}\, dx$$

18. Найти неопределенный интеграл:

$$\int x^3 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

19. Найти неопределенный интеграл:

$$\int x^2 \arccos x\, dx$$

20. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x\, dx}{(x+1)(x^2+x+3)}$$

21. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}}\, dx$$

22. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x - 2}$$

23. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\, dx$$

24 Найти $\int\limits_1^2 x^2 dx$ с помощью интегральных сумм. Выполнить проверку формулой Ньютона–Лейбница.

25. С помощью определенного интеграла найти предел последовательности

$$s_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \qquad \alpha > 0.$$

26. Доказать неравенство

$$0 < \int\limits_0^{200} \frac{e^{-5x} dx}{x + 20} < 0{,}01.$$

27. Вычислить определенные интегралы:

$$\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx; \qquad \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos x}.$$

28. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = |\log_a x|, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{a}, \quad x = a, \qquad (a > 1).$$

29. Найти длину дуги кривой:

$$y = \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq a;$$

30. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной данными кривыми:

$$xy = a^2, \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = 2a.$$

31. Криволинейный треугольник ограничен дугой окружности $x^2 + y^2 = 2$ и графиком функции $y = \sqrt{|x|}$. Найдите периметр и площадь этого криволинейного треугольника.

32. Вычислить двойной предел и повторные пределы функции

$$\frac{\cos x}{1 + y}$$

при $x \to \infty$ и $y \to \infty$.

33. Исследовать функцию на дифференцируемость в точке $(0; 0)$:

$$f = \ln(2 - |x|^{7/6} + |y|^{5/4}).$$

34. Проверить, удовлетворяют ли заданному уравнению частные производные функции двух переменных $u(x, y)$:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xyu = 0, \qquad u = e^{xy}.$$

35. Для функции $z = f(x, y)$ выполнить:
а) Найти величину и направление градиента функции в точке $A(4, 1)$;
б) Найти производную в точке $B(1, 2)$ по направлению вектора $\vec{a}(5, 1)$;
в) Исследовать функцию на локальный экстремум.

$$z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10.$$

36. Составить уравнения нормали и касательной плоскости к поверхности

$$5x^3 - y^3 + z^2 + 2xy - 6z^2 - 1 = 0$$

в точке $M(1, 1, 1)$.

37. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции

$$u = f(e^{xy}, x^2 + y).$$

38. Преобразовать уравнение к новым независимым переменным u, v:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad x = \frac{u + v}{2}, \; y = \frac{u - v}{2}.$$

39. Рассмотрев предел частичной суммы ряда, установить его сходимость и величину суммы или расходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n-3}.$$

40. Применяя различные признаки, исследовать сходимость рядов:

$$40.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2+2n)}{3^n+n^2};$$

$$40.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{n+7}{n+5};$$

$$40.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)};$$

$$40.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}(2n)!}{n^n n!};$$

$$40.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2};$$

$$40.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin\frac{\pi n}{4}.$$

41. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}};$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^7 n}{n}.$$

42. Доказать, что последовательность $(f_n(x))$ равномерно сходится на множестве E:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}, \qquad E = \mathbb{R}.$$

43. Исследовать последовательность $(f_n(x))$ на сходимость и равномерную сходимость на множествах E_1, E_2:

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{nx}{1+n^2x^2}, \qquad E_1 = (0;+\infty),\ E_2 = (\delta;+\infty)\ (\delta > 0).$$

44. Найти область сходимости и область абсолютной сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-n\sin x}.$$

45. Доказать равномерную сходимость функционального ряда в указанном промежутке:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^{3/2}x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

46. Найти радиус сходимости и интервал сходимости степенного ряда, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость в концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n}(x+1)^n.$$

47. Разложить функцию в ряд Маклорена и указать радиус сходимости полученного ряда:

$$\frac{x^2}{(1+x)^2}; \qquad \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

48. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}; \qquad \int\limits_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx; \qquad \int\limits_0^{+\infty} x\,2^{-x}dx; \qquad v.p.\int\limits_{1/e}^{e} \frac{dx}{x\ln x}.$$

49. Исследовать интеграл на абсолютную и условную сходимость:

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{\cos^3 \ln x}{x \ln x}dx.$$

50. Найти область сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметров:

$$\int\limits_0^1 \operatorname{tg}^{\alpha} x\,(1-2x+x^2)^{\beta}dx.$$

51. Найти $F'(\alpha)$, если:

$$F(\alpha) = \int\limits_{\operatorname{ch}\alpha}^{\operatorname{sh}\alpha} \ln(1+x^2+\alpha^2)dx.$$

52. Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ равномерно сходится на множестве E:

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)\cdot\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2}dx; \qquad E=[-\delta,\delta], \quad \delta>0.$$

53. Исследовать интеграл $I(\alpha)$ на равномерную сходимость на множестве E:

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}dx; \qquad E=[0;1].$$

54. Вычислить массу дуги четверти окружности

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

расположенной в первой четверти, если ее линейная плотность в каждой точке пропорциональна квадрату абсциссы этой точки, с коэффициентом m.

55. Вычислить

$$\int\limits_L (4y+4)dx + (3x+3y+4)dy,$$

где L – контур треугольника $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y = 6$, и результат проверить при помощи формулы Грина.

56. Вычислить

$$\int\limits_{(1,1)}^{(4,9)} \left(3x^2 - 3y^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right) dx + \left(-6xy + \frac{1}{2\sqrt{xy}}\right) dy.$$

57. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S z^4 ds,$$

где S – боковая поверхность конуса $4(x^2 + y^2) = z^2$, $0 \le z \le 2$.

58. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_\sigma y^2 dz dx,$$

σ – внутренняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y \ge 0$.

59. Найти поток Π векторного поля $\vec{a} = 2x\,\vec{i} - y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ через незамкнутую поверхность S в направлении внешней нормали $\vec{n}$, используя формулу Гаусса-Остроградского. S – боковая поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, расположенная между плоскостями $z = 0$ и $z = H$.

60. Вычислить $\mathbf{rot}(\vec{c} \times \vec{r})$, где $\vec{c}$ – постоянный вектор, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

61. Разложить функцию $f(x) = \sin\frac{x}{4}$ в ряд Фурье по основной тригонометрической системе.

62. Функцию $f(x) = x$ разложить на отрезке $[0, 2]$ в ряд Фурье по косинусам.

63. Представить функцию интегралом Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-5, 5], \\ 0, & x \notin [-5, 5]. \end{cases}$$

64. С помощью криволинейного интеграла вычислить площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

1 семестр

1. Элементы теории множеств.
2. Аксиоматика вещественных чисел.
3. Свойства действительных чисел. Важнейшие подмножества $\mathbb{R}$.
4. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Грани числовых множеств. Теорема о гранях.
5. Предел числовой последовательности.
6. Свойства предела числовой последовательности.
7. Предел последовательности и неравенства.
8. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
9. Предельный переход и арифметические операции над последовательностями.
10. Монотонные последовательности. Число e.
11. Сравнение асимптотического поведения последовательностей.
12. О-символика для последовательностей.
13. Лемма о вложенных отрезках. Подпоследовательности. Принцип выбора.
14. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.
15. Нижний и верхний пределы последовательности. Теоремы о верхнем и нижнем пределе.
16. Отображения и их основные типы. Функция действительной переменной.
17. Основные классы функций.
18. Предел функции. Определения Гейне и Коши.
19. Односторонние пределы. Эквивалентность определений предела Гейне и Коши.
20. Общие свойства предела функции. Арифметические операции и предельный переход. Предельный переход и неравенства.
21. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
22. Замечательные пределы.
23. Теорема о пределе композиции. Приложение к нахождению некоторых пределов.
24. Сравнение асимптотического поведения функций.
25. Пределы монотонных функций. Верхний и нижний пределы функции.
26. Критерий Коши для функций.
27. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация. Односторонняя и кусочная непрерывность.
28. Локальные свойства непрерывных функций.
29. Глобальные свойства непрерывных функций. Теорема Больцано-Коши.
30. Глобальные свойства непрерывных функций. Теоремы Вейерштрасса.
31. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.
32. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.
33. Непрерывность элементарных функций.

34. Дифференцируемые функции. Определение производной функции в точке. Условия дифференцируемости функции в точке.
35. Геометрический и механический смысл производной. Касательная и нормаль.
36. Односторонние и бесконечные производные.
37. Производная и арифметические операции.
38. Производная композиции. Производная обратной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.
39. Производные функций, заданных параметрически и неявно.
40. Нахождение производных некоторых функций. Таблица производных.
41. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши).
42. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.
43. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Неинвариантность формы высших дифференциалов.
44. Локальная формула Тейлора. Единственность многочлена Тейлора.
45. Представление остаточного члена в формуле Тейлора в формах Лагранжа и Коши.
46. Разложение по формуле Маклорена важнейших элементарных функций.
47. Многочлен Тейлора как многочлен наилучшего приближения функции в окрестности данной точки.
48. Признаки постоянства и монотонности функций.
49. Экстремумы. Необходимые и достаточные условия экстремумов.
50. Выпуклость графика функции. Аналитические условия выпуклости.
51. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия перегиба.
52. Асимптоты графика функции. Построение эскизов графиков функций.

2 семестр

1. Первообразная функция и ее основные свойства. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства.
2. Общие методы неопределенного интегрирования. Метод разложения. Метод внесения под знак дифференциала.
3. Общие методы неопределенного интегрирования. Метод подстановки. Метод интегрирования «по частям».
4. Постановка задачи интегрирования в конечном виде. Разложение рациональных функций на простейшие дроби.
5. Интегрирование простейших дробей. Интегралы от рациональных функций.
6. Метод Остроградского выделения рациональной части интеграла.
7. Интегрирование функций, рационально зависящих от $\sin x$, $\cos x$. Применение универсальной подстановки. Некоторые частные случаи для $\int R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$.
8. Интегрирование функций, рационально зависящих от $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.
9. Интегрирование квадратичных иррациональностей. Подстановки Эйлера.

10. Интегрирование квадратичных иррациональностей. Выделение алгебраической части интеграла.
11. Интегрирование дифференциальных биномов.
12. Понятие определенного интеграла. Необходимое условие интегрируемости функции в смысле Римана.
13. Определение и свойства сумм Дарбу.
14. Критерий Дарбу. Некоторые классы интегрируемых функций.
15. Покрытия множеств. Счетное множество. Множество меры нуль. Критерий Лебега.
16. Свойства интеграла Римана.
17. Интегрируемость модуля функции. Интегрируемость произведения функций.
18. Оценка интегралов. Первая теорема о среднем.
19. Формула Ньютона-Лейбница. Существование первообразной.
20. Замена переменной в определенном интеграле. Интегралы от чётных, нечётных и периодических функций.
21. Интегрирование «по частям» в определенном интеграле. Вторая теорема о среднем.
22. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^2$.
23. Многоугольные фигуры. Квадрируемые фигуры.
24. Критерии квадрируемости плоских фигур. Площадь криволинейной трапеции.
25. Площадь криволинейного сектора. Вычисление объемов пространственных тел.
26. Кривые и их классы.
27. Длина кривой.
28. Площадь поверхности вращения.
29. Метрические пространства.
30. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.
31. Сходимость в $\mathbb{R}^n$. Полнота $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$.
32. Компактность и связность в $\mathbb{R}^n$.
33. Пределы отображений $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
34. Повторные пределы.
35. Непрерывность отображений $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Локальные свойства непрерывных отображений.
36. Непрерывность отображений $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Глобальные свойства непрерывных отображений.
37. Понятие производной и дифференциала функции многих переменных. Простейшие свойства дифференцируемых отображений.
38. Общие правила дифференцирования.
39. Частные производные.
40. Матрица Якоби.
41. Дифференцирование композиции функций. Дифференциал и частные производные сложной вещественнозначной функции.
42. Производная по вектору и градиент функции.
43. Теорема о среднем. Достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных.

