Белорусский государственный университет
механико-математический факультет
кафедра математических методов теории управления

В.Г.Кротов

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ
(лекционные записки)

Минск 2006

Оглавление

Глава 1
Основные понятия теории множеств

В этой главе мы познакомимся с понятием множества — важнейшим первичным понятием в математике, без использования которого трудно представить себе возможность ее развития.

Здесь будут даны разъяснения по поводу всей основной терминологии, связанной с множествами. При этом мы будем придерживаться, в основном, канторовского подхода — исторически первого взгляда на множество. Однако, некоторое внимание будет уделено и аксиоматике Цермело–Френкеля.

§ 1. "Наивная" теория множеств Кантора

1.1. Понятие множества

Множество — это одно из основных первичных математических понятий. Оно не определяется, мы можем дать лишь его описание. Синонимами термина "множество" являются набор, семейство, класс, коллекция, совокупность и т.д.

По словам Г.Кантора (создателя теории множеств и основателя теоретико-множественного языка в математике) "под множеством мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли".

Это описание не может служить, конечно, определением множества, так как оно использует другие понятия, которые не определены. Его цель — дать разъяснения этому понятию. В теории множеств понятие множества задается с помощью некоторой системы аксиом.

Объекты, составляющие множество, называют его **элементами**. Задать множество — это значит указать правило, по которому можно отличить его элементы, от объектов, ему не принадлежащих. Запись $x \in X$ будет всегда обозначать, что x является элементом множества X, а запись $x \notin X$ означает, что x не является элементом X.

1.2. Способы задания множества

Наиболее употребительными являются следующие три способы задания множества.

1) **Перечисление** элементов, например, запись

$$X = \{a, b, \ldots, z\}$$

означает, что множество состоит из элементов a, b, $\ldots$, z. Другими словами, здесь мы явно указываем все элементы множества.

Чаще всего этот способ употребляется для так называемых конечных множеств.

2) **Индексация** элементов множества — это способ перечисления элементов множества с помощью элементов некоторого другого множества

$$X = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}.$$

Здесь множество A называется **множеством индексов**.

3) Определение **по свойству** применяется тогда, когда имеется некоторое свойство P, которым обладают элементы множества, а объекты, не являющиеся его элементами этим свойством не обладают. В таком случае используется запись

$$X = \{x : x \text{ обладает свойством } P\},$$

а свойство P называется в таком случае характеристическим для множества X. Этот последний способ является, пожалуй, наиболее широко распространенным и служит богатейшим источником построения разнообразных примеров множеств.

1.3. Парадоксы наивной теории множеств

Отметим, что столь широкое толкование множества (по Кантору) является внутренне противоречивым. Наиболее известными иллюстрациями этому являются парадоксы, например, парадокс парикмахера или парадокс Рассела.

Парадокс парикмахера. Пусть X — непустое множество жителей деревни и Y — множество ее жителей, которые не бреются сами. Деревенский брадобрей $x \in X$ повесил у своего входа объявление

”Брею тех и только тех, кто не бреет себя сам”.

Тогда x либо принадлежит множеству Y либо нет. Если он принадлежит Y, то не бреется сам и потому должен себя брить, то есть не принадлежать Y. Если же он не принадлежит Y, то бреется сам и, следовательно, не должен себя брить. В последнем случае он принадлежит Y. Таким образом, мы в любом случае получаем противоречие и множество жителей деревни, которых бреет брадобрей противоречиво.

Парадокс Рассела. Пусть M — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента.

Тогда мы имеем следующее. С одной стороны, если $M \in M$, то M не содержит себя в качестве элемента и должно быть $M \notin M$. С другой стороны, если $M \notin M$, то M содержит себя в качестве элемента $M \in M$. Таким образом, и здесь мы имеем дело с противоречивым множеством.

Чтобы не пользоваться такими противоречивыми множествами, будем считать, что все множества, которые изначально рассматриваются в рамках какой-либо теории, являются подмножествами одного множества, которое называется универсальным множеством для данной теории.

Примерами могут служить множество натуральных чисел в арифметике, множество действительных чисел а математическом анализе, множество комплексных чисел в теории аналитических функций и т.д.

При этом в процессе развития теории универсальное множество может расширяться. Но всегда в каждой конкретной ситуации это универсальное множество будет указываться вполне конкретно, если его выбор не ясен из контекста.

На этой базе будем строить другие множества, используя понятие подмножества, а также операции над множествами, которые скоро будут рассмотрены.

Чтобы избежать противоречий, рассмотренных в предыдущем разделе, в теории множеств (как и в других разделах математики) применяется аксиоматический метод построения теории. Мы познакомимся с ним несколько позже. При первичном знакомстве с теорией множеств для понимания ее основных конструкций и теорем нам будет вполне достаточно "наивного" канторовского подхода.

§ 2. Отношения и операции над множествами

2.1. Включение и равенство множеств

Определение 1.1. *Будем говорить, что множество X является* ***подмножеством*** *множества Y, если любой элемент из X принадлежит также и Y.*

В таком случае будем говорить также, что X содержится в Y и кратко записывать это так

$$X \subset Y.$$

Такое отношение между множествами называется **отношением включения**. Оно обладает свойствами

1) $X \subset X$ (рефлексивность),

2) если $X \subset Y$ и $Y \subset Z$, то $X \subset Z$ (транзитивность).

Определение 1.2. *Два множества X и Y называются* ***равными****, если каждое из них содержится в другом, то есть $X \subset Y$ и $Y \subset X$.*

Равенство множеств записываем так: $X = Y$.

Отметим, что включение множеств $X \subset Y$ не исключает их равенства.

Определение 1.3. *Если $X \subset Y$, но $X \neq Y$, то будем говорить, что X является* ***собственным подмножеством*** *для Y.*[1]

[1]Иногда в математической литературе используются несколько иные обозначения для включений множеств. Именно, вместо $X \subset Y$ пишут $X \subseteq Y$, а знак $X \subset Y$ используют для собственных включений.

Таким образом, чтобы установить, что включение $X \subset Y$ собственное, надо доказать, что любой элемент $x \in X$ принадлежит также Y и, кроме того, установить, что некоторый элемент $x_0 \in Y$ не является элементом множества X.

Для того чтобы подчеркнуть, что включение $X \subset Y$ является собственным, иногда пишут $X \subsetneq Y$.

Определение 1.4. ***Пустое множество*** *— это множество, не имеющее элементов. Оно обозначается символом* $\varnothing$.

