БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра нелинейного анализа и аналитической экономики

В. И. БАХТИН, И. А. ИВАНИШКО,
А. В. ЛЕБЕДЕВ, О. И. ПИНДРИК

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методическое пособие
для студентов специальности 1-31 03 01-03
«Математика (экономическая деятельность)»

МИНСК
2012

УДК 519.852(075.8)
ББК 22.18я73-1
Б30

Рекомендовано Советом
механико-математического факультета БГУ
28 февраля 2012 г., протокол № 5

Р е ц е н з е н т ы:
член-корреспондент НАН Беларуси,
доктор физико-математических наук,
профессор *В. В. Гороховик*;
доктор физико-математических наук,
профессор *В. Г. Кротов*

Бахтин, В. И.
Б30 Линейное программирование : метод. пособие для студентов спец. 1-31 03 01-03 «Математика (экономическая деятельность)» / В. И. Бахтин, И. А. Иванишко, А. В. Лебедев, О. И. Пиндрик. — Минск : БГУ, 2012. – 39 с.

В методическом пособии изложены теоретические основы решения задач линейного программирования при помощи симплекс-метода. С целью лучшего усвоения представленного теоретического материала подробно разобрано достаточное количество примеров применения этого метода для решения конкретных задач.

Предназначено для студентов математических и технических специальностей. Может представлять интерес для студентов и преподавателей высших учебных заведений, изучающих и преподающих теорию экстремальных задач.

УДК 519.852(075.8)
ББК 22.18я73-1

Предисловие

Одним из важнейших курсов для студентов математических и прикладных специальностей является курс «Методы оптимизации». В разных вузах в программу данного курса включают различные разделы анализа, такие как вариационное исчисление, теория управления, приближенные методы решения экстремальных задач. В настоящее время на механико-математическом факультете Белорусского государственного университета изучение методов оптимизации разделено на три части: на третьем курсе студенты проходят раздел, который носит общее название «Методы оптимизации» и включает в себя только конечномерные задачи, на четвертом — элементы дискретной оптимизации в курсе «Исследование операций», и, наконец, на пятом курсе студенты знакомятся с классическим вариационным исчислением и с некоторыми вопросами оптимизации в бесконечномерных пространствах в целом. Данное методическое пособие освещает только один раздел оптимизации в конечномерных пространствах, а именно алгоритм симплекс-метода для линейных задач.

§ 1. Задачи оптимизации

Пусть Ω — некоторое множество и $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция. Точка $a \in \Omega$ называется точкой *максимума* (*минимума*) функции f, если для любой точки $x \in \Omega$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(a) \qquad (f(x) \geqslant f(a)).$$

Если при этом для любого $x \neq a$ выполнено

$$f(x) < f(a) \qquad (f(x) > f(a)),$$

то a называется точкой *строгого максимума* (*строгого минимума*).

Значение функции f в точке максимума (минимума) называется *максимумом* (*минимумом*). *Экстремумом* функции называется ее максимум или минимум. Точка, в которой экстремум достигается, называется *точкой экстремума.*

Задача оптимизации — это задача о поиске экстремумов и точек, в которых они достигаются. Обычно такая задача записывается в виде

$$\begin{cases} f(x) \to \mathrm{extr}, \\ x \in \Omega. \end{cases}$$

При этом f называется *целевой* функцией, а множество Ω — *областью определения* или *допустимым множеством* задачи.

Очевидно, что задача максимизации

$$\begin{cases} f(x) \to \max, \\ x \in \Omega, \end{cases}$$

эквивалентна следующей задаче минимизации:

$$\begin{cases} -f(x) \to \min, \\ x \in \Omega; \end{cases}$$

при этом эквивалентность понимается в том смысле, что множества решений этих задач совпадают и, кроме того,

$$\max_{x\in\Omega} f(x) = -\min_{x\in\Omega}\{-f(x)\}.$$

Поэтому с теоретической точки зрения достаточно рассмотреть только одну из этих задач.

В предлагаемом пособии рассматриваются только конечномерные задачи, то есть задачи вида

$$\begin{cases} f(x) \to \text{extr}, \\ x \in \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Поэтому далее соответствующие объекты и результаты будем определять и описывать лишь для этой ситуации.

Важным частным случаем таких задач является *задача линейного программирования.* Это задача, в которой целевая функция линейна, а допустимое множество есть конечное пересечение замкнутых полупространств. В данном пособии описываются методы решения этой задачи.

§ 2. Формализация линейной задачи

Общая задача линейного программирования выглядит так:

$$\begin{cases} c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \text{extr}, \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots m, \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = m+1, \ldots k. \end{cases}$$

Очень часто различные производственные задачи удается свести к задаче линейного программирования. В качестве иллюстрации приведем несколько примеров.

Пример 2.1. Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной линии. Суточный объем производства первой линии составляет не более 60 изделий, второй — 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электрических схем, на радиоприемник второй модели — 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас элементов — 800 единиц. Прибыль от реализации радиоприемника первой модели равна 30 рублей, второй модели — 20 рублей. Построить математическую модель для определения оптимальных (приносящих максимальную прибыль) суточных объемов производства радиоприемников первой и второй моделей.

Решение. Обозначим через x суточный объем производства приемников первого вида, а через y — суточный объем производства приемников второго вида. Тогда математическую модель можно записать в следующей форме

$$\begin{cases} 30x + 20y \to \max, \\ x \leqslant 60, \quad y \leqslant 75, \\ 10x + 8y \leqslant 800, \\ x, y \geqslant 0, \quad x, y \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Решение такой задачи будет действительно определять оптимальный объем производства, так как получаемая прибыль будет максимальной, а все ограничения выполнены.

Пример 2.2. Некоторая фирма производит два вида продукции: a и b. При этом объем производства продукции a должен составлять не менее 60% от общего объема производства. Сырье для производства продукции a и b используется одно и то же; его суточный запас составляет 100 тонн. На единицу продукции a расходуется 2 тонны сырья, на единицу продукции b расходуется 4 тонны. Цена единицы продукции a равна 2000 у. е., а единицы продукции b — 4000 у. е. Составить математическую модель для определения оптимального (приносящего максимальную прибыль) распределения сырья для производства продукции a и b.

Решение. Обозначим через x количество продукции a, а через y количество продукции b. Тогда задачу можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} 2000x + 4000y \to \max, \\ 2x + 4y \leqslant 100, \\ x \geqslant 0{,}6(x + y), \\ x \geqslant 0, \quad y, \geqslant 0. \end{cases}$$

Решив эту задачу линейного программирования, мы найдем объемы производства продукции, которые обеспечивают максимальную прибыль и удовлетворяют всем сформулированным требованиям.