44. Частные производные высшего порядка.
45. Дифференциалы высших порядков и формула Тейлора.
46. Необходимое и достаточное условие локального экстремума.
47. Неявные функции скалярного аргумента: существование, единственность, непрерывность, дифференцируемость.
48. Неявные функции векторного аргумента.
49. Теорема об обратной функции.
50. Метод Лагранжа исследования функции на условный экстремум.
51. График функции и криволинейные координаты. Касательная плоскость.
52. Нормальный вектор и касательный вектор к графику функции.
53. Геометрический смысл частных производных и полного дифференциала.

3 семестр

1. Понятие числового ряда. Простейшие операции над рядами.
2. Критерии сходимости числовых рядов.
3. Признаки сравнения для числовых рядов с неотрицательными членами.
4. Интегральный признак сходимости числовых рядов.
5. Признаки Коши и Даламбера для числовых рядов.
6. Признак Куммера сходимости числовых рядов и следствия из него.
7. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
8. Признаки Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов.
9. Поточечная сходимость функциональных последовательностей и рядов.
10. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерии равномерной сходимости.
11. Достаточные признаки равномерной сходимости функциональных рядов.
12. Почленный переход к пределу. Непрерывность суммы функционального ряда.
13. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.
14. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда.
15. Непрерывность суммы степенного ряда, почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
16. Разложение функции в степенной ряд.
17. Разложение в степенной ряд некоторых элементарных функций. Понятие об аналитических функциях.
18. Понятие несобственного интеграла.
19. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признаки сравнения.
20. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Абеля и Дирихле.
21. Главное значение несобственного интеграла.
22. Интегралы Римана, зависящие от параметра.
23. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость.
24. Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

25. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра.
26. Интегралы Эйлера–Пуассона и Дирихле. Интегралы Фруллани.
27. Г-функция и ее свойства.
28. В-функция и ее свойства. Формула Стирлинга.
29. Некоторые задачи, приводящие к кратному интегрированию. Определение n-кратного интеграла по брусу.
30. Условия существования n-кратного интеграла по брусу.
31. Простейшие свойства n-кратного интеграла по брусу.
32. Измеримые по Жордану множества. Характеристическая функция множества.
33. Интегралы по множествам из $\mathbb{R}^n$.
34. Некоторые свойства интеграла по измеримому множеству. Постановка вопроса сведения кратного интеграла к повторному.
35. Теорема Фубини.
36. Некоторые следствия из теоремы Фубини.
37. Выражение площади в криволинейных координатах.
38. Замена переменных в кратных интегралах.
39. Переход к полярным, цилиндрическим и сферическим координатам.
40. Понятие о несобственных кратных интегралах.

4 семестр

1. Основные определения, относящиеся к понятию кривой. Дифференциал длины дуги. Натуральный параметр.
2. Определение криволинейного интеграла I рода и его вычисление.
3. Основные свойства криволинейных интегралов I рода и их приложения.
4. Определение криволинейного интеграла II рода и его вычисление.
5. Основные свойства криволинейных интегралов II рода и их физические приложения.
6. Формула Грина. Выражение площади криволинейным интегралом.
7. Первообразная в области. Условия существования локальной первообразной.
8. Первообразная в односвязной и многосвязной области. Условия независимости криволинейного интеграла от пути в односвязной области.
9. Интегралы по гомотопным кривым.
10. Определение и способы задания поверхности в $\mathbb{R}^3$. Направляющие косинусы нормали к поверхности.
11. Вычисление площади поверхности, заданной явно. Вычисление площади поверхности, заданной параметрически.
12. Поверхностный интеграл I рода.
13. Двусторонние поверхности.
14. Определение поверхностного интеграла II рода и его вычисление в случае явного задания поверхности.
15. Основные свойства поверхностных интегралов II рода.
16. Формула Стокса.
17. Некоторые приложения формулы Стокса.

18. Формула Остроградского-Гаусса.
19. Градиент скалярного поля и его физический смысл. Поток и дивергенция векторного поля.
20. Циркуляция и ротор векторного поля. Потенциальное поле.
21. Понятие гармонического анализа. Ортогональные системы функций. Тригонометрическая система функций.
22. Ортогональные ряды. Ряды Фурье.
23. Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье. Принцип локализации.
24. Условия точечной сходимости ряда Фурье и вычисление его суммы.
25. Некоторые классы функций, для которых ряд Фурье сходится поточечно.
26. Разложение функций в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$.
27. Разложение функций в ряд Фурье на произвольном промежутке.
28. Экстремальные свойства частичных сумм ряда Фурье. Сходимость в среднем.
29. Достаточные условия равномерной сходимости ряда Фурье. Ядро Фейера и его свойства.
30. Равномерное приближение непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими полиномами.
31. Полнота и замкнутость тригонометрической системы. Почленное интегрирование ряда Фурье.
32. Интеграл Фурье.
33. Исследование сходимости интеграла Фурье.
34. Преобразование Фурье в вещественной области.
35. Преобразование Фурье в комплексной области.

ВОПРОСЫ К КОЛЛОКВИУМУ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

1 семестр

I. Определения

1. Последовательности
   - 1.1. Сформулируйте определение сходящейся последовательности в терминах «ε-N»
   - 1.2. Сформулируйте определение сходящейся последовательности в терминах окрестностей
   - 1.3. Сформулируйте определение ограниченной последовательности
   - 1.4. Сформулируйте определение последовательности, ограниченной сверху
   - 1.5. Сформулируйте определение последовательности, ограниченной снизу
   - 1.6. Сформулируйте определение неограниченной последовательности
   - 1.7. Сформулируйте определение бесконечно малой последовательности

1.8. Сформулируйте определение бесконечно большой последовательности
1.9. Сформулируйте определение бесконечно большой положительной последовательности
1.10. Сформулируйте определение бесконечно большой отрицательной последовательности
1.11. Сформулируйте определение монотонной последовательности
1.12. Сформулируйте определение подпоследовательности
1.13. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности
1.14. Сформулируйте определение частичного предела последовательности
1.15. Сформулируйте определение верхнего и нижнего предела последовательности

2. Функции
   2.1. Сформулируйте определение сюръективного, инъективного и биективного отображения
   2.2. Сформулируйте определение обратной функции
   2.3. Сформулируйте определение монотонной функции
   2.4. Сформулируйте определение чётной и нечётной функции
   2.5. Сформулируйте определение периодической функции
   2.6. Сформулируйте определение предела функции по Коши в терминах окрестностей
   2.7. Сформулируйте определение предела функции по Коши в терминах «ε-δ»
   2.8. Сформулируйте определение предела функции по Коши при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и $x \to \infty$
   2.9. Сформулируйте определение бесконечно большой функции по Коши: $f(x) \to \infty$, $f(x) \to +\infty$, $f(x) \to -\infty$ при $x \to a$.
   2.10. Сформулируйте определение односторонних пределов функции по Коши
   2.11. Сформулируйте определение предела функции по Гейне

II. Теоремы

1. Последовательности
   1.1. Сформулируйте и докажите теорему о сумме двух бесконечно малых последовательностей
   1.2. Сформулируйте и докажите теорему о произведении ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность
   1.3. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности
   1.4. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательности
   1.5. Сформулируйте и докажите теорему о пределе последовательности $\left(\frac{1}{x_n}\right)$, если последовательность (x_n) является бесконечно большой

1.6. Сформулируйте и докажите теорему о пределе суммы сходящихся последовательностей
1.7. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения сходящихся последовательностей
1.8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе частного сходящихся последовательностей
1.9. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенствах для последовательностей
1.10. Сформулируйте и докажите теорему о сжатой переменой для последовательностей
1.11. Сформулируйте и докажите теорему о пределе монотонной последовательности
1.12. Сформулируйте и докажите теорему о пределе последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1.13. Сформулируйте и докажите лемму о вложенных отрезках
1.14. Сформулируйте и докажите принцип выбора в R
1.15. Сформулируйте и докажите принцип выбора в $\tilde{R}$
1.16. Сформулируйте и докажите критерий Коши для последовательностей
1.17. Сформулируйте и докажите критерий Гейне для последовательностей
1.18. Сформулируйте и докажите критерий сходимости последовательности в терминах верхнего и нижнего предела
1.19. Сформулируйте и докажите теорему о существовании верхнего и нижнего предела последовательности

2. Функции
   2.1. Сформулируйте и докажите теорему о существовании предела функции по Гейне как следствие существования предела по Коши
   2.2. Сформулируйте и докажите теорему о существовании предела функции по Коши как следствие существования предела по Гейне
   2.3. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела функции
   2.4. Сформулируйте и докажите теорему о пределе суммы, произведения и частного функций
   2.5. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенствах для функций
   2.6. Сформулируйте и докажите теорему о сжатой переменной для функций
   2.7. Сформулируйте и докажите теорему о пределе функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$
   2.8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе функции $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$
   2.9. Сформулируйте и докажите теорему о пределе монотонной функции
   2.10. Сформулируйте и докажите критерий Коши существования предела функции

III. Примеры теоретических вопросов

1. Построить пример числовой последовательности, имеющей в качестве своих частичных пределов заданные числа $a_1, a_2, \dots, a_p$.
2. Пусть последовательность (x_n) сходится, а последовательность (y_n) расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательности $(x_n \cdot y_n)$? Привести примеры.
3. Привести пример ограниченных последовательностей (x_n) и (y_n), $y_n \neq 0$, таких, что последовательность $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ неограниченна.
4. Функция f ни чётная, ни нечётная, а функция g чётная. Может ли сумма $f + g$ быть: а) чётной, б) нечётной?
5. Привести пример двух возрастающих на интервале $(a; b)$ функций, произведение которых – убывающая на $(a; b)$ функция.

IV. Примеры задач

1. Найдите $\lim_{x\to\pi/3} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$
2. Найдите $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(a-1)+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$.