Естественно считать, что пустое множество является подмножеством любого множества. Тогда нетрудно показать, что пустое множество единственно: если $\varnothing_1$ и $\varnothing_2$ — два пустых множества, то должно быть $\varnothing_1 \subset \varnothing_2$ и $\varnothing_2 \subset \varnothing_1$, следовательно, $\varnothing_1 = \varnothing_2$.

2.2. Операции над множествами.

Пусть X и Y — два множества.

Определение 1.5. ***Объединением*** *множеств X и Y называется множество $X \cup Y$, состоящее из всех элементов, содержащихся хотя бы в одном из множеств X, Y.*

Определение 1.6. ***Пересечением*** *множеств X и Y называется множество $X \cap Y$, состоящее из всех элементов, содержащихся в каждом из множеств X, Y.*

Определение 1.7. *Множества X и Y называются* ***непересекающимися*** *(или* ***дизъюнктными****), если $X \cap Y = \varnothing$.*

Определение 1.8. ***Разностью*** *множеств X и Y называется множество $X \setminus Y$, состоящее из всех элементов, содержащихся в X и не содержащихся в Y.*

Определение 1.9. *Пусть $X \subset Y$, тогда множество $X^c = Y \setminus X$ называется* ***дополнением*** *(относительно Y) множества X.*

Часто для иллюстрации операций над множествами используются диаграммы Вьенна.

2.3. Свойства операций над множествами.

1) $X \cup Y = Y \cup X$ (коммутативность объединения)
2) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ (ассоциативность объединения)
3) $X \cap Y = Y \cap X$ (коммутативность пересечения)

4) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ (ассоциативность пересечения)

5) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения)

6) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения)

7) $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$ (правило Де Моргана)

8) $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$ (правило Де Моргана)

9) $(X^c)^c = X$ (правило двойного отрицания)

Эти свойства операций над множествами легко вытекают непосредственно из определений. Их доказательство является хорошим упражнением. Но прежде, чем это делать мы познакомимся с основными правилами логического вывода.

§ 3. Аксиоматика теории множеств

Здесь мы кратко познакомимся с аксиоматикой теории множеств, о которой говорилось выше. Суть аксиоматического метода состоит в том, что первичные понятия теории и отношения между ними описываются с помощью некоторого числа аксиом. Этим исключается возможность различных толкований основных понятий, поскольку никакими другими свойствами, кроме указанных в аксиомах они не обладают. Чаще всего аксиомы являются сравнительно небольшим набором интуитивно верных свойств первичных объектов, обеспечивающим построение достаточно содержательной теории. Имеется ряд требований, которым должна удовлетворять система аксиом.

Наиболее употребительной является система аксиом Цермело-Френкеля, позволяющая избежать всех известных парадоксов.

Цель настоящего пункта — дать интересующемуся студенту представление о системе аксиом, описывающих свойства математического объекта, называемого множеством.

1. **Аксиома объемности.** *Множества A и B равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы.*

Это означает, что мы отвлекаемся от всех прочих свойств объекта "множество", кроме свойства иметь данные элементы. На практике это означает, что если мы желаем установить, что $A = B$, то мы должны проверить, что любой элемент множества A принадлежит множеству B и, наоборот, любой элемент множества B принадлежит множеству A.

2. **Аксиома выделения.** *Для любого множества A и любого свойства P существует множество B, элементы которого — в точности те и только те элементы множества A, которые обладают свойством P.*

Короче, утверждается, что если A — множество, то и

$$B = \{x \in A : P(x)\}$$

— тоже множество. Эта аксиома очень часто используется в математических конструкциях, когда мы выделяем из множеств подмножества, состоящие из элементов, обладающих тем или иным свойством. Например, из аксиомы выделения следует, что существует пустое подмножество $\varnothing_X = \{x \in X : x \neq x\}$ в любом множестве X, а с учетом аксиомы объемности заключаем, что для любых множеств X и Y выполнено $\varnothing_X = \varnothing_Y$, то есть пустое множество единственно. Его обозначают символом $\varnothing$. Из аксиомы выделения следует также, что если A и B — множества, то $A \setminus B - \{x \in A : x \notin B\}$ — тоже множество. В частности, если X — множество и A — его подмножество, то A — тоже множество.

3. **Аксиома объединения.** *Для любого множества M множеств существует множество, называемое объединением множества M, состоящее из тех и только тех элементов, которые содержатся в элементах множества M.*

Если вместо слов "множество множеств" сказать "семейство множеств", то аксиома объединения приобретает несколько более привычное звучание: существует множество, состоящее из элементов множеств семейства.

4. **Аксиома пары.** *Для любых множеств X и Y существует множество Z такое, что X и Y являются его единственными элементами.*

Множество Z обозначается через X, Y и называется неупорядоченной парой множеств X и Y. Множество Z состоит из одного элемента, если $X = Y$. Упорядоченная пара (X, Y) множеств отличается от неупорядоченной наличием какого-либо признака у одного из множеств пары (то есть указание о том, какой из элементов пары является первым!). Например, $(X, Y) := \{\{X, X\}, \{X, Y\}\}$. Итак, неупорядоченная пара позволяет ввести упорядоченную пару, а упорядоченная пара позволяет ввести прямое произведение множеств, если воспользоваться аксиомой выделения и следующей важной аксиомой.

5. **Аксиома множества подмножеств.** *Для любого множества X существует множество $\mathcal{B}(X)$, состоящее из тех и только тех элементов, которые являются подмножествами множества X.*

Короче говоря, существует множество всех подмножеств данного множества.

Аксиомы 1–5 ограничивают возможность формирования новых множеств.

Для того чтобы сформулировать следующую аксиому, введем понятие последователя X^+ множества X. Положим по определению $X^+ = X \cup \{X\}$. Короче, к X добавлено одноэлементное множество X. Далее, множество назовем индуктивным, если оно содержит в качестве элемента пустое множество и последователь любого своего элемента.

6. **Аксиома бесконечности.** *Индуктивные множества существуют.*

Аксиома бесконечности позволяет с учетом аксиом 1–4 создать эталонную модель множества $\mathbb{N}_0$ натуральных чисел, определив $\mathbb{N}_0$ как пересечение индуктивных множеств, т. е. как наименьшее индуктивное множество. Элементами $\mathbb{N}_0$ являются множества $\varnothing$, $\varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}, \ldots$ которые и являются моделью того, что мы обозначаем символами $0, 1, 2, \ldots$ и называем натуральными числами.