Пример 2.3. Имеется n маршрутов, по каждому из которых необходимо совершить b_k рейсов ($k = 1, \ldots, n$), и m различных автомашин, каждая из которых может быть использована в течение a_i часов

($i = 1, \ldots, m$). На выполнение i-ой машиной рейса по k-му маршруту требуется t_{ik} часов при затратах c_{ik} рублей. Составить оптимальное расписание движения автомашин по маршрутам.

Решение. Оптимальным расписанием будет такое расписание, при котором затраты минимальны. Обозначим через x_{ik} количество поездок i-ой машины по k-му маршруту. Тогда общее время нахождения i-ой машины на всех маршрутах равно $\sum_{k=1}^{n} t_{ik}x_{ik}$, а количество поездок всех машин по k-му маршруту будет равно $\sum_{i=1}^{m} x_{ik}$. Поэтому математическую модель можно записать так:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik}x_{ik} \to \min, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} t_{ik}x_{ik} \leqslant a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ik} = b_k, \qquad k = 1, \ldots, n, \\ x_{ik} \geqslant 0, \qquad\quad x_{ik} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

§ 3. Графическое решение двумерных линейных задач

Любые задачи линейного программирования решаются симплекс-методом, который будет подробно изложен в § 6. Однако иногда их удается решить графически или с помощью исключения переменных.

Рассмотрим двумерную задачу линейного программирования

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 \to \text{extr}, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i, \quad i = m+1, \ldots, k. \end{cases}$$

Ее можно решать графическим методом. Он базируется на том, что целевая функция $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2$ принимает постоянное значение на всякой прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = \gamma$ (иначе говоря, каждая такая прямая является линией уровня функции f). При этом градиент целевой функции $\operatorname{grad} f(x) = (c_1, c_2)$ ортогонален линии уровня и указывает направление максимального роста функции, в то время как вектор $-\operatorname{grad} f(x) = -(c_1, c_2)$ указывает направление ее максимального убывания.

Приведем алгоритм графического метода.

Алгоритм графического решения линейной задачи

1) Начертить область определения задачи (допустимое множество). В общем случае оно представляет собой выпуклый (возможно, неограниченный) многоугольник. Если ограничения в задаче несовместны, допустимое множество будет пустым, а задача поиска экстремума не имеет смысла.

2) Найти градиент целевой функции. В силу ее линейности градиент постоянен (равен (c_1, c_2)) и может быть построен в любой точке координатной плоскости. Обычно его строят в начале координат.

3) Провести линию уровня целевой функции (то есть множество всех точек на плоскости, в которых функция принимает одно и то же значение). Для линейной функции любая линия уровня — это прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = \gamma$, перпендикулярная градиенту.

4) Передвигать линию уровня параллельно самой себе до касания с допустимым множеством. Передвигая линию уровня в направлении градиента, мы увеличиваем значение целевой функции (равное параметру γ), а передвигая ее в противоположном направлении, мы уменьшаем значение целевой функции. Точки касания линии уровня с допустимым множеством являются точками экстремума.

5) Определить тип экстремума в точке касания с использованием свойств градиента. Для непустого допустимого множества есть три возможности:

а) задача имеет *единственное решение* (когда линия уровня касается допустимого множества в одной точке);

б) задача имеет *бесконечное множество решений* (когда линия уровня касается допустимого множества вдоль стороны многоугольника);

в) задача на максимум (минимум) *не имеет решения* (когда множество параметров γ, для которых линии уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = \gamma$ пересекаются с допустимым множеством, неограниченно сверху (снизу)).

Проиллюстрируем работу данного алгоритма на примерах.

Пример 3.1. Решить графически линейную задачу

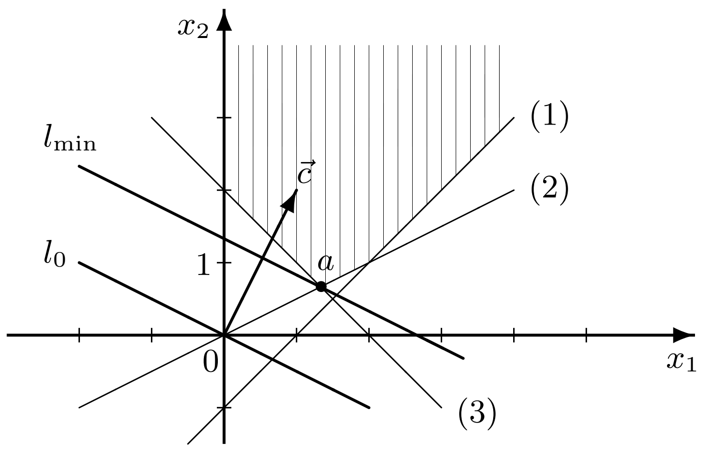
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \to \mathrm{extr}, \\ x_1 - x_2 \leqslant 1, \quad x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ x_1 + x_2 \geqslant 2, \quad x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. 1) Строим допустимое множество, которое ограничено прямыми

$$x_1 - x_2 = 1, \quad x_1 - 2x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 = 2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

2) Отмечаем градиент целевой функции $c = (1; 2)$ и линию уровня функции $x_1 + 2x_2 = 0$, соответствующую значению 0.

3) Перемещая линию уровня параллельно самой себе до касания с множеством допустимых решений, получаем точку a, которая будет точкой минимума. Передвигая линию уровня $x_1 + 2x_2 = \gamma$ дальше в направлении градиента, мы видим, что она пересекается с допустимым множеством при сколь угодно больших значениях γ. Поэтому целевая функция не ограничена сверху на допустимом множестве, и у нее нет максимума.



4) Для подсчета точных координат точки минимума a достаточно решить следующую систему, которая состоит из уравнений, опеределяющих прямые (2) и (3):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

У нее есть единственное решение $(x_1, x_2) = (4/3; 2/3)$. Подставляя его в целевую функцию, получаем значение $8/3$.

Ответ: в задаче имеется единственная точка минимума с координатами $(4/3; 2/3)$, а сам минимум равен $8/3$. Максимума целевая функция не достигает.

Рассмотрим теперь двумерную линейную задачу, в которой целевая функция зависит от параметра, и найдем ее максимальное и минимальное значение в зависимости от значения этого параметра.