2 семестр

I. Определения

1. Сформулируйте определение первообразной
2. Сформулируйте определение неопределенного интеграла
3. Сформулируйте определение интегрируемости «в конечном виде»
4. Сформулируйте определение рациональной функции двух переменных
5. Сформулируйте определение дифференциального бинома
6. Сформулируйте определение разбиения отрезка и диаметра разбиения
7. Сформулируйте определение разбиения с отмеченными точками
8. Сформулируйте определение интегральной суммы Римана
9. Сформулируйте определение интегрируемости в смысле Римана и интеграла Римана
10. Сформулируйте определение сумм Дарбу
11. Сформулируйте определение покрытия множества
12. Сформулируйте определение счетного множества
13. Сформулируйте определение множества лебеговой меры нуль
14. Сформулируйте определение обобщенной первообразной
15. Сформулируйте определение окрестности и проколотой окрестности в $\mathbb{R}^2$
16. Сформулируйте определение внутренней точки множества и внутренности множества
17. Сформулируйте определение внешней точки множества и внешности множества
18. Сформулируйте определение граничной точки множества и границы множества

19. Сформулируйте определение открытого в $\mathbb{R}^2$ множества
20. Сформулируйте два равносильных определения замкнутого в $\mathbb{R}^2$ множества
21. Сформулируйте определение предельной точки множества
22. Сформулируйте определение замыкания множества
23. Сформулируйте определение ограниченного в $\mathbb{R}^2$ множества
24. Сформулируйте определение плоской фигуры в $\mathbb{R}^2$
25. Сформулируйте определение многоугольной фигуры в $\mathbb{R}^2$
26. Сформулируйте определение нижней и верхней площади плоской фигуры
27. Сформулируйте определение квадрируемой фигуры и ее площади
28. Сформулируйте определение криволинейной трапеции
29. Сформулируйте определение криволинейного сектора
30. Сформулируйте определение плоского пути
31. Сформулируйте определение совпадающих кривых в $\mathbb{R}^2$
32. Сформулируйте определение плоской кривой
33. Сформулируйте определение замкнутой и разомкнутой жордановой кривой
34. Сформулируйте определение гладкой кривой
35. Сформулируйте определение кусочно-гладкой кривой
36. Сформулируйте определение угловых точек кривой
37. Сформулируйте определение ломаной, вписанной в кривую
38. Сформулируйте определение спрямляемой кривой и ее длины
39. Сформулируйте определение квадрируемости поверхности вращения и ее площади

II. Теоремы

1. Сформулируйте и докажите основные свойства первообразных
2. Сформулируйте и докажите основные свойства неопределенных интегралов
3. Сформулируйте и докажите теорему о линейности неопределенного интеграла
4. Сформулируйте и докажите теорему о замене переменной в неопределенном интеграле
5. Сформулируйте и докажите формулу интегрирования «по частям» в неопределенном интеграле
6. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости рациональной функции
7. Сформулируйте метод Остроградского интегрирования рациональных функций
8. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости функций вида $R(\sin x, \cos x)$ универсальной подстановкой
9. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости дробно-линейных иррациональностей
10. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости функций вида $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ подстановками Эйлера
11. Сформулируйте метод выделения алгебраической части интеграла $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

12. Сформулируйте и докажите теорему Чебышева об интегрируемости дифференциального бинома в конечном виде
13. Сформулируйте и докажите необходимое условие интегрируемости функции в смысле Римана
14. Сформулируйте и докажите 1-е и 2-е свойства сумм Дарбу
15. Сформулируйте и докажите 3-е и 4-е свойства сумм Дарбу
16. Сформулируйте и докажите критерий Дарбу
17. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости непрерывной функции
18. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости монотонной функции
19. Сформулируйте критерий Лебега и следствия из него (с примерами)
20. Сформулируйте и докажите теорему о линейности интеграла Римана
21. Сформулируйте и докажите теорему об аддитивности интеграла Римана. Сформулируйте общую теорему об аддитивности
22. Сформулируйте и докажите теорему о монотонности интеграла Римана
23. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости модуля функции
24. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости произведения функций
25. Сформулируйте и докажите оценку интеграла от произведения
26. Сформулируйте и докажите первую теорему о среднем (для двух функций и для одной функции)
27. Сформулируйте и докажите формулу Ньютона-Лейбница
28. Сформулируйте и докажите теорему о существовании первообразной непрерывной функции
29. Сформулируйте и докажите правило замены переменной в определенном интеграле (две теоремы)
30. Сформулируйте и докажите теорему об интеграле от четной/нечетной функции по симметричному промежутку
31. Сформулируйте и докажите теорему об интеграле от периодической функции
32. Сформулируйте и докажите формулу интегрирования «по частям» в определенном интеграле
33. Сформулируйте и докажите вторую теорему о среднем
34. Сформулируйте 3 критерия квадрируемости фигуры и докажите первый критерий
35. Сформулируйте и докажите теорему о площади графика непрерывной функции
36. Сформулируйте и докажите теорему о площади криволинейной трапеции
37. Сформулируйте и докажите теорему о площади криволинейного сектора
38. Сформулируйте и докажите теорему об объеме пространственного тела и объеме тела вращения
39. Сформулируйте и докажите теорему о длине гладкой кривой
40. Сформулируйте и докажите теорему о площади поверхности вращения

III. Примеры теоретических вопросов

1. Множество точек разрыва функции $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ имеет лебегову меру нуль. Возможно ли, что $f \notin R[a; b]$?
2. Задана функция $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ такая, что $|f| \in R[a; b]$. Что можно сказать об интегрируемости по Риману функции f?
3. Построить пример функции, непрерывной в некоторой точке и **не** интегрируемой по Риману ни на каком отрезке, содержащем эту точку.
4. Может ли интеграл Римана от положительной функции быть отрицательным?
5. Является ли система всех интервалов вида $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $a \in (0,1)$ и $\varepsilon \in (0,1)$ покрытием интервала $(0,1)$?
6. Является ли множество нулей функции $\sin x$ множеством лебеговой меры нуль?
7. Является ли открытым множество $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 3;\ 2 \leq y \leq 4\}$?

3 семестр

I. Определения

1. Сформулируйте определение числового ряда
2. Сформулируйте определение сходящегося числового ряда
3. Сформулируйте определение частичной суммы числового ряда
4. Сформулируйте определение остатка числового ряда
5. Сформулируйте определение отрезка числового ряда
6. Сформулируйте определение суммы числового ряда
7. Сформулируйте определение знакопеременного числового ряда
8. Сформулируйте определение абсолютно сходящегося числового ряда
9. Сформулируйте определение условно сходящегося числового ряда
10. Сформулируйте определение знакочередующегося числового ряда
11. Сформулируйте определение переменной Куммера
12. Сформулируйте определение переменной Даламбера
13. Сформулируйте определение переменной Раабе
14. Сформулируйте определение переменной Бертрана
15. Сформулируйте определение ряда типа Лейбница
16. Сформулируйте определение функционального ряда
17. Сформулируйте определение функциональной последовательности
18. Сформулируйте определение поточечной сходимости функционального ряда
19. Сформулируйте определение поточечной сходимости функциональной последовательности
20. Сформулируйте определение области сходимости функционального ряда
21. Сформулируйте определение области сходимости функциональной последовательности
22. Сформулируйте определение равномерной сходимости функционального ряда

23. Сформулируйте определение равномерной сходимости функциональной последовательности
24. Сформулируйте определение неравномерной сходимости функционального ряда (последовательности)
25. Сформулируйте определение мажорантного ряда для функционального ряда
26. Сформулируйте определение абсолютно сходящегося функционального ряда
27. Сформулируйте определение ограниченной в совокупности функциональной последовательности
28. Сформулируйте определение степенного ряда
29. Сформулируйте определение интервала сходимости степенного ряда
30. Сформулируйте определение радиуса сходимости степенного ряда
31. Сформулируйте определение ряда Тейлора
32. Сформулируйте определение биномиального ряда
33. Сформулируйте определение аналитической функции

II. Теоремы

1. Сформулируйте и докажите теорему об умножении членов ряда на число
2. Сформулируйте и докажите теорему о почленном сложении числовых рядов
3. Сформулируйте и докажите теорему о группировке членов числового ряда
4. Сформулируйте и докажите теорему о перестановке членов числового ряда
5. Сформулируйте и докажите критерий Коши для числовых рядов
6. Сформулируйте и докажите необходимый признак сходимости числового ряда
7. Сформулируйте и докажите критерий сходимости числового ряда в терминах остатков
8. Сформулируйте и докажите критерий сходимости числового ряда с неотрицательными членами
9. Сформулируйте и докажите мажорантный признак сравнения для числовых рядов
10. Сформулируйте и докажите признак сравнения для числовых рядов в предельной форме
11. Сформулируйте и докажите признак сравнения отношений для числовых рядов
12. Сформулируйте и докажите интегральный признак Маклорена–Коши
13. Сформулируйте и докажите теорему о сходимости обобщенного гармонического ряда
14. Сформулируйте и докажите теорему о сходимости геометрической прогрессии
15. Сформулируйте и докажите степенной признак сравнения для числовых рядов
16. Сформулируйте и докажите признак Коши
17. Сформулируйте и докажите признак Даламбера
18. Сформулируйте и докажите признак Куммера
19. Сформулируйте и докажите признак Куммера в предельной форме

20. Сформулируйте и докажите признак Раабе
21. Сформулируйте и докажите признак Бертрана
22. Сформулируйте и докажите признак Гаусса
23. Сформулируйте и докажите теорему о сходимости абсолютно сходящегося ряда
24. Сформулируйте и докажите теорему об абсолютной сходимости в терминах рядов из положительных и отрицательных членов
25. Сформулируйте и докажите теорему об условной сходимости в терминах рядов из положительных и отрицательных членов
26. Сформулируйте и докажите признак Лейбница
27. Сформулируйте и докажите теорему о преобразовании Абеля
28. Сформулируйте и докажите неравенство Абеля
29. Сформулируйте и докажите признак Дирихле для числовых рядов
30. Сформулируйте и докажите признак Абеля для числовых рядов
31. Сформулируйте и докажите теорему о связи поточечной и равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов
32. Сформулируйте и докажите критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности
33. Сформулируйте и докажите критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда
34. Сформулируйте и докажите общий критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей
35. Сформулируйте и докажите общий критерий равномерной сходимости функциональных рядов
36. Сформулируйте и докажите теорему о сумме равномерно сходящейся последовательности (ряда)
37. Сформулируйте и докажите теорему о произведении равномерно сходящейся последовательности (ряда) на число
38. Сформулируйте и докажите признак Вейерштрасса
39. Сформулируйте и докажите признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда
40. Сформулируйте и докажите признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда
41. Сформулируйте и докажите теорему о почленном переходе к пределу функционального ряда
42. Сформулируйте и докажите теорему о перестановке двух предельных переходов для функциональных последовательностей
43. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы функционального ряда
44. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности предела функциональной последовательности
45. Сформулируйте и докажите признак Дини равномерной сходимости ряда
46. Сформулируйте и докажите признак Дини равномерной сходимости последовательности