7. **Аксиома подстановки.** Пусть $F(x, y)$ — такое высказывание (точнее, формула), что при любом $x_0 \in X$ существует и притом единственный объект y_0 такой, что $F(x_0, y_0)$ истинно. Тогда объекты y, для каждого из которых существует элемент $x \in X$ такой, что $F(x, y)$ истинно, образуют множество. Этой аксиомой при построении анализа мы пользоваться не будем.

Аксиомы 1–7 составляют аксиоматику теории множеств, известную как аксиоматика Цермело–Френкеля.

К ней обычно добавляется еще одна, независимая от аксиом 1–7 и часто используемая в анализе

8. **Аксиома выбора.** *Для любого семейства непустых множеств существует множество C такое, что, каково бы ни было множество X данного семейства, множество $X \cap C$ состоит из одного элемента.*

Иными словами, из каждого множества семейства можно выбрать в точности по одному представителю так, что выбранные элементы составят множество C. Аксиома выбора, известная в математике как аксиома Цермело, вызвала в свое время горячие дискуссии специалистов.

Глава 2
Введение в математическую логику

Важнейшей отличительной чертой математики является использование доказательств математических законов. Имеется два типа математических законов — это теоремы и аксиомы.

Аксиомы представляют собой интуитивно верный набор утверждений, достаточный для построения содержательной теории — они не требуют доказательств.

Теоремы же, напротив, должны выводиться из аксиом и уже доказанных теорем с помощью правил логического вывода, принятых в математике. Такие математические законы являются верными, только если они снабжены доказательствами.

В этой главе мы и познакомимся с правилами логического вывода.

§ 1. Высказывания

1.1. Высказывания и их значения истинности

Высказыванием будем называть любое повествовательное предложение, которому может быть приписано значение истинности: ложно оно или истинно.

Определение 2.1. *Если P — высказывание, то его **значением истинности** называется число*

$$\alpha(P) = \begin{cases} 1, & \text{если } P \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если } P \text{ ложно.} \end{cases}$$

При этом предполагается, что выполнены следующие два условия:

1) *всякое высказывание является либо истинным, либо ложным* (закон исключенного третьего),

2) *никакое высказывание не может быть и истинным и ложным одновременно* (закон непротиворечивости).

1.2. Операции над высказываниями

Определение 2.2. ***Отрицанием*** *высказывания P называется высказывание $\overline{P}$ (читается "не P"), истинное тогда и только тогда, когда P ложно.*

Определение 2.3. ***Дизъюнкцией*** *(логическим сложением) высказываний P и Q называется высказывание $P \vee Q$ (читается "P или Q"), ложное тогда и только тогда, когда ложны и P, и Q.*

Определение 2.4. ***Конъюнкцией*** *(логическим умножением) высказываний P и Q называется высказывание $P \wedge Q$ (читается "P и Q"), истинное тогда и только тогда, когда истинны и P, и Q.*

Определение 2.5. ***Импликацией*** *высказываний P и Q и называется высказывание $P \Longrightarrow Q$ (читается "из P следует Q"), ложное тогда и только тогда, когда P истинно, а Q ложно.*

Определение 2.6. ***Эквивалентостью*** *высказываний P и Q и называется высказывание $P \Longleftrightarrow Q$ (читается "P равносильно Q"), истинное тогда и только тогда, когда P и Q имеют одинаковые значения истинности.*

Удобно определять также эти операции над высказываниями с помощью так называемой таблицы истинности

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

С помощью операций, исходя из простейших высказываний, можно строить новые, более сложные высказывания, называемые формулами. Например, $(P \vee Q) \Longleftrightarrow R$. Отвлекаясь от конкретного содержания высказываний P, Q, R, будем называть их **высказывательными переменными**. **Формулами алгебры высказываний** являются

1) любая высказывательная переменная,

2) если F_1 и F_2 — формулы, то $\overline{F}_1$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \Longrightarrow F_2$ также являются формулами.

Другими словами, любая формула может быть получена из высказывательных переменных с помощью операций за конечное число шагов.

§ 2. Специальные типы высказываний

2.1. Логические законы

Определение 2.7. ***Логическим законом*** *или* ***тавтологией*** *называется любая формула алгебры высказываний, значение истинности которой равно 1 при любых значениях истинности высказывательных переменных, входящих в нее.*

С одной стороны, тавтологии позволяют строить истинные высказывания, независимо от истинности образующих высказываний. С другой стороны, и это особенно важно, они могут давать правильные способы умозаключений. Приведем примеры простейших и, в то же время, важнейших тавтологий.

Упражнения 2.1. Доказать, что следующие высказывания являются логическими законами

1) $P \vee \overline{P}$ (закон исключенного третьего),

2) $\overline{P \wedge \overline{P}}$ (закон непротиворечивости),

3) $\overline{\overline{P}} \Longleftrightarrow P$ (правило двойного отрицания),

4) $P \vee Q \Longleftrightarrow Q \vee P$ (коммутативность дизъюнкции),

5) $P \vee (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \vee R$ (ассоциативность дизъюнкции),

6) $P \wedge Q \Longleftrightarrow Q \wedge P$ (коммутативность конъюнкции),

7) $P \wedge (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$ (ассоциативность конъюнкции),

8) $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции),

9) $P \vee (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции),

10) $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$ (правило Де Моргана),

11) $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ (правило Де Моргана),

12) $((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ (транзитивность импликации),

13) $(P \wedge (P \Longrightarrow Q)) \Longrightarrow Q$

14) $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow \left(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}\right)$ (закон контрапозиции).

Упражнения 2.2.

1) Пусть $A \Longrightarrow B$ — истинное высказывание. Какие значения истинности имеют следующие высказывания $\overline{A} \Longrightarrow B$, $A \Longrightarrow \overline{B}$, $\overline{A} \Longrightarrow \overline{B}$, $B \Longrightarrow A$, $\overline{B} \Longrightarrow A$, $B \Longrightarrow \overline{A}$, $\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$

2) Доказать свойства операций над множествами из пункта 2.3 предыдущей главы.

2.2. Теоремы и типы теорем

Математические теоремы имеют форму импликации

$$P \Longrightarrow Q. \tag{2.1}$$

При P этом называется **условием** теоремы, а Q — ее **утверждением** (или заключением).

Если теорема (2.1) истинна, то говорят, что Q является **необходимым** условием для P, а P является **достаточным** для Q.