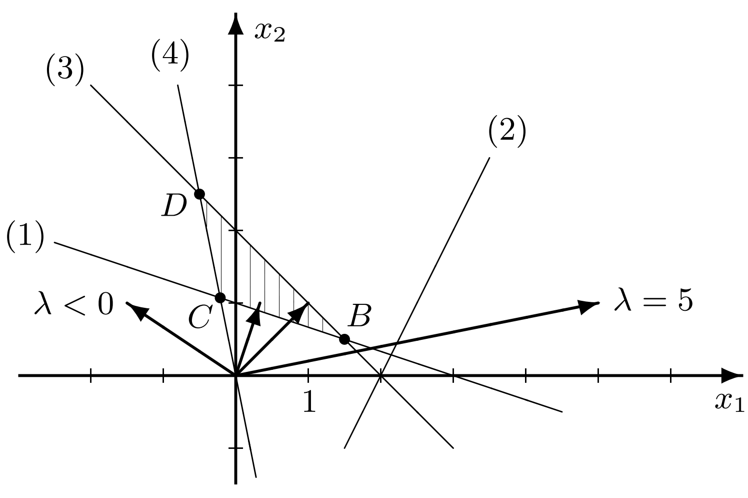
Пример 3.2. Для всех значений параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ решить задачу

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 \to \text{extr}, \\ x_1 + 3x_2 \geqslant 3, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 4, \\ x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ 5x_1 + x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Строим допустимое множество, ограниченное прямыми

$$x_1 + 3x_2 = 3, \quad 2x_1 - x_2 = 4, \quad x_1 + x_2 = 2, \quad 5x_1 + x_2 = 0.$$

Оно изображено на следующем рисунке (треугольник BCD):



В этой задаче допустимое множество компактно. Поэтому целевая функция достигает на нем своих максимального и минимального значений. Однако при разных λ точки экстремума будут различными.

Они зависят от расположения вектора градиента $c = (\lambda, 1)$ относительно границ множества. Прежде всего необходимо рассмотреть те значения λ, при которых линия уровня целевой функции оказывается параллельной граничным отрезкам допустимого множества.

Линия уровня будет параллельна некоторому граничному отрезку тогда и только тогда, когда нормальный вектор к прямой, содержащей отрезок, будет коллинеарен с градиентом целевой функции. Следовательно, линия уровня параллельна прямой (1) при $\lambda = 1/3$, прямой (3) при $\lambda = 1$ и прямой (4) при $\lambda = 5$ (прямую (2) мы не рассматриваем, потому что она не определяет границу допустимого множества).

Таким образом, нам надо найти точки экстремума и экстремальные значения целевой функции для следующих значений параметра λ:

$$\lambda < \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} < \lambda < 1, \quad \lambda = 1, \quad 1 < \lambda < 5, \quad \lambda = 5, \quad \lambda > 5.$$

В зависимости от λ, точками экстремума могут быть либо точки B, C или D, либо все точки какого-то из граничных отрезков.

Координаты точек B, C и D найдем соответственно из систем

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 3, \\ 5x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 5x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Решив их, получаем

$$B = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right), \qquad C = \left(-\frac{3}{14}; \frac{15}{14}\right), \qquad D = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Обозначим целевую функцию через z. Теперь мы можем найти ее экстремумы в зависимости от значения параметра λ. Рассмотрим все возможные случаи.

Если $\lambda < 1/3$, то минимум достигается в точке B, а максимум в точке D; при этом

$$z_{\min} = \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}, \qquad z_{\max} = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{5}{2}.$$

В случае $\lambda = 1/3$ точками минимума являются все точки отрезка

$$[B, C] = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 + 3x_2 = 3, \;\; -\frac{3}{14} \leqslant x_1 \leqslant \frac{3}{2} \right\},$$

а точкой максимума по-прежнему остается точка D; при этом

$$z_{\min} = 1, \qquad z_{\max} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} = \frac{7}{3}.$$

Если $1/3 < \lambda < 1$, то тогда точкой минимума является C, а точкой максимума D; при этом

$$z_{\min} = -\frac{3}{14}\lambda + \frac{15}{14}, \qquad z_{\max} = \frac{\lambda}{2} + \frac{5}{2}.$$

При $\lambda = 1$ точкой минимума остается C, а точками максимума будут все точки отрезка

$$[D, B] = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 2, \;\; -\frac{1}{2} \leqslant x_1 \leqslant \frac{3}{2} \right\},$$

причем

$$z_{\min} = \frac{6}{7}, \qquad z_{\max} = 2.$$

Если $1 < \lambda < 5$, то минимум остается в точке C, а максимум перемещается в точку B. При этом

$$z_{\min} = -\frac{3}{14}\lambda + \frac{15}{14}, \qquad z_{\max} = \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}.$$

В случае $\lambda = 5$ точками минимума будут все точки отрезка

$$[C, D] = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1 + x_2 = 0, \;\; -\frac{1}{2} \leqslant x_1 \leqslant -\frac{3}{14} \right\},$$

а точкой максимума будет B, причем $z_{\min} = 0$ и $z_{\max} = 8$. Наконец, при $\lambda > 5$ точкой минимума будет D, точкой максимума B, а экстремумы будут равны

$$z_{\min} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{5}{2}, \qquad z_{\max} = \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}.$$

Задания. Решите графически следующие задачи.

7.1. $\begin{cases} z = 2x_1 - 5x_2 \to \text{extr}, \\ 3x_1 - x_2 \geqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ x_1 - 2x_2 \geqslant 2, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} z = 3x_1 + 7x_2 \to \text{extr}, \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 8, \\ 3x_1 - 2x_2 \geqslant 6, \\ 7x_1 + 2x_2 \leqslant 14, \\ x_1 \geqslant 0. \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} z = 2x_1 - \lambda x_2 \to \text{extr}, \\ x_1 - 5x_2 \leqslant 5, \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 5, \\ x_1 - 3x_2 \geqslant 0, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

7.4. $\begin{cases} z = -\lambda x_1 + x_2 \to \text{extr}, \\ 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15, \\ 2x_1 - x_2 \geqslant 3, \\ 7x_1 + x_2 \geqslant 7, \\ x_1 - x_4 \leqslant 0. \end{cases}$

7.5. Решить примеры 2.1 и 2.2 из § 2.

§ 4. Метод исключения переменных в задачах линейного программирования

Как уже было отмечено, в общем случае линейные задачи решают симплекс-методом, но для системы, когда число переменных равно двум, существует более удобный и короткий метод — графический (он был рассмотрен в предыдущем разделе). Оказывается, некоторые линейные задачи, число переменных в которых больше двух, также можно решать графически, предварительно преобразовав задачу к новой задаче, но уже с двумя переменными.