47. Сформулируйте и докажите теорему о почленном интегрировании функционального ряда
48. Сформулируйте и докажите теорему о переходе к пределу под знаком интеграла
49. Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании функционального ряда
50. Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании функциональной последовательности
51. Сформулируйте и докажите 1-ю теорему Абеля для степенных рядов
52. Сформулируйте и докажите теорему о множестве сходимости степенного ряда
53. Сформулируйте и докажите теорему о равномерной сходимости степенного ряда
54. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы степенного ряда
55. Сформулируйте и докажите 2-ю теорему Абеля для степенных рядов
56. Сформулируйте и докажите теорему о почленном интегрировании степенного ряда
57. Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании степенного ряда
58. Сформулируйте и докажите теорему о бесконечной дифференцируемости суммы степенного ряда
59. Сформулируйте и докажите теорему о единственности разложения функции в ряд Тейлора
60. Сформулируйте и докажите теорему о разложении в ряд Тейлора четных и нечетных функций
61. Сформулируйте и докажите критерий представимости функции рядом Тейлора
62. Сформулируйте и докажите достаточное условие представимости функции рядом Тейлора
63. Сформулируйте и докажите разложения в степенной ряд основных элементарных функций

III. Примеры теоретических вопросов

1. Числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, если $a_n \le c_n \le b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Что можно сказать о сходимости этого ряда?
3. Может ли функциональный ряд сходиться на отрезке равномерно, но не абсолютно?
4. Может ли последовательность разрывных функций равномерно сходиться к непрерывной функции?
5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ равномерно сходится на отрезке $[a; b]$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ также равномерно сходится на этом отрезке.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Зорич, В.А. Математический анализ : в 2 ч. / В.А. Зорич. – 4-е изд. – М.: МЦНМО, 2002. – 2 ч.
2. Зверович, Э.И. Вещественный и комплексный анализ : учеб. пособие. В 6 ч. / Э.И. Зверович. – Минск : Выш. шк., 2006. – 6 ч.
3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – 558 с.
4. Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу : в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев [и др.] – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003 – 3 т.
5. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высш. шк., 1988. – 3 т.
6. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа : В 2 т. / Г.М. Фихтенгольц. – 5-е изд. – М.: Наука, 1964. – 2 т.
7. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : В 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2001. – 3 т.
8. Никольский, С.М. Курс математического анализа : учебник для вузов. В 2 т. / С.М. Никольский. М.: Наука, 1983. – 2 т.
9. Архипов, Г.И. Лекции по математическому анализу : учебник для университетов и пед. вузов / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – М.: Высш. шк., 1999. – 695 с.
10. Бровка, Н.В. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы: практикум для студентов мех.-мат. фак. / Н.В. Бровка. – Минск : БГУ, 2007 – 79 с.
11. Толочко, М.Э. Введение в математический анализ : пособие для студентов мех.-мат. фак. / М.Э. Толочко, С.В. Рогозин. – Минск : БГУ, 2005. – 52 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

12. Ильин, В.А. Математический анализ : в 2 ч. / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. – М.: изд-во Моск. ун-та, 1987. – 2 ч.
13. Ильин В.А. Основы математического анализа : в 2 ч. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1982. – 2 ч.
14. Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л.Д. Кудрявцев [и др.]. – М.: Наука, 1984. – 592с.
15. Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев [и др.]. – М.: Наука, 1986. – 528с.
16. Кудрявцев Л.Д Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных / Л.Д. Кудрявцев [и др.]. – М.: Наука, 1994. – 496с.
17. Тер-Крикоров, А.М. Курс математического анализа / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1997. – 720с.
18. Богданов, Ю.С. Лекции по математическому анализу : в 2 ч. / Ю.С. Богданов. – Минск : БГУ, 1978. – 2 ч.

ТИПОВЫЕ ПРОГРАММЫ КУРСА

Министерство образования Республики Беларусь
Учебно-методическое объединение вузов Республики Беларусь
по естественнонаучному образованию

УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель Министра образования Республики Беларусь
______________________________ А.И. Жук

«_____» _________________________2013 г.

Регистрационный № ТД-____________/тип.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Типовая учебная программа по учебной дисциплине
для специальности
1-31 03 01 Математика (по направлениям)
1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность),
1-31 03 08 Математика и информационные технологии

СОГЛАСОВАНО
Председатель УМО вузов Республики Беларусь по естественнонаучному образованию
___________________ А.Л. Толстик

«____» __________________ 2013 г.

СОГЛАСОВАНО
Начальник Управления высшего и среднего специального образования
__________________ Ю.И. Миксюк

«_____» __________________ 2013 г.

Первый проректор Государственного учреждения образования «Республиканский институт высшей школы»
___________________ И.В Казакова

«_____» __________________ 2013 г.

Эксперт-нормоконтролер
_________________ С.М. Артемьева

«_________________________ 2013 г.

Минск 2013

СОСТАВИТЕЛИ:

Васильев И.Л. – доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент,

Кротов В.Г. – заведующий кафедрой теории функций Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор,

Пекарский А.А. – профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра математического анализа Учреждения образования «Белорусского государственного университета им. М. Танка»,

Рябушко А.П. – профессор кафедры высшей математики № 1 учреждения образования «Белорусский национальный технический университет», доктор физико-математических наук, заслуженный работник образования, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:

Кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол № ____ от __________________________ 2013 г.)

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № ____ от __________________________ 2013 г.)

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения вузов Республики Беларусь по естественнонаучному образованию

(протокол № ____ от __________________________ 2013 г.);

Ответственный за выпуск: Кротов Вениамин Григорьевич

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Дисциплина «Математический анализ» является базовой для преподавания большинства математических курсов. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики», «Экстремальные задачи и вариационное исчисление». При изучении математического анализа студенты знакомятся с основами дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных. Основные понятия дифференциального и интегрального исчисления являются базовыми для освоения указанных выше математических дисциплин.

Элементы теории предела и дифференциального исчисления используются при изучении дисциплин «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики». Базовые конструкции интегрального исчисления используются при решении интегральных уравнений в рамках изучения дисциплины «Функциональный анализ», при создании вариационных принципов в задачах математической физики (дисциплина «Уравнения математической физики»), при изучении геометрии гладких поверхностей в рамках дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология», при построении необходимых и достаточных условий оптимальности в задачах оптимизации (дисциплина «Экстремальные задачи и вариационное исчисление»).

Основными методами изучения дисциплины «Математический анализ» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала. Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, коллоквиумов, компьютерного тестирования, самостоятельных работ и опросов на практических занятиях.

Методы привития студентами практических навыков использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на практических занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время практических занятий в форме проверки домашних заданий, компьютерного тестирования, а также на контрольных работах и зачетах.

Цель дисциплины "Математический анализ": создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики.

Образовательная цель: изложение основ дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Математический анализ»:

– формирование у студентов понятия числа:

– изучение понятия предела и освоение этого понятия с целью практического использования при решении различных задач математики:

– изучение основ дифференциального исчисления, использование элементов дифференциального исчисления при решении экстремальных задач и других задач современной математики;

– использование основ интегрального исчисления при решении задач математики, механики, математической физики.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– основные понятия и результаты дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных;

– методы доказательств и алгоритмы решения задач математического анализа;

уметь:

– использовать основные результаты математического анализа в практической деятельности;

– использовать теоретические и практические навыки применения дифференциального и интегрального исчисления в математике;

владеть:

– основными методами интегрирования и дифференцирования функций, рядов и интегралов;

– методами доказательств и аналитического исследования функций, рядов и интегралов на непрерывность, сходимость, равномерную сходимость;

– навыками самообразования и способами использования аппарата математического анализа для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Примерный тематический план дисциплины для специальностей
1-31 03 01 «Математика» (по направлениям)
1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность),
1-31 03 08 Математика и информационные технологии

№	Наименование тем и разделов	Распределение часов по видам занятий		
		Всего	Лекц.	Практ.
1	2	3	4	5
	1 семестр			
1	Множество действительных чисел	12	6	6
2	Предел последовательности	20	10	10
3	Предел функции	14	6	8
4	Непрерывные функции	22	12	10
5	Дифференцируемые функции	32	16	16
6	Неопределенный интеграл	20	10	10
7	Определенный интеграл Римана	24	12	12
	2 семестр			
8	Дифференцируемые функции многих переменных	32	16	16
9	Дифференцируемые векторные функции	28	14	14
10	Числовые ряды	28	14	14
11	Функциональные последовательности и ряды	28	14	14
12	Интегралы, зависящие от параметра	20	10	10
	3 семестр			
13	Ряды Фурье	28	14	14
14	Мера и интеграл в R^d	24	12	12
15	Криволинейные интегралы	16	8	8
16	Поверхностные интегралы	16	8	8
17	Элементы векторного анализа	8	4	4
18	Аналитические функции	24	12	12
19	Интегралы и ряды аналитических функций	28	14	14
	Всего по курсу	**424**	**212**	**212**

Содержание учебного материала

Тема 1. Множество действительных чисел

Аксиоматика множества действительных чисел. Модели множества действительных чисел, непротиворечивость, изоморфизм моделей. Важнейшие подмножества.

Максимальный и минимальный элементы множества. Границы числовых множеств. Множества, ограниченные сверху и снизу. Точные верхняя и нижняя границы множества. Теорема Дедекинда.

Позиционные системы счисления. Алгоритм определения q-ичных цифр числа.

Модель множества вещественных чисел.Мощность множеств. Мощность пустого, конечного множества. Счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность континуума. Теорема Кантора о несчетности континуума.

Тема 2. Предел последовательности

Абсолютная величина числа и окрестности, свойства модуля. Числовые последовательности. Арифметические операции с последовательностями. Ограниченные последовательности. Определение предела последовательности. Общие свойства предела (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности). Предел и операции над последовательностями. Предельный переход в неравенствах.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства бесконечно малых последовательностей. Символы Харди и Ландау. Шкала бесконечно больших последовательностей. Различные формы полноты множества вещественных чисел. Последовательности стягивающихся сегментов (отрезков), лемма Кантора.

Лемма Бореля-Лебега о покрытиях отрезка интервалами. Предельная точка множества, лемма Больцано-Вейерштрасса. Последовательности Коши, критерий Коши сходимости последовательности.

Монотонные последовательности. Теорема о сходимости монотонных последовательностей. Неравенство Бернулли, число Эйлера–Непера. Оценки для числа Эйлера–Непера.

Подпоследовательности и частичные пределы, лемма Больцано-Вейерштрасса для последовательностей. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их характеристические свойства. Монотонные перестановки ограниченной последовательности и их пределы.

Тема 3. Предел функции

Определение Коши предела функции и его характеризация в терминах последовательностей (предел функции по Гейне). Общие свойства предела функции (единственность предела, локальная ограниченность функции, имеющей предел). Арифметические операции над числовыми функциями. Предел и операции над функциями. Предел функции и неравенства. Два замечательных предела.

Односторонние пределы. Критерий существования предела в терминах односторонних пределов. Пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Символы ∞, $+\infty$, $-\infty$. Общее определение предела функции по базе. Символы Харди и Ландау для функций. Существование предела функции. Критерий Коши для предела функции. Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

Тема 4. Непрерывные функции

Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций (локальная ограниченность, локальное сохранение знака). Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность композиции.

Непрерывность функции на множестве. Глобальные свойства непрерывных функций на отрезке. Теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции и о достижении точных границ. Теоремы Больцано-Коши о промежуточных значениях. Теорема о непрерывном образе отрезка. Равномерная непрерывность, теорема Кантора. Колебание функции.