С каждой теоремой (2.1) можно связать еще три высказывания

$Q \Longrightarrow P$ — **обратная** теорема,

$\overline{P} \Longrightarrow \overline{Q}$ — **противоположная** теорема,

$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ — теорема, **обратная к противоположной**.

Упражнения 2.3.

1) Расчленить на условие и заключение теорему Пифагора, признак делимости на 3, теорему о трех перпендикулярах, теорему Виета.

2) Сформулировать обратную, противоположную и обратную к противоположной теоремы к теоремам из предыдущего упражнения.

3) Является ли необходимым или достаточным условием

— отсутствие четных делителей у целого числа для простоты этого числа?

— четность одного из двух целых чисел и делимость на 3 другого для делимости их произведения на 6?

— равноудаленность точек множества на плоскости (в пространстве) от фиксированной точки для того, чтобы это множество было окружностью?

— положительность дискриминанта для существования корня у квадратного трехчлена?

— совпадение двух пар чисел для совпадения их среднего арифметического (среднего геометрического)?

Из тавтологии 14) следует, что теорема и обратная к противоположной равносильны.

Отметим также часто встречающуюся схему доказательства от противного теоремы $P \Longrightarrow Q$. Она начинается словами "предположим, что P истинно, а Q ложно". Далее в результате некоторых рассуждений, нам удается доказать, что при этом предположении верно $\overline{P}$. Таким образом, оказываются верными P и $\overline{P}$, что недопустимо в силу закона непротиворечивости. Мы вынуждены признать, что наше допущение о том, что P истинно, а Q ложно, является неверным. Следовательно, из P следует Q. Суть этого способа доказательства состоит в том, что импликация $P \Longrightarrow Q$ заменяется равносильной ей импликацией $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ (см. тавтологию 14)).

Ярким примером доказательства от противного может служить доказательство Евклида бесконечности множества простых чисел — если предположить, что $p_1, \ldots, p_n$ — все простые числа, то число $p = p_1 \cdot \ldots p_n + 1$ является составным. Тогда и $1 = p - p_1 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ — составное число.

Справедлив следующий логический закон

$$((P \Longrightarrow Q) \vee (Q \Longrightarrow P)) \Longleftrightarrow (P \Longleftrightarrow Q).$$

Поэтому в случае, когда верны обе теоремы $P \Longrightarrow Q$ и $Q \Longrightarrow P$, их утверждения объединяют в форме эквивалентности $P \Longleftrightarrow Q$, которая называется **критерием**. В таком случае говорят также, что

а) P равносильно Q,

б) Q есть необходимое и достаточное условие для P,

в) P верно тогда и только тогда, когда верно Q,

г) Q есть характеристическое свойство для P.

Упражнения 2.4.

1) Какие из следующих теорем допускают обращение — теорема Пифагора, признак делимости на 3, теорема о трех перпендикулярах, теорема Виета.

2) Сформулировать признаки параллелограмма и выяснить, какие из них являются характеристическими.

3) Какое свойство ромба является характеристическим?

Иногда критерий может иметь более сложную форму, например, "утверждения P_1, P_2, …, P_n равносильны". В таком случае удобно доказывать критерий по круговой схеме

$$P_1 \Longrightarrow P_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow P_n \Longrightarrow P_1.$$

2.3. Предикаты и кванторы

Предикатом (одноместным) называется высказывание $P(x)$, зависящее от некоторого параметра x, принадлежащего некоторому множеству X. Таких параметров может быть несколько, то предикат называется n-местным (n — число его параметров). Значение истинности предиката зависит от выбранного значения параметра и не обязано быть одинаковым для всех значений параметра. Множество значений $x \in X$, для которых истинно $P(x)$, называется **множеством истинности** предиката $P(x)$.

Пусть $P(x)$ — предикат, зависящий от $x \in X$. Тогда

1) **квантором общности** называется высказывание

$$\forall\, x \in X \ \ P(x),$$

(читается "для любого $x \in X$ истинно $P(x)$"), истинное в точности тогда, когда множество истинности предиката $P(x)$ совпадает с X.

2) **квантором существования** называется высказывание

$$\exists\, x \in X \;\; P(x),$$

(читается "существует $x \in X$, для которого истинно $P(x)$"), истинное в точности тогда, когда множество истинности предиката $P(x)$ не пусто.

Кванторы важны в математической логике. Но, кроме того, они дают возможность превращать обычные тексты в формальные, Это, с одной стороны, дает возможность использовать более удобные и компактные записи

Например, громоздкая запись

$$\exists\, x(P(x) \wedge (\forall\, y((P(y) \Rightarrow (y = x)))$$

означает, что найдется объект x, обладающий свойством P и такой, что если y - любой объект, обладающий свойством P, то $y = x$. Короче, существует и притом единственный объект x, обладающий свойством P. Обычно это высказывание обозначают в виде $\exists !\, x\; P(x)$, и мы будем использовать такое сокращение.

С другой стороны, применение кванторных записей позволяет проще исследовать смысл текста и избежать многих ошибок.

Упражнения 2.5. Сформулировать кванторные интерпретации следующих высказываний.

1) Для любого элемента a множества A справедливо высказывание $P(a)$.

2) Любая точка на серединном перпендикуляре к отрезку равноудалена от его концов.

3) Если A не является подмножеством множества B, то найдется элемент $a \in A$, не принадлежащий B.

Непосредственно из определений кванторов общности и существования вытекает следующие **правила отрицания кванторов**

$$\overline{\forall\, x \in X \;\; P(x)} \Longleftrightarrow \exists\, x \in X \;\; \overline{P(x)},$$

$$\overline{\exists\, x \in X \;\; P(x)} \Longleftrightarrow \forall\, x \in X \;\; \overline{P(x)}.$$

Важно также подчеркнуть, что в кванторной записи однотипные кванторы, идущие подряд можно записывать в любом порядке. Порядок следования различных кванторов важен — его нельзя менять, так как иначе изменится смысл высказывания. Поясним это на примере.

Рассмотрим высказывание "для любого натурального числа n существует натуральное число $m > n$" или

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, m \in \mathbb{N} \quad m > n.$$

Поменяем здесь порядок следования кванторов

$$\exists\, m \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad m > n.$$

Полученное высказывание, разумеется ложно, хотя предыдущее — истинно.

Упражнения 2.6.