Рассмотрим задачу линейного программирования (ЗЛП)

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + \ c_2x_2 + \ \ldots + \ c_nx_n \to \text{extr}, \\ \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Она называется ЗЛП в *канонической форме.* Ниже мы покажем, что любую задачу линейного программирования можно записать в канонической форме. Предположим еще, что ее можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \ldots + c_nx_n \to \mathrm{extr}, \\ x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Такую задачу мы будем называть задачей линейного программирования *с выделенным базисом*, переменные $x_1, \ldots, x_m$ — *базисными переменными*, а $x_{m+1}, \ldots, x_n$ — *свободными переменными.*

Если в ней $n - m \leqslant 2$ (то есть число уравнений на единицу или на две меньше числа переменных), то ее можно решить путем сведения к задаче с одной или двумя переменными соответственно. Для этого необходимо выразить целевую функцию и базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} z = d_1x_{m+1} + d_2x_{m+2} \to \mathrm{extr}, \\ x_1 = b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - a_{1,m+2}x_{m+2}, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_m = b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - a_{m,m+2}x_{m+2}, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Поскольку переменные $x_1, \ldots, x_m$ неотрицательны, последняя задача равносильна следующей:

$$\begin{cases} z = d_1x_{m+1} + d_2x_{m+2} \to \mathrm{extr}, \\ b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - a_{1,m+2}x_{m+2} \geqslant 0, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - a_{m,m+2}x_{m+2} \geqslant 0, \\ x_{m+1}, x_{m+2} \geqslant 0. \end{cases}$$

В итоге мы получили линейную задачу с двумя переменными. Ее можно решать графическим методом из § 3.

Пример 4.1. Решить задачу линейного программирования

$$\begin{cases} z = -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \mathrm{extr}, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ \quad x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

Решение. Переменные x_3 и x_4 можно считать базисными, так как каждая из них входит только в одно уравнение, причем с единичным коэффициентом. Выразим базисные переменные через свободные:

$$x_3 = 2 + x_1 - x_2, \qquad x_4 = 4 - x_1 - x_2.$$

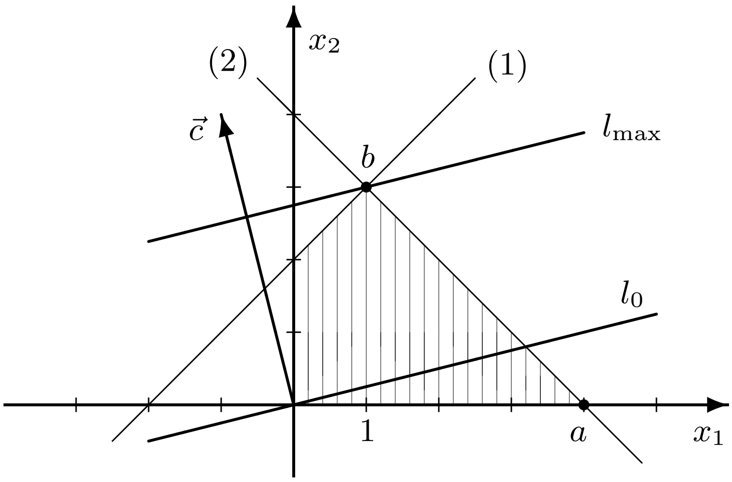
Подставим эти выражения в целевую функцию и запишем условия неотрицательности всех переменных. У нас получится система

$$\begin{cases} z = -x_1 + 4x_2 - 6 \to \mathrm{extr}, \\ 2 + x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ 4 - x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Если наша задача разрешима, то целевая функция z достигает своих экстремумов в тех же точках, что и функция $z' = -x_1 + 4x_2$. Поэтому рассмотрим задачу с целевой функцией z':

$$\begin{cases} z' = -x_1 + 4x_2 \to \mathrm{extr}, \\ 2 + x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ 4 - x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решаем полученную задачу линейного программирования аналогично примеру из § 3: строим допустимое множество, ограниченное соответствующими прямыми, градиент целевой функции c и линию уровня функции z'. Передвигая эту линию уровня параллельно себе вплоть до касания с допустимым множеством, получаем точку минимума a и точку максимума b.



Точка минимума получена при пересечении прямой $4 - x_1 - x_2 = 0$ с осью x_1, поэтому $x_2 = 0$, и, следовательно, $x_1 = 4$. Таким образом, координаты точки a равны $(4, 0)$. Для нахождения координат точки максимума достаточно решить систему, которая состоит из уравнений, определяющих прямые (1) и (2):

$$\begin{cases} \ \ x_1 - x_2 = -2, \\ -x_1 - x_2 = -4. \end{cases}$$

Из нее находим координаты точки $b = (1, 3)$. Осталось вычислить для этих точек значение целевой функции и оставшиеся две координаты x_3, x_4. В результате получим следующий

Ответ: $z_{\min} = z((4, 0, 6, 0)) = -10$, $z_{\max} = z((1, 3, 0, 0)) = 5$.

§ 5. Канонический вид и крайние точки для линейной задачи

Для изложения общего способа решения линейных задач с помощью симплекс-метода нам потребуется несколько новых понятий.

Определение. *Линейной задачей в канонической форме* (другими словами, *канонической линейной задачей*) называется задача

$$\begin{cases} \quad c_1x_1 + \ldots + \quad c_nx_n \to \max\ (\min), \\ a_{11}x_1 + \ldots + \ a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ \qquad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Таким образом, линейной задачей в канонической форме называется задача, в которой все ограничения представлены в виде равенств, а все переменные неотрицательны.

Данную задачу можно еще записать в матричном виде. Для этого введем обозначения

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad c = (c_1, \ldots, c_n), \quad b = (b_1, \ldots, b_m),$$
$$A = (a_{ij})_{i=\overline{1,n};\, j=\overline{1,m}}.$$

Тогда получим эквивалентное определение.

Определение. *Линейной задачей в канонической форме* называется задача

$$\begin{cases} \langle c, x\rangle \to \max\ (\min), \\ Ax = b, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Любая задача линейного программирования приводится к канонической форме при помощи введения новых переменных. Опишем, как это делается.

Если одно из ограничений имеет вид

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \leqslant b_k,$$

то оно приводится к равенству с помощью новой переменной $y_k \geqslant 0$:

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n + y_k = b_k.$$

Если одно из ограничений имеет вид

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \geqslant b_k,$$

то делаем из него равенство добавлением переменной $y_k \geqslant 0$ так:

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n - y_k = b_k.$$

Если для переменной x_i отсутствует условие $x_i \geqslant 0$, то представляем ее в виде $x_i = x_i^+ - x_i^-$, где $x_i^+ = \max\{x_i, 0\}$ и $x_i^- = \max\{-x_i, 0\}$.