Биективность строго монотонной функции. Критерий глобальной непрерывности монотонной функции. Критерий взаимной однозначности непрерывной функции. Классификация разрывов функции. Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.

Элементарные функции. Степени числа, степенная, экспоненциальная и логарифмическая функции и их свойства (непрерывность и монотонность). Три замечательных предела

Тема 5. Дифференцируемые функции

Определение производной. Примеры естественнонаучных задач, приводящих к понятию производной. Дифференцируемость и ее связь с существованием производной. Связь непрерывности и дифференцируемости. Дифференциал, приближенные вычисления с использованием дифференциала.

Производные элементарных функций. Правила дифференцирования. Дифференцирование и арифметические операции. Дифференцирование композиции. Производная обратной функции. Производные высших порядков. Полином Тейлора.

Экстремумы функции. Лемма Ферма (необходимое условие экстремума). Основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши).

Раскрытие неопределенностей. Правила Лопиталя.

Формула Тейлора. Различные формы остатка формулы Тейлора (Пеано, Лагранжа, Коши).

Пять основных разложений элементарных функций. Понятие о сходимости числовых рядов. Сходимость разложений Тейлора элементарных функций.

Исследование функций с помощью производной. Монотонность и знак производной. Первое и второе достаточные условия экстремума. Алгоритм отыскания глобального экстремума.

Выпуклые функции. Различные формы условия выпуклости. Свойства выпуклых функций (существование односторонних производных, дифференцируемость всюду, кроме счетного множества, непрерывность).

Условия выпуклости в терминах первой и второй производной. Точки перегиба. Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения: неравенства Юнга, Гельдера и Минковского.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения эскиза графика.

Тема 6. Неопределенный интеграл

Первообразная функции. Описание класса всех первообразных. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов элементарных функций. Обобщенные первообразная и неопределенный интеграл.

Основные методы интегрирования (интегрирование по частям и замена переменной).

Интегрирование рациональных функций.

Метод Остроградского. Интегрирование рациональных тригонометрических функций.

Интегрирование дробно-линейных и квадратичных иррациональностей. Подстановки Эйлера.

Тема 7. Определенный интеграл Римана

Примеры естественнонаучных задач, приводящих к понятию интеграла Римана. Определение интеграла Римана: разбиение отрезка, ранг разбиения, разбиения с отмеченными точками и интегральные суммы, предел интегральных сумм. Класс интегрируемых функций. Необходимое условие интегрируемости.

Суммы Дарбу и их свойства. Верхний и нижний интегралы Дарбу и основные неравенства для них. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу и в терминах интегралов Дарбу. Классы интегрируемых функций (непрерывные, ограниченные с конечным числом точек разрыва, монотонные).

Интеграл по ориентированному промежутку. Свойства определенного интеграла: интегрируемость линейных комбинаций, линейность, аддитивность по области, монотонность. Неравенства для определенного интеграла. Непрерывность интеграла с переменным верхним пределом. Теоремы о среднем значении, формулы Бонне.

Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом. Существование первообразной у непрерывной функции и обобщенной первообразной у кусочно непрерывной функции. Формула Ньютона–Лейбница. Основные методы вычисления определенных интегралов – интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Формула Тейлора с остатком в виде интеграла.

Приложения определенного интеграла. Длина пространственной кривой, площадь криволинейной трапеции, площадь поверхности вращения, объем тела вращения.

Несобственные интегралы. Особенности функции, определение интеграла от функции с особенностью. Свойства несобственного интеграла: совпадение с интегралом Римана для интегрируемых функций, линейность, аддитивность и монотонность. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле. Случай нескольких особенностей. Главное значение по Коши. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютная и условная сходимость. Признак сравнения для интегралов от положительных функций. Признаки Абеля и Дирихле.

Тема 8. Дифференцируемые функции многих переменных

Метрика, шары, открытые множества, подпространство. Внутренняя точка множества и его внутренность. Предельная и изолированная точка множества. Замкнутые множества. Теорема двойственности открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Граница множества, критерий открытости и замкнутости в терминах границы. Компактные и связные множества. Замкнутые подмножества компакта.

Сходящиеся последовательности в метрическом пространстве, предел функции в метрическом пространстве. Отделимость и единственность предела. Непрерывность функции на метрическом пространстве. Глобальный критерий непрерывности. Ограниченные множества. Последовательность Коши, полнота метрического пространства. Замкнутые шары, теорема Кантора о вложенных замкнутых шарах.

Норма, линейное нормированное пространство, полнота. Метрика в линейном нормированном пространстве. Евклидово d-мерное пространство: скалярное произведение и его свойства, неравенство Коши, норма, координатная сходимость, полнота, важнейшие подмножества (сегмент, интервал). Критерий компактности (теорема Гейне–Бореля)

Непрерывные функции на метрическом пространствах. Теорема о непрерывном образе компакта, теорема о непрерывном образе связного множества. Путь в метрическом пространстве, линейно связные множества. Выпуклое множество в векторном пространстве. Равномерно непрерывные функции на метрическом пространстве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности

Линейные формы на R^d, гиперплоскость, общий вид линейной формы. Дифференцируемые функции, производная как линейная форма на R^d. Свойства производной. Геометрическая интерпретация дифференцируемости. Формула Лагранжа.

Частные производные функции и их связь с производной. Достаточное условие дифференцируемости. Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл.

Частные производные высших порядков. Теорема Шварца о независимости непрерывной смешанной производной от последовательности дифференцирований.

Мультииндексы. Полином Тейлора, различные формы записи, формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа. Интегральная форма остатка.

Квадратичные формы и их матрицы. Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра (без доказательства). Локальные экстремумы функции. Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции. Достаточное условие экстремума.

Тема 9. Дифференцируемые векторные функции

Векторные функции, компоненты векторной функции. Класс $L(R^n,R^m)$ линейных отображений R^n в R^m. Общий вид элементов $L(R^n,R^m)$. Норма в $L(R^n,R^m)$. Норма композиции линейных отображений. Дифференцируемые векторные функции, производная как элемент $L(R^n,R^m)$. Свойства производной и связь с производными компонент. Матрица Якоби. Производная композиции. Гомеоморфизмы топологических пространств. Теорема Брауера о гомеоморфизмах между открытыми множествами разных размерностей (без доказательства).

Теорема об обратной функции. Сравнение с одномерным случаем.

Постановка задачи о неявной функции. Теорема о неявной функции. Формулы для нахождения производных неявной функции.

Тема 10. Числовые ряды

Основная терминология теории рядов. Ряд, слагаемые ряда, частные суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Остатки ряда, связь сходимости остатков со сходимостью ряда. Операции над сходящимися рядами.

Критерий Коши сходимости рядов. Необходимое условие сходимости ряда. Абсолютная и условная сходимость, связь между ними.

Положительные ряды, критерий сходимости. Признак сравнения и его различные формы. Признак Коши с корнем. Теорема Куммера. Признаки Даламбера, Раабе, Бертрана, Гаусса. Интегральный признак Коши. Оценки остатков и частных сумм.

Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Ряды Лейбница.

Ряды со скобками. Перестановки ряда, сумма перестановки абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов. Умножение рядов, теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.

Тема 11. Функциональные последовательности и ряды

Функциональные ряды и последовательности. Равномерная сходимость.

Критерий Коши равномерной сходимости. Теорема о перестановке предельных переходов.

Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле для равномерной сходимости.

Функциональные свойства предела последовательности и суммы ряда: непрерывность, теорема Дини, дифференцируемость, интегрируемость.

Пространство непрерывных функций: векторная структура, норма, полнота. Теорема Вейерштрасса о плотности алгебраических полиномов в пространстве непрерывных функций. Пример Ван дер Вардена непрерывной нигде не дифференцируемой функции.

Тема 12. Интегралы, зависящие от параметра

Элементарная теория интегралов от параметра. Свойства непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости.

Несобственные интегралы от параметра. Свойство непрерывности.

Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов от параметра.

Интеграл вероятностей. Гамма- и бета-функции Эйлера, их функциональные свойства и некоторые соотношения для них, связь между ними.

Формула Стирлинга.

Тема 13. Ряды Фурье

Тригонометрическая система. Интегральные представления для сумм Фурье.Минимизирующее свойство частичных сумм ряда Фурье, его следствия.

Лемма Римана-Лебега. Принцип локализации.

Условия сходимости ряда Фурье в точке. Теорема Дини.

Признак Дини-Липшица равномерной сходимости рядов Фурье Теорема Дирихле-Жордана. Средние Фейера и их равномерная сходимость.

Тема 14. Мера и интеграл в R^d

Мера сегмента и ее свойства (монотонность, аддитивность, субаддитивность). Элементарные множества (фигуры), операции над ними. Дизъюнктное разложение фигуры. Мера фигуры, корректность ее определения, свойства меры фигуры (монотонность, аддитивность, субаддитивность).

Внутренняя и внешняя меры Жордана ограниченного множества и связь между ними. Измеримые множества, мера Жордана. Критерии измеримости (в терминах приближающих фигур и в терминах границы).

Примеры: площадь криволинейной трапеции, площадь круга, число пи, неизмеримое по Жордану множество.

Лемма о границе объединения, пересечения и разности. Операции над измеримыми множествами.

Свойства меры Жордана (монотонность, аддитивность, субаддитивность).

Определение интеграла Римана на множестве, измеримом по Жордану: разбиение множества, ранг разбиения, разбиения с отмеченными точками и интегральные суммы, предел интегральных сумм. Класс интегрируемых функций. Необходимое условие интегрируемости.

Суммы Дарбу и их свойства. Верхний и нижний интегралы Дарбу и основные неравенства для них. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу и в терминах интегралов Дарбу. Классы интегрируемых функций (непрерывные, ограниченные с множеством точек разрыва жордановой меры нуль). Критерий Лебега интегри-руемости по Риману.

Свойства интеграла Римана: интегрируемость на подмножестве, аддитивность, линейность, монотонность. Неравенства для интеграла: интегрируемость модуля, теорема о среднем. Интегрируемость произведения.

Мера декартова произведения измеримых множеств. Теорема об интеграле по декартовому произведению множеств (теорема Фубини) и ее следствия: интегрируемость по сечениям, вычисление интегралов сведением к повторному, вычисление меры с помощью интеграла от меры сечения.

Преобразование меры при линейном отображении R^d. Лемма о внешней мере Жордана диффеоморфных образов малых кубов. Замена переменной в интеграле Римана. Примеры: полярные координаты в R^2, сферические и цилиндрические координаты в R^3, сферические координаты в R^d.

Тема 15. Криволинейные интегралы

Функции ограниченной вариации и их свойства, аддитивность и непрерывность вариации. Критерий Жордана.

Интеграл Римана-Стилтьеса и его свойства (линейность, аддитивность, формула интегрировании по частям). Классы существования интеграла Стилтьеса, оценка интеграла. Формулы для вычисления с помощью интеграла Римана.

Путь, след пути. Спрямляемый путь и его длина. Критерий Жордана спрямляемости. Гладкий путь и формула для вычисления длины гладкого пути. Интегралы первого и второго рода вдоль пути и формулы для их вычисления.