1) Сформулировать отрицания кванторов из упражнения 2.5
2) Рассмотреть всевозможные варианты замены кванторов в определении точной верхней грани.
3) Рассмотреть всевозможные варианты замены кванторов в определении предела последовательности.

Глава 3
Отношения и функции

§ 1. Отношения

1.1. Декартово произведение и бинарные отношения

Пусть X и Y — произвольные множества и $x \in X$, $y \in Y$. Под упорядоченной парой этих элементов будем понимать множество $\{x, y\}$, состоящее из двух элементов, в котором указано, какой элемент является первым, а какой вторым. Обозначение для упорядоченной пары (x, y), то есть первым записывается первый элемент.

Определение 3.1. ***Декартовым (прямым) произведением*** *этих множеств называется множество*

$$X \times Y = \{(x,\, y) : x \in X,\; y \in Y\}$$

всех упорядоченных пар $(x,\, y)$, где $x \in X$ и $y \in Y$.

Определение 3.2. *Произвольное подмножество $R \subset X \times Y$ декартового произведения $X \times Y$ будем называть* ***отношением***[1] *между элементами множеств X и Y.*

Если $X = Y$, то R называется отношением на множестве X.

Если $(x,\, y) \in R$, то будем говорить, что x находится в отношении R к y и кратко записывать это так — xRy.

На языке отношений можно выразить многие конструкции, которые мы рассматривали выше. Рассмотрим несколько содержательных примеров отношений.

Упражнения 3.1.

1) *Отношение принадлежности.* Пусть X — множество и $\mathcal{B}(X)$ — множество всех его подмножеств[2]. Отношение

$$xRY \;\Leftrightarrow\; x \in Y$$

называется отношением принадлежности элементов $x \in X$ подмножествам из X.

[1] Чтобы подчеркнуть, что устанавливается отношение между элементами *двух* множеств, часто говорят о бинарном отношении.

[2] $\mathcal{B}(X)$ часто называют булеаном множества X

2) *Отношение неравенства* между действительными числами

$$xRy \;\Leftrightarrow\; x \le y.$$

3) *Отношение включения* в булеане любого множества X:

$$ARB \;\Leftrightarrow\; A \subset B$$

4) *Отношение равенства.* Пусть X и Y — два множества. Отношение

$$xRy \;\Leftrightarrow\; x = y$$

называется отношением равенства между элементами множеств X и Y. Его легко записать как подмножество в декартовом произведении $X \times Y$

$$\{(x, x) : x \in X \cap Y\}$$

5) *Отношение делимости* между натуральными числами

$$nRm \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{N} \quad n = km.$$

6) *Отношение неравенства* между действительными числами

$$xRy \;\Leftrightarrow\; x \le y.$$

Для многих часто встречающихся и важных отношений вводятся специальные обозначения, которые используются при записи того факта, что элементы находятся в данном отношении.

1.2. Отношения эквивалентности

Следующее отношение является одним из самых важных в математике. Оно (наряду с отношением функции) лежит в основе классической математики.

Определение 3.3. *Бинарное отношение R на множестве X называется **отношением эквивалентности**, если выполнены следующие условия*
1) $\forall\, x \in X \quad xRx$ (свойство рефлексивности),
2) $\forall\, x, y \in X \quad xRy \;\Rightarrow\; yRx$ (свойство симметричности),
3) $\forall\, x, y, z \in X \quad (xRy) \wedge (yRz) \;\Rightarrow\; xRz$ (свойство транзитивности).

Упражнения 3.2. Показать, что следующие отношения являются отношениями эквивалентности

1) отношение равенства из упражнения 3.1.3),

2) отношение R на множестве натуральных чисел:

$$nRm \;\Leftrightarrow\; n \text{ и } m \text{ имеют одинаковую четность.}$$

Обычно для обозначения отношения эквивалентности используется символ $\sim$ и вместо xRy пишут $x \sim y$, говоря при этом, что элементы x и y эквивалентны.

Определение 3.4. *Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве X и $x \in X$. Множество*

$$\widehat{x} = \{y \in X : y \sim x\}$$

называется ***классом эквивалентности***[3] *элемента x. Любой элемент из $\widehat{x}$ называется тогда представителем класса эквивалентности $\widehat{x}$.*

Упражнения 3.3. Доказать, что

1) для любого $x \in X$ класс эквивалентности $\widehat{x}$ не пуст,

2) любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают,

3) объединение всех классов эквивалентности совпадает со множеством X

Огромна роль отношений эквивалентности в математике, науке и даже в практической деятельности. Часто мы имеем дело с огромными совокупностями объектов, каждый из которых имеет свои индивидуальные черты, особенности и признаки. Но учесть все их одновременно невозможно и мы, в зависимости от ситуации, интересуемся теми или иными признаками, игнорируя все остальные. Если эти выделенные признаки совпадают у двух объектов, то мы считаем их эквивалентными (условно равными) — принадлежащими одному классу. Далее вся исследуемая совокупность разбивается на непересекающиеся классы, причем в один класс объединяются те объекты, которые считаются равными и которые можно отождествить. Таким образом происходит построение любой классификации.

§ 2. Общее определение функции

2.1. Функция (отображение)

Другим важнейшим типом отношений является понятие функции, без которого невозможно представить себе какой-либо из разделов математики.

Становление современного понятия функции начинается с работ Лобачевского и Дирихле, которые впервые дали определение функции как соответствия — говорят, что на множестве X задана функция F со значениями в Y, если любому $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y = F(x) \in Y$, называемый образом элемента.

С одной стороны, это определение правильно выражает суть понятия функции. Но, с другой стороны, по существу оно заменяет термин "функция" термином "соответствие", который не расшифрован.

[3] Иногда используется термин **класс смежности**.

Сейчас общепринятым является следующее определение, принадлежащее Дедекинду. В нем отчетливо разъясняется понятие соответствия.

Определение 3.5. *Отношение F между X и Y называется* ***отображением*** *или* ***функцией****, заданной на X со значениями в Y, если выполнены следующие два условия*
1) $\forall\, x \in X \ \ \exists\, y \ \ xFy$,
2) $\forall\, x \in X \ \ \forall\, y_1,\, y_2 \in Y \ \ (xFy_1) \wedge (xFy_2) \implies y_1 = y_2$.

Первое из условий в этом определении говорит нам, что "функция" каждому элементу $x \in X$ "ставит в соответствие" элемент $y \in Y$, а второе означает, что этот элемент $y \in Y$ "является единственным".