Пример 5.1. Привести к каноническому виду задачу

$$\begin{cases} z = x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1, \\ x_2 + x_3 \geqslant 2, \\ x_2 \geqslant 0, \\ x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Заменим имеющиеся ограничения в виде неравенств на равенства путем введения новых переменных x_4 и x_5:

$$\begin{cases} z = x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_5 = 2, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 2, \ldots, 5. \end{cases}$$

Переменную x_1 представим в виде разности двух неотрицательных переменных x_6 и x_7:

$$\begin{cases} z = x_6 - x_7 + x_2 + 3x_3 \to \max, \\ 2(x_6 - x_7) + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 2, \ldots, 7. \end{cases}$$

Таким образом, получена задача в канонической форме.

Определение. Точка x из замкнутого выпуклого множества Ω называется *крайней*, если она не является внутренней ни для одного отрезка, содержащегося в Ω. Другими словами, для любых $a, b \in \Omega$ если $x \in [a, b] \subset \Omega$, то $x = a$ или $x = b$.

При экономической интерпретации задач линейного программирования точки x из допустимого множества Ω часто называют *планами* задачи, крайние точки Ω называют *опорными планами* задачи, а точку экстремума $x_0 \in \Omega$ — *оптимальным планом.*

Приведем формулировки основных теорем, на которых базируется симплекс-метод.

Теорема 5.2. *Если каноническая ЗЛП разрешима, то среди крайних точек допустимого множества Ω существует такая точка x_0, в которой достигается экстремум целевой функции z.*

Теорема 5.3. *Если x_0 — крайняя точка допустимого множества канонической ЗЛП, то положительным координатам x_0 отвечают линейно независимые столбцы матрицы A задачи.*

Из теоремы 5.3 вытекают два важных вывода. Во-первых, число положительных координат у крайней точки допустимого множества Ω не может превосходить ранга матрицы A. Во-вторых, число крайних точек Ω всегда конечно. А в силу теоремы 5.2 если у целевой функции есть точки экстремума, то среди крайних точек Ω обязательно найдутся такие, в которых эти экстремумы достигаются. Поэтому, чтобы решить каноническую ЗЛП, достаточно перебрать все крайние точки допустимого множества, посчитать значения целевой функции в этих точках и найти среди них максимум и минимум. На этой идее и базируется симплекс-метод. В нем определенным образом осуществляется направленный перебор крайних точек допустимого множества.

§ 6. Симплекс-метод

Особую роль играет класс канонических ЗЛП специального типа, который определяется следующим образом.

Определение. Каноническая ЗЛП называется *невырожденной*, если для любой крайней точки x_0 допустимого множества Ω число ее положительных координат равно рангу матрицы A.

Почти все задачи линейного программирования являются невырожденными. Симплекс-метод разработан именно для невырожденных задач. Всякую вырожденную задачу можно сделать невырожденной при помощи сколь угодно малого изменения ее коэффициентов, и затем считать решение модифицированной невырожденной задачи приближенным решением исходной вырожденной. В данном пособии не рассматриваются связанные с этим вопросы.

Опишем алгоритм решения для невырожденной линейной задачи. Предварительно она должна быть приведена к каноническому виду, как это описано в предыдущем параграфе. Рассмотрим для определенности задачу на минимум

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \min, \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{1}$$

Невырожденность задачи означает, что у любой крайней точки x_0 множества Ω есть ровно m положительных координат ($m = \operatorname{rank} A$). Назовем эти положительные координаты *базисными*, а все остальные координаты *свободными*. Столбцы матрицы A в системе (1), стоящие при базисных координатах, будем называть *базисными столбцами*.

Для того, чтобы начать симплекс-метод, нужно заранее найти хоть какую-нибудь одну крайнюю точку (ее называют *начальным опорным планом*). Как ее находить, мы объясним в следующем параграфе.

Для удобства записи мы будем считать, что у начальной крайней точки x_0 положительны первые m координат:

$$x_0 = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0),$$

то есть базисными переменными являются $x_1, \ldots, x_m$. Если нужно, этого всегда можно добиться изменением нумерации координат.

1) Введем новую переменную

$$z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

и перепишем исходную задачу в следующем виде:

$$\begin{cases} z \to \min, \\ \quad a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ z - c_1x_1 - \ldots - c_nx_n = 0, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{2}$$

2) В этой системе сделаем следующие преобразования: при помощи метода Гаусса выделим единичную матрицу в базисных столбцах, а затем исключим базисные переменные из уравнения, содержащего z. В результате получится система вида

$$\begin{cases} z \to \min, \\ x_1 + 0 + \ldots + 0 + \alpha_{1,m+1} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1n} x_n = \beta_1, \\ \quad x_2 + \ldots + 0 + \alpha_{2,m+1} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{2n} x_n = \beta_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad x_m + \alpha_{m,m+1} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mn} x_n = \beta_m, \\ \quad z + \delta_{m+1} x_{m+1} + \ldots + \delta_n x_n = \gamma, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{3}$$

Из этой системы следует, что

$$x_0 = (\beta_1, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0),$$

где все $\beta_i > 0$ и $z(x_0) = \gamma$.

3) Предположим, что $\delta_i \leqslant 0$ при всех $i = m+1, \ldots, n$. Тогда из последнего уравнения системы (3) следует, что значение функции z невозможно уменьшить, не нарушая условий $x_i \geqslant 0$. В данном случае минимальное значение функции z уже найдено; при этом $z_{\min} = \gamma$, и точкой минимума является x_0.

Предположим теперь, что есть такой номер $j_0 \in \{m+1, \ldots, n\}$, при котором $\delta_{j_0} > 0$. Рассмотрим тогда семейство точек

$$x(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_m(t), 0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0\big), \qquad t \geqslant 0,$$

где параметр t стоит на месте j_0, а $x_i(t)$ находятся из системы (3):

$$x_i(t) = \beta_i - \alpha_{ij_0} t, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Очевидно, $x_i(t) \geqslant 0$ при всех достаточно малых t, и, следовательно, $x(t) \in \Omega$. Значение целевой функции в этой точке будет равно

$$z(x(t)) = \gamma - \delta_{j_0} t < z(x_0) \quad \text{при} \ \ t > 0.$$

Чем больше параметр t, тем меньше значение функции в точке $x(t)$.

Если $\alpha_{ij_0} \leqslant 0$ при всех $i = 1, \ldots, m$, то $x_i(t) \geqslant 0$ для любого $t > 0$. В этом случае целевая функция не ограничена снизу на множестве Ω, и исходная задача не имеет решения (минимума у целевой функции на множестве Ω нет).