Жорданова кривая, ее параметризации, непрерывность отображения, обратного к параметризации. Описание класса параметризаций. Длина жордановой кривой и корректность ее определения. Натуральная параметризация и ее существование.

Криволинейный интеграл 1-го рода вдоль спрямляемой жордановой кривой и корректность его определения, формулы для вычисления. Ориентация жордановой кривой, классы параметризаций, сохраняющих и меняющих ориентацию. Криволинейный интеграл 2-го рода вдоль ориентированной спрямляемой жордановой кривой.

Замкнутая жорданова кривая (контур). Длина контура и криволинейный интеграл 1-го рода вдоль спрямляемого контура. Ориентация контура, классы параметризаций, сохраняющих и меняющих ориентацию. Криволинейный интеграл 2-го рода вдоль спрямляемого ориентированного контура.

Области, линейная связность областей. Первообразная функции на R^d. Необходимое условие существования первообразной. Теорема об эквивалентности существования первообразной и независимости криволинейного интеграла от пути. Нахождение первообразной с помощью криволинейного интеграла.

Положительная ориентация плоского контура. Формула Грина. Односвязные области. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла. Условия независимости криволинейного интеграла от пути.

Тема 16. Поверхностные интегралы

Поверхность, параметрическая поверхность. Нормаль и касательная плоскость к поверхности.

Площадь поверхности. Ориентация поверхности.

Поверхностные интегралы первого и второго рода.

Поверхность с краем. Формула Стокса.

Формула Гаусса–Остроградского.

Тема 17. Элементы векторного анализа

Векторное поле. Поток, дивергенция, ротор, циркуляция. Потенциальное поле.

Формулы Грина, Стокса и Гаусса–Остроградского в теории поля.

Тема 18. Аналитические функции

Аналитические функции и соответствующие им конформные отображения. Элементарные аналитические функции.

Тема 19. Интегралы и ряды аналитических функций

Интегрирование функций комплексного переменного. Интегральная теорема Коши и формула Коши. Ряд Тейлора. Ряд Лорана и особые точки однозначного характера. Теория вычетов и ее приложения.

Список литературы по дисциплине

Основная литература

1 Г.И.Архипов, В.А.Садовничий, В.Н.Чубариков, Лекции по математическому анализу, М.: Высшая школа, 2000.
2 В.А.Зорич, Математический анализ (2 тома), М.: Наука, 1981 и другие издания.В.А.Зорич, Математический анализ (2 тома), М.: Наука, 1981.
3 Л.Д.Кудрявцев Курс математического анализа. – М., Высшая школа, Т. 1, 2 – 1981 и др. издания.
4 С.М.Никольский, Курс математического анализа Т. 1, 2. – М.: Наука. 1990.
5 Б.П.Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу.- М.: Наука, 1990.
6 Э.И.Зверович, Вещественный и комплексный анализ, Т. 1-6. – Минск, Вышейшая школа, 2008
7 Сборник задач по математическому анализу / Под ред. Кудрявцева Л.Д., М., Наука, Т. 1 – 1984, Т. 2 – 1986, Т. 3 – 1994 и др. издания.
8 Ю.В.Сидоров, М.Ф.Федорюк, М.И Шабунин. Лекции по ТФКП. М.,Наука, 1989.
9 Б.В.Шабат Введение в теорию функций комплексный анализ. Ч.I. М.: Наука, 1976.
10 М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
11 И.А.Александров, В.В.Соболев, Аналитические функции комплексно-го переменного. М.: Высшая школа, 1984.
12 Л.И.Волковысский, Г.Л.Лунц, И.Г.Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М. Наука, 1970.

Дополнительная литература

13 Г.М.Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах.– М., Наука – 1969 и др. издания.
14 В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.Х.Сендов, Математический анализ. – М.: Наука, 1979.
15 А.М.Тер-Крикоров, И.И.Шабунин, Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988.
16 У.Рудин, Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976.
Г.Полиа, Г.Сеге, Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2 – М., Наука, 1978.
17 Б.Гелбаум, Дж.Олмстед, Контрпримеры в анализе. М., Мир, 1967.
18 А.И.Маркушевич. Теории аналитических функций. Т.1, 2. М.: Наука,1968.
19 М. А. Евграфов Аналитические функции. М., Наука,1968 и др. издания.
20 А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов. Теория функций комплексной переменной. М., Наука,1974 и др. издания.
21 Сборник задач по теории аналитических функций / Под ред. Евграфова М. А., М., 1972.

Диагностика компетенций студента

С целью текущего контроля предусматривается проведение контрольных работ (как правило, по одной на тему) и домашних работ по индивидуальным заданиям (как правило, по одной на лабораторное занятие). По итогам каждого семестра проводится зачет и экзамен.

Министерство образования Республики Беларусь
Учебно-методическое объединение вузов Республики Беларусь
по естественнонаучному образованию

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель Министра образования
Республики Беларусь

____________________________ А.И. Жук

«_____» ________________________2013 г.

Регистрационный № ТД-____________/тип.

Математический анализ

Типовая учебная программа по учебной дисциплине для специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям) 1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность) 1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность) 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность) 1-31 03 02 Механика и математическое моделирование 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

СОГЛАСОВАНО

____
(должность представителя заинтересованного

____
министерства или ведомства)

______________ ______________
(подпись) (И.О.Фамилия)

____
(дата)

СОГЛАСОВАНО

Председатель Учебно-методического объединения ____________________
(название учебно-методического

____
объединения в сфере высшего образования)

______________ ______________
(подпись) (И.О.Фамилия)

____
(дата)

СОГЛАСОВАНО

Начальник Управления высшего образования Министерства образования Республики Беларусь

______________ ______________
(подпись) (И.О.Фамилия)

____
(дата)

СОГЛАСОВАНО

Проректор по научно-методической работе Государственного учреждения образования «Республиканский институт высшей школы»

______________ ______________
(подпись) (И.О.Фамилия)

____
(дата)

Эксперт-нормоконтролер

______________ ______________
(подпись) (И.О.Фамилия)

____
(дата)

Минск 201_

СОСТАВИТЕЛИ:

Н.В. Бровка – профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета, доктор педагогических наук, профессор

В.Г. Кротов – заведующий кафедрой теории функций Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

А.А. Пекарский – профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра математического анализа Учреждения образования «Белорусского государственного университета им. М. Танка»

А.П. Рябушко – профессор кафедры высшей математики № 1 учреждения образования «Белорусский национальный технический университет», доктор физико-математических наук, заслуженный работник образования, профессор

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:

Кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол №____ от ________________________ 201_ г.)

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № ____ от ________________________ 201_ г.)

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения вузов Республики Беларусь по естественнонаучному образованию

(протокол № ____ от ________________________ 201_ г.);

Ответственный за редакцию: В.Г. Кротов
Ответственный за выпуск: В.Г. Кротов

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Дисциплина «Математический анализ» является базовой для преподавания большинства математических курсов. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики», «Экстремальные задачи и вариационное исчисление». При изучении математического анализа студенты знакомятся с основами дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных. Основные понятия дифференциального и интегрального исчисления являются базовыми для освоения указанных выше математических дисциплин.

Элементы теории предела и дифференциального исчисления используются при изучении дисциплин «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики». Базовые конструкции интегрального исчисления используются при решении интегральных уравнений в рамках изучения дисциплины «Функциональный анализ», при создании вариационных принципов в задачах математической физики (дисциплина «Уравнения математической физики»), при изучении геометрии гладких поверхностей в рамках дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология», при построении необходимых и достаточных условий оптимальности в задачах оптимизации (дисциплина «Экстремальные задачи и вариационное исчисление»).

Основными методами изучения дисциплины «Математический анализ» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала. Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, коллоквиумов, компьютерного тестирования, самостоятельных работ и опросов на практических занятиях.

Методы привития студентами практических навыков использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на практических занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время практических занятий в форме проверки домашних заданий, компьютерного тестирования, а также на контрольных работах и зачетах.

Цель дисциплины "Математический анализ": создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики.

Образовательная цель: изложение основ дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Математический анализ»:

– формирование у студентов понятия числа:

– изучение понятия предела и освоение этого понятия с целью практического использования при решении различных задач математики:

– изучение основ дифференциального исчисления, использование элементов дифференциального исчисления при решении экстремальных задач и других задач современной математики;

– использование основ интегрального исчисления при решении задач математики, механики, математической физики.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– основные понятия и результаты дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных;

– методы доказательств и алгоритмы решения задач математического анализа;

уметь:

– использовать основные результаты математического анализа в практической деятельности;

– использовать теоретические и практические навыки применения дифференциального и интегрального исчисления в математике;

владеть:

– основными методами интегрирования и дифференцирования функций, рядов и интегралов;

– методами доказательств и аналитического исследования функций, рядов и интегралов на непрерывность, сходимость, равномерную сходимость;

– навыками самообразования и способами использования аппарата математического анализа для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Примерный тематический план дисциплины для специальности
1-31 03 01 Математика (по направлениям)
1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)
1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность)
1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность)

№	Наименование тем и разделов	Распределение часов по видам занятий		
		Всего	Лекц.	Лабор.
1	2	3	4	5
1	**Тема 1.** Элементы математической логики и теории множеств	10	6	4
2	**Тема 2.** Множество действительных чисел	14	10	4
3	**Тема 3.** Предел последовательности	24	10	14
4	**Тема 4.** Предел функции	18	4	14
5	**Тема 5.** Непрерывные функции	18	12	6
6	**Тема 6.** Дифференцируемые функции	38	20	18
7	**Тема 7.** Неопределенный интеграл	22	10	12
8	**Тема 8.** Определенный интеграл Римана	26	12	14
9	**Тема 9.** Метрические пространства	12	8	4
10	**Тема 10.** Дифференцируемые функции многих переменных	22	12	10
11	**Тема 11.** Дифференцируемые векторные функции	22	10	12
12	**Тема 12.** Числовые ряды	26	12	14
13	**Тема 13.** Функциональные последовательности и ряды	28	14	14
14	**Тема 14.** Ряды Фурье	22	10	12
15	**Тема 15.** Интегралы, зависящие от параметра	22	12	10
16	**Тема 16.** Мера Жордана в R^d	14	10	4
17	**Тема 17.** Интеграл Римана в R^d	26	12	14
18	**Тема 18.** Криволинейные интегралы	28	14	14
19	**Тема 19.** Поверхностные интегралы	24	10	14
20	**Тема 20.** Элементы векторного анализа	8	4	4
	Всего по курсу	**424**	**212**	**212**

Примерный тематический план дисциплины для специальности 1-31 03 02 Механика и математическое моделирование