Факт задания функции будем записывать так $F : X \to Y$, а вместо xFy для функций будем писать $y = F(x)$. В таком случае y называется **образом** элемента x, а x — **прообразом** элемента y. Часто функцию задают с помощью "поточечного" правила $x \mapsto F(x)$.

Введем еще ряд терминов, связанных с понятием функции. Множество X называется **областью определения** функции. Часто, область определения мы будем обозначать D_f или просто D, когда ясно, о какой функции идет речь.

Часто термин "функция" интерпретируется "геометрически" и множество

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\} \tag{3.1}$$

называется **графиком** функции.

Пусть задана функция $F : X \to Y$ и $A \subset X$. Тогда функция $g : A \to Y$, действующая по правилу

$$g : x \mapsto f(x), \ \ x \in A,$$

называется **сужением** функции F на множество A и обозначается $g = f|_A$.

Упражнения 3.4.

1) Пусть числа $a, b \in \mathbb{R}$ фиксированы. Функция $x \mapsto ax + b$, $x \in \mathbb{R}$ называется **линейной**.

2) Пусть числа $a, b, c \in \mathbb{R}$ фиксированы. Функция $x \mapsto ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$ называется **квадратичной**.

3) Пусть $n \in \mathbb{N}$ и заданы числа $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, \ldots, n)$. Функция $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $x \in \mathbb{R}$, называется полиномиальной (или полиномом) степени n.

4) Функция

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

называется **функцией Дирихле**.

5) Пусть $y_0 \in Y$ — фиксированный элемент. Функция $x \mapsto y_0$, $x \in X$, называется **постоянной** функцией на X.

6) Пусть $A \subset X$ — непустое подмножество в X. Функция $\mathrm{Id}_A : A \to X$, действующая по правилу $\mathrm{Id}_A(x) = x$, называется **каноническим вложением** A в X[4]. Если $A = X$, то Id_X называется **тождественным отображением** множества X

7) Если Y — произвольное множество, то любая функция $F : \mathbb{N} \to Y$ называется **последовательностью** со значениями в Y. Этот же термин сохраняют, если $\mathbb{N}$ заменить на любое бесконечное подмножество множества целых чисел $\mathbb{Z}$. В таком случае для образа числа $n \in \mathbb{N}$ обычно пишут не $F(n)$, а F_n.

8) Если X — произвольное множество и $A \subset X$ — подмножество в X, то функция
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ \\ 0, & x \in A^c, \end{cases}$$
называется **характеристической функцией** множества или ее **индикатором**.

2.2. Образы и прообразы

Напомним, что, если задана функция $F : X \to Y$ и $y = F(x)$, то y называется **образом** элемента x, а x — **прообразом** элемента y.

Если $A \subset X$, то множество
$$F(A) = \{y \in Y : \exists x \in X \ \ y = F(x)\}$$
называется **образом** множества A, а $F(X)$ — **область значений** функции.

Если $B \subset Y$, то множество
$$F^{-1}(B) = \{x \in X : F(x) \in B\}$$
называется (полным) **прообразом** множества B.

Упражнения 3.5. Доказать следующие свойства образов и прообразов множеств

1) $A \subset B \Rightarrow \ f(A) \subset f(B)$,

2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

3) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ и не обязательно здесь имеет место равенство,

[4]Иногда вместо Id_A пишут i_A.

4) $A \neq \varnothing \ \Rightarrow \ f(A) \neq \varnothing$,

5) $A \subset B \Rightarrow \ f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$,

6) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,

7) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

8) $A \subset f^{-1}(f(A))$ и не обязательно здесь имеет место равенство,

9) $f(f^{-1}(A)) \subset A$ и не обязательно здесь имеет место равенство,

2.3. Композиция отображений

Пусть заданы две функции $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Обратим внимание, что область значений первой из них $f(X)$ содержится в области определения второй Y.

Определение 3.6. *Отображение $g \circ f : X \to Z$, действующее по правилу*

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x)), \quad x \in X,$$

называется ***композицией*** *отображений f и g.*

При этом в композиции $g \circ f$ функция f называется ***внешней****, а g —* ***внутренней****.*

Часто вместо термина композиция употребляют термин **суперпозиция** или **сложная функция**.

Отметим, что в композиции $g \circ f$ важен порядок, в котором записываются функции f и g. Композиция $f \circ g$ может даже не существовать.

Упражнения 3.6. При условии, что композиция $g \circ f$ определена, доказать равенства

1) $(g \circ f)(A) = g(f(A))$,

2) $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

2.4. Элементарные функции

К элементарным функциям относят прежде всего следующие функции.

Степенная функция с показателем α

$$x \mapsto x^{\alpha}.$$

В зависимости от показателя α ее область определения может быть различной. Именно,

— если $\alpha = \frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$ — положительное рациональное число (дробь несократима) и q нечетное, то область определения $\mathbb{R}$,

— если $\alpha = 0$ или $\alpha = -\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$ — отрицательное рациональное число (дробь несократима) и q нечетное, то область определения $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

— для всех остальных $\alpha \in \mathbb{R}$ область определения — $[0, \infty)$.

Тригонометрические функции

1) **синус** $\sin : x \mapsto \sin x$, $x \in \mathbb{R}$,

2) **косинус** $\cos : x \mapsto \cos x$, $x \in \mathbb{R}$,

3) **тангенс** $\mathrm{tg} : x \mapsto \mathrm{tg}\, x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$,

4) **котангенс** $\mathrm{ctg} : x \mapsto \mathrm{ctg}\, x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Обратные тригонометрические функции

1) **арксинус** $\arcsin : x \mapsto \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$,

2) **арккосинус** $\arccos : x \mapsto \arccos x$, $x \in [-1, 1]$,

3) **арктангенс** $\mathrm{arctg} : x \mapsto \mathrm{arctg}\, x$, $x \in \mathbb{R}$,

4) **арккотангенс** $\mathrm{arcctg} : x \mapsto \mathrm{arcctg}\, x$, $x \in \mathbb{R}$.

Показательная функция $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, с основанием $a > 0$, $a \neq 1$. Для нее часто используется обозначение $\exp_a$.

Логарифмическая функция $x \mapsto \log_a x$, $x \in (0, \infty)$, с основанием $a > 0$, $a \neq 1$.

Для функций, определенных на подмножествах множества действительных чисел можно ввести обычные арифметические операции

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D_f \cap D_g.$$

К элементарным функциям относят также все функции, полученные из перечисленных выше с помощью конечного числа арифметических операций, а также операции композиции.