Если найдутся $\alpha_{ij_0} > 0$ при некоторых $i \in \{1, \ldots, m\}$, то мы можем увеличивать t только до тех пор, пока выполняются условия

$$x_i(t) = \beta_i - \alpha_{ij_0} t \geqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

то есть вплоть до значения

$$t_0 = \min_{\alpha_{ij_0} > 0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij_0}} \right\},$$

где минимум берется по всем $i \in \{1, \ldots, m\}$, для которых $\alpha_{ij_0} > 0$. Из невырожденности задачи вытекает, что этот минимум достигается лишь при *единственном* значении индекса $i = i_0$. При этом, очевидно, $x_{i_0}(t_0) = 0$. Отсюда вытекает, что точка $x(t_0)$ имеет ровно $m = \operatorname{rank} A$ положительных координат, и, значит, она является крайней точкой множества Ω.

По построению значение целевой функции в новой крайней точке $x(t_0)$ стого меньше, чем в точке x_0, а координаты $x(t_0)$ удовлетворяют равенствам $x_{i_0}(t_0) = 0$ и $x_{j_0}(t_0) = t_0$. Значит, базисными переменными для новой крайней точки будут все базисные переменные точки x_0, кроме x_{i_0}, и еще одна переменная x_{j_0}.

Для новой крайней точки переход от старой системы (3) к новой системе такого же вида выполняется следующим образом. В исходной системе (3) посредством элементарных преобразований строк нужно сделать элемент $\alpha_{i_0 j_0}$ равным единице, а остальные элементы столбца с номером j_0 сделать нулевыми. После этого система будет иметь по отношению к новым базисным переменным тот же вид, что и (3).

4) Повторяем шаг 2) и шаг 3) до тех пор, пока не найдем точку минимума вместе с минимальным значением целевой функции, либо пока не обнаружим, что целевая функция неограничена снизу на Ω.

Сформулируем теперь алгоритм решения ЗЛП симплекс-методом при помощи таблиц. Вначале необходимо привести задачу к каноническому виду (1) и переписать ее в виде (2).

1) По исходной системе (2) составляем таблицу, которая называется нулевой симплекс-таблицей:

x_b	x_1	x_2	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_n	b
x_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1m}	$a_{1,m+1}$	$\dots$	a_{1n}	b_1
x_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2m}	$a_{2,m+1}$	$\dots$	a_{2n}	b_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mm}	$a_{m,m+1}$	$\dots$	a_{mn}	b_m
z	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_m$	$-c_{m+1}$	$\dots$	$-c_n$	0

В ней столбец x_b содержит базисные переменные начального опорного плана, а последняя строка называется *z-строкой*.

2) Применяя метод Гаусса, приводим часть матрицы, отвечающую базисным переменным, к единичной, и выражаем целевую функцию через свободные переменные. Полученная таблица называется первой симплекс-таблицей:

x_b	x_1	x_2	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_n	b
x_1	1	0	$\dots$	0	$\alpha_{1,m+1}$	$\dots$	α_{1n}	β_1
x_2	0	1	$\dots$	0	$\alpha_{2,m+1}$	$\dots$	α_{2n}	β_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_m	0	0	$\dots$	1	$\alpha_{m,m+1}$	$\dots$	α_{mn}	β_m
z	0	0	$\dots$	0	δ_{m+1}	$\dots$	δ_n	γ

3) Если $\delta_i \leqslant 0$ для всех $i = m+1, \dots, n$, то минимальное значение функции z равно γ и достигается в точке $x_0 = (\beta_1, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)$.

Предположим, что существует $\delta_{j_0} > 0$. Тогда выбираем столбец, содержащий это δ_{j_0} (*разрешающий столбец*). Если сразу несколько коэффициентов δ_j положительны, то можно выбрать любой из них (например, максимальный). После этого смотрим на коэффициенты α_{ij_0} в разрешающем столбце.

Если $\alpha_{ij_0} \leqslant 0$ для всех $i = 1, \dots, m$, то ЗЛП не имеет решения, так как целевая функция в этом случае не ограничена снизу на Ω.

Если же существует $\alpha_{ij_0} > 0$, то следует перейти к новой крайней точке. Для этого одну из имеющихся базисных переменных заменяют другой, которая на предыдущем шаге не была базисной, причем ту переменную, которую мы будем включать в число базисных, мы уже знаем — это x_{j_0}. Для того, чтобы узнать, какую переменную мы будем исключать из базисных, нужно найти число

$$t_0 = \min_{\alpha_{ij_0}>0}\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ij_0}}\right\}$$

В силу невырожденности задачи этот минимум достигается на единственном номере $i = i_0$. Тогда переменная x_{i_0} будет исключаться из базисных. Элемент $\alpha_{i_0j_0} > 0$ называется *разрешающим элементом*, а строка таблицы, в которой стоит разрешающий элемент, называется *разрешающей строкой.*

Строим новую симплекс-таблицу. Вместо базисной переменной x_{i_0} в столбце x_b записываем новую базисную переменную x_{j_0}. Всю разрешающую строку делим на разрешающий элемент, и тем самым делаем коэффициент $\alpha_{i_0j_0}$ равным единице. Затем при помощи элементарных преобразований строк делаем нулевыми все элементы разрешающего столбца, кроме $\alpha_{i_0j_0}$. В итоге получается примерно такая табличка:

x_b	x_1	$\dots$	x_{i_0-1}	x_{i_0}	x_{i_0+1}	$\dots$	x_m	$\dots$	x_{j_0}	$\dots$	x_n	b
x_1	1	$\dots$	0	α'_{1,i_0}	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$\dots$	$\alpha'_{1,n}$	β'_1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_{i_0-1}	0	$\dots$	1	α'_{i_0-1,i_0}	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$\dots$	$\alpha'_{i_0-1,n}$	β'_{i_0-1}
x_{j_0}	0	$\dots$	0	α'_{i_0,i_0}	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	$\alpha'_{i_0,n}$	β'_{i_0}
x_{i_0+1}	0	$\dots$	0	α'_{i_0+1,i_0}	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$\dots$	$\alpha'_{i_0+1,n}$	β'_{i_0+1}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_m	0	$\dots$	0	α'_{m,i_0}	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$\dots$	$\alpha'_{m,n}$	β'_m
z	0	$\dots$	0	δ'_{i_0}	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$\dots$	δ'_n	γ'

Уже для новой таблицы повторяем шаг 3) до тех пор, пока не найдем минимум целевой функции или не докажем, что целевая функция неограничена снизу на множестве Ω.