№	Наименование тем и разделов	Распределение часов по видам занятий		
		Всего	Лекц.	Практ.
1	2	3	4	5
1	**Тема 1.** Элементы математической логики и теории множеств	10	6	4
2	**Тема 2.** Множество действительных чисел	14	10	4
3	**Тема 3.** Предел последовательности	24	10	14
4	**Тема 4.** Предел функции	18	4	14
5	**Тема 5.** Непрерывные функции	18	12	6
6	**Тема 6.** Дифференцируемые функции	38	20	18
7	**Тема 7.** Неопределенный интеграл	22	10	12
8	**Тема 8.** Определенный интеграл Римана	26	12	14
9	**Тема 9.** Метрические пространства	12	8	4
10	**Тема 10.** Дифференцируемые функции многих переменных	22	12	10
11	**Тема 11.** Дифференцируемые векторные функции	22	10	12
12	**Тема 12.** Числовые ряды	26	12	14
13	**Тема 13.** Функциональные последовательности и ряды	28	14	14
14	**Тема 14.** Ряды Фурье	22	10	12
15	**Тема 15.** Интегралы, зависящие от параметра	22	12	10
16	**Тема 16.** Мера Жордана в R^d	14	10	4
17	**Тема 17.** Интеграл Римана в R^d	26	12	14
18	**Тема 18.** Криволинейные интегралы	28	14	14
19	**Тема 19.** Поверхностные интегралы	24	10	14
20	**Тема 20.** Элементы векторного анализа	8	4	4
	Всего по курсу	**406**	**204**	**202**

Примерный тематический план дисциплины для специальности 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

№	Наименование тем и разделов	Распределение часов по видам занятий		
		Всего	Лекц.	Практ.
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	**Тема 1.** Элементы математической логики и теории множеств	10	6	4
2	**Тема 2.** Множество действительных чисел	14	10	4
3	**Тема 3.** Предел последовательности	24	10	14
4	**Тема 4.** Предел функции	18	4	14
5	**Тема 5.** Непрерывные функции	18	12	6
6	**Тема 6.** Дифференцируемые функции	38	20	18
7	**Тема 7.** Неопределенный интеграл	22	10	12
8	**Тема 8.** Определенный интеграл Римана	26	12	14
9	**Тема 9.** Метрические пространства	12	8	4
10	**Тема 10.** Дифференцируемые функции многих переменных	22	12	10
11	**Тема 11.** Дифференцируемые векторные функции	22	10	12
12	**Тема 12.** Числовые ряды	26	12	14
13	**Тема 13.** Функциональные последовательности и ряды	28	14	14
14	**Тема 14.** Ряды Фурье	22	10	12
15	**Тема 15.** Интегралы, зависящие от параметра	22	12	10
16	**Тема 16.** Мера Жордана в R^d	14	10	4
17	**Тема 17.** Интеграл Римана в R^d	26	12	14
18	**Тема 18.** Криволинейные интегралы	28	14	14
19	**Тема 19.** Поверхностные интегралы	24	10	14
20	**Тема 20.** Элементы векторного анализа	8	4	4
	Всего по курсу	**424**	**212**	**212**

Содержание учебного материала

Тема 1. Элементы математической логики и теории множеств

Высказывания, значение истинности высказывания. Операции над высказываниями (конъюнкция, дизъюнкция, импликация, отрицание, эквивалентность). Высказывательные переменные. Формулы алгебры высказываний. Основные тавтологии (двойное отрицание, коммутативность и ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность, правила де Моргана и др.). Одноместные предикаты. Кванторы общности и существования. Отрицание предикатов и кванторов.

Множества и операции над ними (объединение, пересечение, разность, дополнение). Двойственность операций объединения и пересечения. Декартово произведение множеств.

Бинарные отношения и их примеры. Понятие отображения (функции) и графика отображения. Область определения и область значений, образы и прообразы. Композиция отображений. Полный прообраз множества. Сужение функции. Сюръекция, инъекция, биекция. Обратное отображение. Отношение эквивалентности, рефлексивность, симметричность, транзитивность.

Тема 2. Множество действительных чисел

Аксиоматика множества действительных чисел. Модели множества действительных чисел, непротиворечивость, изоморфизм моделей. Важнейшие подмножества.

Максимальный и минимальный элементы множества. Границы числовых множеств. Множества, ограниченные сверху и снизу. Точные верхняя и нижняя границы множества. Теорема Дедекинда.

Позиционные системы счисления. Алгоритм определения q-ичных цифр числа.

Модель множества вещественных чисел. Мощность множеств. Мощность пустого, конечного множества. Счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность континуума. Теорема Кантора о несчетности континуума.

Тема 3. Предел последовательности

Абсолютная величина числа и окрестности, свойства модуля. Числовые последовательности. Арифметические операции с последовательностями. Ограниченные последовательности. Определение предела последовательности. Общие свойства предела (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности). Предел и операции над последовательностями. Предельный переход в неравенствах.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства бесконечно малых последовательностей. Символы Харди и Ландау. Шкала бесконечно больших последовательностей. Различные формы полноты множества вещественных чисел. Последовательности стягивающихся сегментов (отрезков), лемма Кантора.

Лемма Бореля-Лебега о покрытиях отрезка интервалами. Предельная точка множества, лемма Больцано-Вейерштрасса. Последовательности Коши, критерий Коши сходимости последовательности.

Монотонные последовательности. Теорема о сходимости монотонных последовательностей. Неравенство Бернулли, число Эйлера–Непера. Оценки для числа Эйлера–Непера.

Подпоследовательности и частичные пределы, лемма Больцано-Вейерштрасса для последовательностей. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их характеристические свойства. Монотонные перестановки ограниченной последовательности и их пределы.

Тема 4. Предел функции

Определение Коши предела функции и его характеризация в терминах последовательностей (предел функции по Гейне). Общие свойства предела функции (единственность предела, локальная ограниченность функции, имеющей предел). Арифметические операции над числовыми функциями. Предел и операции над функциями. Предел функции и неравенства. Два замечательных предела.

Односторонние пределы. Критерий существования предела в терминах односторонних пределов. Пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Символы ∞, $+\infty$, $-\infty$. Общее определение предела функции по базе. Символы Харди и Ландау для функций. Существование предела функции. Критерий Коши для предела функции. Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

Тема 5. Непрерывные функции

Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций (локальная ограниченность, локальное сохранение знака). Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность композиции.

Непрерывность функции на множестве. Глобальные свойства непрерывных функций на отрезке. Теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции и о достижении точных границ. Теоремы Больцано-Коши о промежуточных значениях. Теорема о непрерывном образе отрезка. Равномерная непрерывность, теорема Кантора. Колебание функции.

Биективность строго монотонной функции. Критерий глобальной непрерывности монотонной функции. Критерий взаимной однозначности непрерывной функции. Классификация разрывов функции. Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.

Элементарные функции. Степени числа, степенная, экспоненциальная и логарифмическая функции и их свойства (непрерывность и монотонность). Три замечательных предела

Тема 6. Дифференцируемые функции

Определение производной. Примеры естественнонаучных задач, приводящих к понятию производной. Дифференцируемость и ее связь с существованием производной. Связь непрерывности и дифференцируемости. Дифференциал, приближенные вычисления с использованием дифференциала.

Производные элементарных функций. Правила дифференцирования. Дифференцирование и арифметические операции. Дифференцирование композиции. Производная обратной функции. Производные высших порядков. Полином Тейлора.

Экстремумы функции. Лемма Ферма (необходимое условие экстремума). Основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши).

Раскрытие неопределенностей. Правила Лопиталя.

Формула Тейлора. Различные формы остатка формулы Тейлора (Пеано, Лагранжа, Коши).

Пять основных разложений элементарных функций. Понятие о сходимости числовых рядов. Сходимость разложений Тейлора элементарных функций.

Исследование функций с помощью производной. Монотонность и знак производной. Первое и второе достаточные условия экстремума. Алгоритм отыскания глобального экстремума.

Выпуклые функции. Различные формы условия выпуклости. Свойства выпуклых функций (существование односторонних производных, дифференцируемость всюду, кроме счетного множества, непрерывность).

Условия выпуклости в терминах первой и второй производной. Точки перегиба. Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения: неравенства Юнга, Гельдера и Минковского.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения эскиза графика.

Тема 7. Неопределенный интеграл

Первообразная функции. Описание класса всех первообразных. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов элементарных функций. Обобщенные первообразная и неопределенный интеграл.

Основные методы интегрирования (интегрирование по частям и замена переменной).

Интегрирование рациональных функций.

Метод Остроградского. Интегрирование рациональных тригонометрических функций.

Интегрирование дробно-линейных и квадратичных иррациональностей. Подстановки Эйлера.

Тема 8. Определенный интеграл Римана

Примеры естественнонаучных задач, приводящих к понятию интеграла

Римана. Определение интеграла Римана: разбиение отрезка, ранг разбиения, разбиения с отмеченными точками и интегральные суммы, предел интегральных сумм. Класс интегрируемых функций. Необходимое условие интегрируемости.

Суммы Дарбу и их свойства. Верхний и нижний интегралы Дарбу и основные неравенства для них. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу и в терминах интегралов Дарбу. Классы интегрируемых функций (непрерывные, ограниченные с конечным числом точек разрыва, монотонные).

Интеграл по ориентированному промежутку. Свойства определенного интеграла: интегрируемость линейных комбинаций, линейность, аддитивность по области, монотонность. Неравенства для определенного интеграла. Непрерывность интеграла с переменным верхним пределом. Теоремы о среднем значении, формулы Бонне.

Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом. Существование первообразной у непрерывной функции и обобщенной первообразной у кусочно непрерывной функции. Формула Ньютона–Лейбница. Основные методы вычисления определенных интегралов – интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Формула Тейлора с остатком в виде интеграла.

Приложения определенного интеграла. Длина пространственной кривой, площадь криволинейной трапеции, площадь поверхности вращения, объем тела вращения.

Несобственные интегралы. Особенности функции, определение интеграла от функции с особенностью. Свойства несобственного интеграла: совпадение с интегралом Римана для интегрируемых функций, линейность, аддитивность и монотонность. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле. Случай нескольких особенностей. Главное значение по Коши. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютная и условная сходимость. Признак сравнения для интегралов от положительных функций. Признаки Абеля и Дирихле.

Тема 9. Метрические пространства

Метрика, шары, открытые множества, подпространство. Внутренняя точка множества и его внутренность. Предельная и изолированная точка множества. Замкнутые множества. Теорема двойственности открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Граница множества, критерий открытости и замкнутости в терминах границы. Компактные и связные множества. Замкнутые подмножества компакта.

Сходящиеся последовательности в метрическом пространстве, предел функции в метрическом пространстве. Отделимость и единственность предела. Непрерывность функции на метрическом пространстве. Глобальный критерий непрерывности. Ограниченные множества. Последовательность Коши, полнота метрического пространства. Замкнутые шары, теорема Кантора о вложенных замкнутых шарах.

Норма, линейное нормированное пространство, полнота. Метрика в линейном нормированном пространстве. Евклидово d-мерное пространство: скалярное произведение и его свойства, неравенство Коши, норма, координатная сходимость, полнота, важнейшие подмножества (сегмент, интервал). Критерий компактности (теорема Гейне–Бореля).