2.5. Сюръекция, инъекция, биекция

Определение 3.7. *Функция $F : X \to Y$ называется **сюръективной**, если*

$$\forall\, y \in Y \ \ \exists x \in X \ \ F(x) = y.$$

Другими словами, сюръективность означает, что $F(X) = Y$. Часто вместо термина "сюръективное" используется более выразительный — "**отображение на** Y".

Определение 3.8. *Функция $F : X \to Y$ называется **инъективной**, если*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in X \ \ F(x_1) = F(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Другими словами, инъективность означает, что

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \ \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2),$$

то есть различные элементы из X имеют различные образы.

Определение 3.9. *Функция называется* ***биективной (биекцией, взаимно однозначной)****, если она одновременно сюръективна и инъективна.*

Упражнения 3.7.

1) Для каких α степенная функция $x \mapsto x^\alpha$ является сюръективной, инъективной, биективной?

2) Какие из тригонометрических функций являются сюръективными, инъективными, биективными?

3) Является ли показательная функция сюръективной, инъективной, биективной?

4) Доказать, что композиция сюръективных (инъективных, биективных) отображений наследует это свойство.

5) Доказать, что любое отображение является композицией сюръективного и инъективного отображений.

2.6. Обратная функция

Непосредственно из определения биекции следует, что если $F : X \to Y$ — биекция, то отношение

$$F^{-1} = \{(y, x) : F(x) = y\}$$

также является функцией. Эта функция называется **обратной** для функции $F : X \to Y$.

Обращаем внимание читателя на то, что одно обозначение F^{-1} используется для двух объектов — для полного прообраза $F^{-1}(A)$ множества A при отображении F и для обратного отображения. При этом оба являются общепринятыми среди математиков мира и надо быть внимательным при использовании этого обозначения.

Упражнения 3.8.

1) Найти обратные функции к степенным.

2) Являются ли показательная и логарифмическая функции с одним основанием взаимно обратными?

3) Обратными к каким функциям являются обратные тригонометрические функции?

4) Доказать равенства $(f^{-1})^{-1} = f$ и $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ при условии, что f и g — биекции.

Иногда понятие обратной функции полезно расщепить на две составляющие. Пусть $F : X \to Y$ — некоторая функция.

Определение 3.10. *Отображение* $F_l^{-1} : Y \to X$ *называется* ***левым обратным*** *для* F*, если*

$$F_l^{-1} \circ F = \mathrm{Id}_X \,.$$

Существование левого обратного отображения F_l^{-1} означает, что если для заданного $y \in Y$ существует решение уравнения

$$F(x) = y, \tag{3.2}$$

то оно единственно. В самом деле, пусть x — какое нибудь решение (3.2). Тогда, действуя на него отображением F_l^{-1}, получим $x = F_l^{-1}(y)$ — решение обязано быть таким.

Определение 3.11. *Отображение* $F_r^{-1} : Y \to X$ *называется* ***правым обратным*** *для* F*, если*

$$F \circ F_r^{-1} = \mathrm{Id}_Y \,.$$

Существование правого обратного отображения F_l^{-1} означает, что решение уравнения (3.2) существует для любого $y \in Y$. Действительно, для любого $y \in Y$ положим $x = F_r^{-1}(y)$, тогда $F(F_r^{-1}(y)) = y$ и $x = F_r^{-1}(y)$ является решением уравнения (3.2).

Упражнения 3.9.

1) Показать, что отображение $z \mapsto z^2$, $z \in \mathbb{Z}$, не имеет ни левого, ни правого обратного отображения.

2) Привести пример функции, у которой нет левой обратной, но есть правая обратная.

3) Привести пример функции, у которой нет правой обратной, но есть левая обратная.

4) Привести пример функции, у которой есть более одной правой (левой) обратной.

5) Доказать, что если для функции существуют и левая и правая обратные функции, то они совпадают. В этом случае функция является биекцией и $F^{-1} = F_r^{-1} = F_l^{-1}$.

§ 3. Понятие о мощности множества

3.1. Равномощные множества

Следующее важное понятие лежит в основе обобщения наших представлений о количестве элементов множества.

Определение 3.12. *Два непустых множества X и Y называются* ***равномощными****, если существует биекция X на Y.*

Пустое множество равномощно самому себе и не равномощно никакому другому множеству.

Другими словами, равномощность множеств можно трактовать как тот факт, что и имеют одинаковое число элементов.

Будем говорить, что множество X имеет $n \in \mathbb{N}$ элементов, если оно равномощно множеству $\{1, 2 \ldots, n\}$. Кроме того, говорят, что множество **конечно**, если при некотором $n \in \mathbb{N}$ оно равномощно множеству $\{1, 2 \ldots, n\}$.

Нетрудно убедиться в том, что отношение равномощности является отношением эквивалентности на множестве всех подмножеств данного множества. следовательно, отношение равномощности разбивает все множества на классы смежности — два множества попадают в один класс, если они равномощны.

Мощностью множества или его **кардинальным числом** называется класс множеств, равномощных этому множеству. Для мощности множества будем использовать обозначение $\operatorname{card} X$.

Запись $\operatorname{card} X \le \operatorname{card} Y$ будет означать, что X равномощно некоторому подмножеству множества Y. Если при этом еще X и Y не являются равномощными, то будем писать, что $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$.

Смысл этой конструкции состоит в том, что она позволяет сравнивать "количества" элементов во множествах, не прибегая к "пересчету" их элементов. Кроме того, понятие мощности обобщает понятие количества элементов в конечном множестве.

3.2. Важнейшие подмножества в $\mathbb{R}$ и их мощности

Для мощностей некоторых часто встречающихся множеств имеются специальные названия:

— класс, содержащий пустое множество $\varnothing$, не содержит других множеств; эта мощность называется нулевой или нулем,

— пусть $n \in \mathbb{N}$, все множества, состоящие ровно из n элементов, попадают в одну мощность — она так и называется n и совпадает с привычным понятием числа элементов в конечном множестве,

— класс, содержащий $\mathbb{N}$, называется счетностью; другими словами, множество называется **счетным**, если оно равномощно $\mathbb{N}$,

— класс, содержащий $\mathbb{R}$, называется **мощностью континуума**.

Упражнения 3.10.

1) Доказать, что следующие множества равномощны 1) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, 2) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$, 3) $[0, 1]$ и $[a, b]$ (для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), 4) $(0, 1)$ и $[0, 1]$, 5) $(0, 1)$ и $\mathbb{R}$.