Замечание 6.1. При помощи симплекс-метода также можно решать задачи, в которых целевая функция исследуется на максимум. Во-первых, можно свести задачу на максимум к задаче на минимум, просто изменив знак целевой функции. Однако на практике можно этого и не делать, так как алгоритм симплекс-метода для задачи на максимум отличается от алгоритма для задачи на минимум только тем, что знаки коэффициентов δ_i в z-строке должны быть противоположными: если все коэффициенты неотрицательны, то задача на максимум решена, а если есть отрицательные коэффициенты, то выбираем среди них какой-нибудь один и соответствующую переменную вводим в базис. При этом переход к новой симплекс-таблице осуществляется по тем же правилам.

Образно говоря, при решении задач на минимум мы «боремся» с положительными коэффициентами в z-строке, а при решении задач на максимум — с отрицательными.

Проиллюстрируем работу симплекс-метода на примерах.

Пример 6.2. Решить задачу

$$\begin{cases} z = -3x_1 - 2x_2 \to \min, \\ 4x_1 + 3x_2 \leqslant 12, \\ 4x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ 4x_1 - x_2 \leqslant 9, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} z = -3x_1 - 2x_2 \to \min, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ 4x_1 - x_2 + x_5 = 9, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Очевидно, точка $x_0 = (0, 0, 12, 8, 9)$ является начальным опорным планом. Выбираем базис из переменных x_3, x_4, x_5 и строим нулевую симплекс-таблицу:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	4	3	1	0	0	12
x_4	**4**	1	0	1	0	8
x_5	4	−1	0	0	1	9
z	**3**	2	0	0	0	0

Она же будет и первой, так как в базисных столбцах стоит единичная матрица, и функция z не зависит от базисных переменных.

Поскольку в z-строке имеются положительные элементы, минимум целевой функции в точке x_0 не достигается. В качестве разрешающего выберем столбец x_1, отвечающий максимальному элементу в z-строке. Тогда разрешающим элементом будет элемент 4, стоящий в строке x_4, потому что

$$\min\left\{\frac{12}{4};\ \frac{8}{4};\ \frac{9}{4}\right\} = \frac{8}{4} = 2.$$

Строим следующую симплекс-таблицу: в наборе базисных переменных меняем x_4 на x_1, разрешающий элемент делаем равным единице (деля всю разрешающую строку на 4), и при помощи элементарных преобразований строк делаем нулевыми остальные элементы разрешающего столбца. Получается таблица

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	**2**	1	-1	0	4
x_1	1	$1/4$	0	$1/4$	0	2
x_5	0	-2	0	-1	1	1
z	0	**5/4**	0	$-3/4$	0	-6

Новой крайней точкой будет точка $x_0' = (2, 0, 4, 0, 1)$ (напомним, что значения базисных координат записаны в b-столбце, а прочие координаты равны нулю). Значение целевой функции в этой точке равно -6 (оно записано на пересечении z-строки и столбца b).

Поскольку в z-строке имеется положительный элемент, минимум в точке x_0' не достигается. Разрешающим столбцом будет столбец x_2, а разрешающим элементом — элемент, стоящий в строке x_3, потому что

$$\min\left\{\frac{4}{2};\ \frac{2}{1/4}\right\} = \frac{4}{2} = 2.$$

Строим новую симплекс-таблицу:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	2
x_1	1	0	$-1/8$	$3/8$	0	$3/2$
x_5	0	0	1	-2	1	5
z	0	0	$-5/8$	$-1/8$	0	$-17/2$

Новым опорным планом будет $x_0'' = (3/2, 2, 0, 0, 5)$, а значение целевой функции в этой точке равно $-17/2$. Так как все элементы z-строки неположительны, минимум целевой функции достигнут, и найденный опорный план является решением канонической задачи. Отбрасывая лишние координаты x_3, x_4, x_5 (которых не было в исходной задаче), получаем

Ответ: $z_{\min} = -17/2$ в точке $(3/2, 2)$.

Упражнение. Решите данную задачу графически.

Пример 6.3. Решить задачу

$$\begin{cases} z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 \to \max, \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leqslant 47, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 10, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 \to \max, \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 + x_5 = 47, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_7 = 10, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 7. \end{cases}$$

Для нее начальным опорным планом будет

$$x_0 = (0, 0, 0, 0, 47, 8, 10).$$

Строим нулевую симплекс-таблицу. Как и в предыдущем примере, она совпадает с первой симплекс-таблицей:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_5	1	7	3	7	1	0	0	47
x_6	3	-1	1	**2**	0	1	0	8
x_7	2	3	-1	1	0	0	1	10
z	-2	-1	3	$\mathbf{-5}$	0	0	0	0

Так как в ее z-строке есть отрицательные элементы, то максимум целевой функции в точке x_0 не достигается. Разрешающим столбцом объявим столбец x_4. Тогда разрешающий элемент будет в строке x_6, поскольку

$$\min\left\{\frac{47}{7};\ \frac{8}{2};\ \frac{10}{1}\right\} = \frac{8}{2} = 4.$$

Строим следующую симплекс-таблицу: с помощью элементарных преобразований делаем разрешающий элемент равным единице, а все остальные элементы разрешающего столбца делаем нулевыми.

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_5	$-19/2$	$21/2$	$-1/2$	0	1	$-7/2$	0	19
x_4	$3/2$	$-1/2$	$1/2$	1	0	$1/2$	0	4
x_7	$1/2$	$\mathbf{7/2}$	$-3/2$	0	0	$-1/2$	1	6
z	$11/2$	$\mathbf{-7/2}$	$11/2$	0	0	$5/2$	0	20

Новым опорным планом будет точка $x_0' = (0, 0, 0, 4, 19, 0, 6)$, а значение целевой функции в этой точке равняется 20. Разрешающим столбцом будет столбец x_2, а разрешающим элементом будет число $7/2$, стоящее в строке x_7.

Строим следующую симплекс-таблицу:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_5	-11	0	4	0	1	-2	-3	1
x_4	$11/7$	0	$2/7$	1	0	$3/7$	$1/7$	$34/7$
x_2	$1/7$	1	$-3/7$	0	0	$-1/7$	$2/7$	$12/7$
z	6	0	4	0	0	2	1	26

Очередным опорным планом будет точка $x_0'' = (0, 12/7, 0, 34/7, 1, 0, 0)$, значение целевой функции в ней равно 26.