Непрерывные функции на метрическом пространствах. Теорема о непрерывном образе компакта, теорема о непрерывном образе связного множества. Путь в метрическом пространстве, линейно связные множества. Выпуклое множество в векторном пространстве. Равномерно непрерывные функции на метрическом пространстве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Тема 10. Дифференцируемые функции многих переменных

Линейные формы на R^d, гиперплоскость, общий вид линейной формы. Дифференцируемые функции, производная как линейная форма на R^d. Свойства производной. Геометрическая интерпретация дифференцируемости. Формула Лагранжа.

Частные производные функции и их связь с производной. Достаточное условие дифференцируемости. Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл.

Частные производные высших порядков. Теорема Шварца о независимости непрерывной смешанной производной от последовательности дифференцирований.

Мультииндексы. Полином Тейлора, различные формы записи, формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа. Интегральная форма остатка.

Квадратичные формы и их матрицы. Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра (без доказательства). Локальные экстремумы функции. Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции. Достаточное условие экстремума.

Тема 11. Дифференцируемые векторные функции

Векторные функции, компоненты векторной функции. Класс $L(R^n,R^m)$ линейных отображений R^n в R^m. Общий вид элементов $L(R^n,R^m)$. Норма в $L(R^n,R^m)$. Норма композиции линейных отображений. Дифференцируемые векторные функции, производная как элемент $L(R^n,R^m)$. Свойства производной и связь с производными компонент. Матрица Якоби. Производная композиции. Гомеоморфизмы топологических пространств. Теорема Брауера о гомеоморфизмах между открытыми множествами разных размерностей (без доказательства).

Теорема об обратной функции. Сравнение с одномерным случаем.

Постановка задачи о неявной функции. Теорема о неявной функции. Формулы для нахождения производных неявной функции.

Тема 12. Числовые ряды

Основная терминология теории рядов. Ряд, слагаемые ряда, частные суммы.

Сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Остатки ряда, связь сходимости остатков со сходимостью ряда. Операции над сходящимися рядами.

Критерий Коши сходимости рядов. Необходимое условие сходимости ряда. Абсолютная и условная сходимость, связь между ними.

Положительные ряды, критерий сходимости. Признак сравнения и его различные формы. Признак Коши с корнем. Теорема Куммера. Признаки Даламбера, Раабе, Бертрана, Гаусса. Интегральный признак Коши. Оценки остатков и частных сумм.

Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Ряды Лейбница.

Ряды со скобками. Перестановки ряда, сумма перестановки абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов. Умножение рядов, теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.

Тема 13. Функциональные последовательности и ряды

Функциональные ряды и последовательности. Равномерная сходимость.

Критерий Коши равномерной сходимости. Теорема о перестановке предельных переходов.

Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле для равномерной сходимости.

Функциональные свойства предела последовательности и суммы ряда: непрерывность, теорема Дини, дифференцируемость, интегрируемость.

Пространство непрерывных функций: векторная структура, норма, полнота. Теорема Вейерштрасса о плотности алгебраических полиномов в пространстве непрерывных функций. Пример Ван дер Вардена непрерывной нигде не дифференцируемой функции.

Тема 14. Ряды Фурье

Тригонометрическая система. Интегральные представления для сумм Фурье.Минимизирующее свойство частичных сумм ряда Фурье, его следствия.

Лемма Римана-Лебега. Принцип локализации.

Условия сходимости ряда Фурье в точке. Теорема Дини.

Признак Дини-Липшица равномерной сходимости рядов Фурье Теорема Дирихле-Жордана. Средние Фейера и их равномерная сходимость.

Тема 15. Интегралы, зависящие от параметра

Элементарная теория интегралов от параметра. Свойства непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости.

Несобственные интегралы от параметра. Свойство непрерывности.

Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов от параметра.

Интеграл вероятностей. Гамма- и бета-функции Эйлера, их функциональные свойства и некоторые соотношения для них, связь между ними.

Формула Стирлинга.

Тема 16. Мера Жордана R^d

Мера сегмента и ее свойства (монотонность, аддитивность, субаддитивность). Элементарные множества (фигуры), операции над ними. Дизъюнктное разложение фигуры. Мера фигуры, корректность ее определения, свойства меры фигуры (монотонность, аддитивность, субаддитивность).

Внутренняя и внешняя меры Жордана ограниченного множества и связь между ними. Измеримые множества, мера Жордана. Критерии измеримости (в терминах приближающих фигур и в терминах границы).

Примеры: площадь криволинейной трапеции, площадь круга, число пи, неизмеримое по Жордану множество.

Лемма о границе объединения, пересечения и разности. Операции над измеримыми множествами.

Свойства меры Жордана (монотонность, аддитивность, субаддитивность).

Тема 17. Интеграл Римана в R^d

Определение интеграла Римана на множестве, измеримом по Жордану: разбиение множества, ранг разбиения, разбиения с отмеченными точками и интегральные суммы, предел интегральных сумм. Класс интегрируемых функций. Необходимое условие интегрируемости.

Суммы Дарбу и их свойства. Верхний и нижний интегралы Дарбу и основные неравенства для них. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу и в терминах интегралов Дарбу. Классы интегрируемых функций (непрерывные, ограниченные с множеством точек разрыва жордановой меры нуль). Критерий Лебега интегри-руемости по Риману.

Свойства интеграла Римана: интегрируемость на подмножестве, аддитивность, линейность, монотонность. Неравенства для интеграла: интегрируемость модуля, теорема о среднем. Интегрируемость произведения.

Мера декартова произведения измеримых множеств. Теорема об интеграле по декартовому произведению множеств (теорема Фубини) и ее следствия: интегрируемость по сечениям, вычисление интегралов сведением к повторному, вычисление меры с помощью интеграла от меры сечения.

Преобразование меры при линейном отображении R^d. Лемма о внешней мере Жордана диффеоморфных образов малых кубов. Замена переменной в интеграле Римана. Примеры: полярные координаты в R^2, сферические и цилиндрические координаты в R^3, сферические координаты в R^d.

Тема 18. Криволинейные интегралы

Функции ограниченной вариации и их свойства, аддитивность и непрерывность вариации. Критерий Жордана.

Интеграл Римана-Стилтьеса и его свойства (линейность, аддитивность, формула интегрировании по частям). Классы существования интеграла Стилтьеса, оценка интеграла. Формулы для вычисления с помощью интеграла Римана.

Путь, след пути. Спрямляемый путь и его длина. Критерий Жордана спрямляемости. Гладкий путь и формула для вычисления длины гладкого пути. Интегралы первого и второго рода вдоль пути и формулы для их вычисления.

Жорданова кривая, ее параметризации, непрерывность отображения, обратного к параметризации. Описание класса параметризаций. Длина жордановой кривой и корректность ее определения. Натуральная параметризация и ее существование.

Криволинейный интеграл 1-го рода вдоль спрямляемой жордановой кривой и корректность его определения, формулы для вычисления. Ориентация жордановой кривой, классы параметризаций, сохраняющих и меняющих ориентацию. Криволинейный интеграл 2-го рода вдоль ориентированной спрямляемой жордановой кривой.

Замкнутая жорданова кривая (контур). Длина контура и криволинейный интеграл 1-го рода вдоль спрямляемого контура. Ориентация контура, классы параметризаций, сохраняющих и меняющих ориентацию. Криволинейный интеграл 2-го рода вдоль спрямляемого ориентированного контура.

Области, линейная связность областей. Первообразная функции на R^d. Необходимое условие существования первообразной. Теорема об эквивалентности существования первообразной и независимости криволинейного интеграла от пути. Нахождение первообразной с помощью криволинейного интеграла.

Положительная ориентация плоского контура. Формула Грина. Односвязные области. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла. Условия независимости криволинейного интеграла от пути.

Тема 19. Поверхностные интегралы

Поверхность, параметрическая поверхность. Нормаль и касательная плоскость к поверхности.

Площадь поверхности. Ориентация поверхности.

Поверхностные интегралы первого и второго рода.

Поверхность с краем. Формула Стокса.

Формула Гаусса–Остроградского.

Тема 20. Элементы векторного анализа

Векторное поле. Поток, дивергенция, ротор, циркуляция. Потенциальное поле.

Формулы Грина, Стокса и Гаусса–Остроградского в теории поля.

Информационно-методическая часть

Основная литература

1 Г.И.Архипов, В.А.Садовничий, В.Н.Чубариков, Лекции по математическому анализу, М.: Высшая школа, 2000.
2 В.А.Зорич, Математический анализ (2 тома), М.: Наука, 1981 и другие издания.В.А.Зорич, Математический анализ (2 тома), М.: Наука, 1981.
3 Л.Д.Кудрявцев Курс математического анализа. – М., Высшая школа, Т. 1, 2 – 1981 и др. издания.
4 С.М.Никольский, Курс математического анализа Т. 1, 2. – М.: Наука. 1990.
5 Б.П.Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу.- М.: Наука, 1990.
6 Э.И.Зверович, Вещественный и комплексный анализ, Т. 1-6. – Минск, Вышейшая школа, 2008
7 Сборник задач по математическому анализу / Под ред. Кудрявцева Л.Д., М., Наука, Т. 1 – 1984, Т. 2 – 1986, Т. 3 – 1994 и др. издания.

Дополнительная литература

13 Г.М.Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах.– М., Наука – 1969 и др. издания.
14 В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.Х.Сендов, Математический анализ. – М.: Наука, 1979.
15 А.М.Тер-Крикоров, И.И.Шабунин, Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988.
16 У.Рудин, Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976.
Г.Полиа, Г.Сеге, Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2 – М., Наука, 1978.
17 Б.Гелбаум, Дж.Олмстед, Контрпримеры в анализе. М., Мир, 1967.

Диагностика компетенций студента

С целью текущего контроля предусматривается проведение контрольных работ (как правило, по одной на тему) и домашних работ по индивидуальным заданиям (как правило, по одной на лабораторное занятие). По итогам каждого семестра проводится зачет и экзамен.

ВОСПИТАТЕЛЬНО-ИДЕОЛОГИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Математический анализ» составлен в соответствии с основными направлениями государственной молодежной политики, отраженными в Концепции непрерывного воспитания детей и учащейся молодежи в Республике Беларусь, в Плане идеологической и воспитательной работы БГУ на 2012-2013 годы и других государственных программах, нормативно-правовых и инструктивно-методических документах, определяющих приоритетные направления идеологии белорусского государства.

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Математический анализ» способствует созданию условий для формирования нравственно зрелой, интеллектуально развитой личности обучающегося, которой присущи социальная активность, гражданская ответственность и патриотизм, приверженность к университетским ценностям и традициям, стремление к профессиональному самосовершенствованию, активному участию в экономической и социально-культурной жизни страны.

Основными **задачами** идеологической и воспитательной составляющей Учебно-методического комплекса по дисциплине «Математический анализ» являются:

1. Максимальное использование потенциальных возможностей кафедры по формированию гражданско-правовой устойчивости профессорско-преподавательского состава и студентов.
2. Содействие становлению личности, духовно-нравственное и интеллектуальное развитие студентов.
3. Совершенствование информационного сопровождения организации жизнедеятельности студентов, содействие социальной адаптации, оказание им помощи в усвоении и выполнении учебного материала, установленных норм и правил внутреннего распорядка, прав и обязанностей.