2) Доказать, что множества $[0, 1]$ и $\mathbb{N}$ не являются равномощными.

3.3. Принцип математической индукции

Подмножество $X \subset \mathbb{R}$ назовем **индуктивным**, если

$$\forall x \in X \;\; x + 1 \in X.$$

Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ является наименьшим индуктивным множеством, содержащим 1. Здесь "наименьшее" понимается по включению множеств. Другими словами, если множество индуктивно и содержит единицу, то оно содержит $\mathbb{N}$. Или еще иначе, $\mathbb{N}$ — пересечение всех индуктивных подмножеств в $\mathbb{R}$, содержащих единицу.

Прямым следствием этого является принцип математической индукции: *если подмножество $X \subset \mathbb{N}$ таково, что $1 \in X$ и вместе с любым числом $x \in X$ множеству X принадлежит также $x + 1$, то $X = \mathbb{N}$.*

Глава 4

Элементы комбинаторики

Имеется большое число практических задач следующего содержания. Пусть имеется одно или несколько множеств. Требуется составить из элементов этих множеств комбинации, которые удовлетворяли бы определенным условиям. При этом часто важно не умение составлять эти комбинации, а подсчет количества различных таких комбинаций (конечно, понятие равенства комбинаций определено). Такие задачи называются комбинаторными, а раздел математики, изучающий их — комбинаторикой.

§ 1. Размещения, перестановки,сочетания

1.1. Правила суммы и произведения

Прямые вычисления количества комбинаций могут оказаться очень громоздкими. В комбинаторике имеется ряд общих правил, упрощающих эти подсчеты. Следующие правила являются основными.

Правило суммы. *Если элемент a может быть выбран n способами, а элемент b — m способами, то один из этих элементов (или a, или b) можно выбрать $n + m$ способами.*

Правило произведения. *Если элемент a может быть выбран n способами, а элемент b — m способами, то пару (a, b) можно выбрать nm способами.*

Напомним еще определение факториала

$$0! = 1, \;\; n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k \text{ при } n \geq 1.$$

1.2. Размещения

Определение 4.1. *Упорядоченные наборы, состоящие из k различных элементов, выбранных из n данных элементов, называются* ***размещениями*** *из n элементов по k.*

Размещения могут отличаться как элементами, так и порядком.

Теорема 4.1. *Число всех размещений из n элементов по k вычисляется по формуле*

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Доказательство. Первый элемент размещения может быть выбран n способами. Для каждого из этих вариантов есть $n-1$ способов расположения одного из оставшихся элементов на втором месте. Следовательно, по правилу произведения имеется $n(n-1)$ различных способов выбора элементов на первых двух местах. Продолжая это рассуждение по индукции, получим требуемое.

Упражнения 4.1.

1) Различными размещениями множества из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ по два будут наборы $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$.

2) Студентам надо сдать 3 экзамена за 8 дней. Найти количество различных расписаний сдачи экзаменов. Ответ: $A_8^3 = 336$.

1.3. Перестановки

В частном случае $k = n$ размещения имеют специальное название.

Определение 4.2. *Отличающиеся друг от друга порядком наборы, составленные из элементов заданного конечного множества, называются* ***перестановками*** *этого множества.*

Другими словами, перестановки из n элементов — это размещения из n по n элементов.

Теорема 4.2. *Число перестановок множества, состоящего из n элементов, вычисляется по формуле*

$$P_n = n!.$$

Доказательство. Конечно, эта теорема является частным случаем предыдущей при $k = n$.

Упражнения 4.2.

1) Найти все перестановки множества из трех элементов $\{1, 2, 3\}$.

2) Числа 0, 1, 2, 3 написаны на четырех карточках. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из этих карточек? Ответ: $4! - 3! = 18$.

1.4. Сочетания

Определение 4.3. *Неупорядоченные наборы из k элементов, взятых из данных n элементов, называются* ***сочетаниями*** *из n элементов по k.*

Сочетания отличаются друг от друга только элементами.

Теорема 4.3. *Число сочетаний из n элементов по k вычисляется по формуле*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказательство. Все размещения из n элементов по k можно получить следующим способом: составить различные сочетания, а потом в каждом из C_n^k сочетаний осуществить $k!$ перестановок. По правилу произведения $A_n^k = C_n^k \cdot k!$ и надо применить теорему о числе размещений.

Упражнения 4.3.

1) Для множества из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ сочетаниями по два элемента будут $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$.

2) В шахматном турнире участвуют шесть шахматистов. Сколько партий сыграно в турнире? Ответ: $C_6^2 = 15$.

§ 2. Биномиальные коэффициенты

2.1. Формула бинома Ньютона

Коэффициенты C_n^k называются еще **биномиальными коэффициентами**, так как они участвуют в формуле бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Коэффициенты C_n^k обладают следующими свойствами:
1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;
2) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
3) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Для доказательства первого надо в формуле бинома Ньютона взять $a = b = 1$. Второе и третье следуют непосредственно из теоремы 4.3.

2.2. Треугольник Паскаля

Третье свойство позволяет вычислять биномиальные коэффициенты с помощью так называемого **треугольника Паскаля**:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^1 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}
$$

в котором каждое число (кроме крайних единиц) равно сумме двух, расположенных над ним. В треугольнике Паскаля k-е число в n-й строке (нумерация элементов начинается с нуля) — это биномиальный коэффициент C_n^k.

Связь между числами перестановок, размещений и сочетаний выражается равенством

$$A_n^k = P_k \cdot C_n^k.$$

Упражнения 4.4.

1) Сколько словарей надо издать, чтобы переводить с любого из пяти языков на любой другой из этих языков? ($A_5^2 = 20$).

2) Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, из которых ровно 3 лежат на одной прямой? Ответ: $C_8^2 - 2$.

3) Сколькими способами можно упорядочить множество

$$\{1, 2, \dots, 2n\},$$

чтобы четные числа стояли на четных местах? Ответ: $n!^2$.

4) Автомобильные номера состоят из трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если в алфавите 33 буквы. Ответ: $33^3 \cdot 10^4$.

5) Сколько различных слов можно составить из букв слова *КОЛОКОЛ*? Ответ: $C_7^3 \cdot C_4^2$.

6) Сколькими способами можно посадить за один стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом? Ответ:$2 \cdot 7!^2$.

Предметный указатель

Именной указатель

Указатель обозначений