Так как все элементы z-строки неотрицательны, точка x_0'' является решением канонической задачи, и целевая функция принимает в ней свое максимальное значение $z_{\max} = 26$. Возвращаясь к исходной задаче, получаем

Ответ: $z_{\max} = 26$ в точке $(0, 12/7, 0, 34/7)$.

Задания. Решите симплекс-методом следующие задачи.

10.1. $\begin{cases} z = x_1 + x_2 \to \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 16, \\ x_1 - x_2 \leqslant 2, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, 3. \end{cases}$

10.2. $\begin{cases} z = -10x_1 - x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 11x_2 \leqslant 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \geqslant 5, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

10.3. $\begin{cases} z = -3x_1 + 12x_2 \to \max, \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 16, \\ x_1 - x_2 \geqslant -2, \\ 3x_1 - 5x_2 \leqslant 8, \\ x_1 \geqslant 0. \end{cases}$

10.4. $\begin{cases} z = -x_1 + 3x_2 \to \min, \\ 3x_1 - 2x_2 \leqslant 3, \\ -5x_1 - 4x_2 \geqslant -9, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant -5, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

10.5. $\begin{cases} z = 3x_1 - x_2 \to \max, \\ 3x_1 - 2x_2 \leqslant 3, \\ -5x_1 - 4x_2 \geqslant -10, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ x_1 \geqslant 0. \end{cases}$

§ 7. Поиск начального опорного плана методом искусственного базиса (w-задача)

Пусть дана каноническая задача линейного программирования

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \text{extr}, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{4}$$

где $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Алгоритм симплекс-метода, описанный в предыдущем параграфе, начинает свою работу, когда известна хотя бы одна крайняя точка допустимого множества (начальный опорный план). Однако зачастую нахождение начальной крайней точки является достаточно трудоемкой (с точки зрения количества вычислений) задачей. Для нахождения этой точки используется специальный *метод искусственного базиса.* Он позволяет найти начальную крайнюю точку исходной задачи с помощью симплекс-метода, но уже для другой линейной задачи, которая получается из исходной путем введения искусственных переменных.

Ниже дается описание метода искусственного базиса.

Прежде всего следует привести исходную задачу к каноническому виду, в котором все правые части b_i неотрицательны. Этого можно добиться при помощи изменения знака у тех уравнений, в которых $b_i < 0$.

Затем к каждому из уравнений задачи (4) добавим новую «искусственную» неотрицательную переменную, а в качестве целевой функции возьмем новую функцию w, равную сумме этих «искусственных» переменных:

$$\begin{cases} w = x_{n+1} + x_{n+2} \ldots + x_{n+m} \to \min, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n+m. \end{cases} \tag{5}$$

Полученная задача называется *w-задачей.* Для w-задачи сразу виден начальный опорный план: $x_0 = (0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Очевидно, что для всех x из области определения w-задачи выполняется неравенство $w(x) \geqslant 0$. Кроме того, если допустимое множество Ω исходной задачи (4) непусто, то для всех точек $x \in \Omega$ соответствующие искусственные переменные в (5) обращаются в нуль. Значит, на этих точках целевая функция w тоже будет принимать нулевое значение. Таким образом, чтобы получить начальный опорный план для исходной задачи (4), достаточно найти крайнюю точку для w-задачи (5), в которой целевая функция w достигает минимума, равного нулю.

Далее решаем w-задачу симплекс-методом, описанным выше. Если окажется, что в этой задаче $w_{\min} = 0$, то в точке минимума

$$x_0' = (x_1', \ldots, x_n', x_{n+1}', \ldots, x_{n+m}')$$

все координаты x_{n+i}' будут нулевыми. В этом случае точка $(x_1', \ldots, x_n')$ будет крайней для допустимого множества Ω исходной задачи. Если же выяснится, что $w_{\min} > 0$, то из приведенного выше рассуждения следует, что $\Omega = \varnothing$, то есть исходная задача не имеет решений.

Замечание 7.1. Если в исходной задаче некоторая переменная x_j присутствует только в одном уравнении (например, в уравнении с номером i), и коэффициент a_{ij} положительный, то при составлении w-задачи можно не добавлять искусственную переменную к i-му уравнению, а использовать вместо нее x_j. Тогда количество искусственных переменных окажется на единицу меньше и w-задача примет вид

$$\begin{cases} w = x_{n+1} + x_{n+2} \ldots + x_{n+m-1} \to \min, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \qquad\qquad = b_i, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m-1} = b_m, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n+m-1. \end{cases}$$

Для нее начальным опорным планом будет служить точка

$$(0, \ldots, 0, b_i/a_{ij}, 0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_m).$$

Проиллюстрируем метод искусственного базиса на примерах.

Пример 7.2. Решить задачу с помощью метода искусственного базиса или доказать, что решений нет:

$$\begin{cases} z = 4x_1 + x_2 \to \min, \\ 3x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ \;\; x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \\ \;\; x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Сначала запишем нашу задачу в каноническом виде

$$\begin{cases} z = 4x_1 + x_2 \to \min, \\ 3x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ \quad x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

Переменная x_4 входит лишь в одно уравнение, причем с положительным коэффициентом. Поэтому нам достаточно ввести всего две искусственные переменные. Получим следующую w-задачу:

$$\begin{cases} w = x_5 + x_6 \to \min, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_6 = 6, \\ \quad x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 6. \end{cases}$$

Ее начальным опорным планом служит точка $x_0 = (0, 0, 0, 4, 3, 6)$.

Составим нулевую симплекс-таблицу для w-задачи:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	1	2	0	1	0	0	4
x_5	3	1	0	0	1	0	3
x_6	4	3	-1	0	0	1	6
w	0	0	0	0	-1	-1	0

Выразим функцию w через свободные переменные: $w = x_5 + x_6 = 9 - 7x_1 - 4x_2 + x_3$ (или элементарными преобразованиями приравняем к нулю элементы w-строки, соответствующие базисным переменным). Получим первую симплекс-таблицу

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	1	2	0	1	0	0	4
x_5	**3**	1	0	0	1	0	3
x_6	4	3	-1	0	0	1	6
w	**7**	4	-1	0	0	0	9

Далее применяем симплекс-метод: разрешающим столбцом выбираем столбец x_1, а разрешающий элемент будет в строке x_5, так как

$$\min\left\{\frac{4}{1};\ \frac{3}{3};\ \frac{6}{4}\right\} = \frac{3}{3} = 1.$$

Строим следующую симплекс-таблицу (элементарными преобразованиями делаем разрешающий элемент равным единице, а остальные элементы разрешающего столбца приравниваем к нулю):

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	0	5/3	0	1	−1/3	0	3
x_1	1	1/3	0	0	1/3	0	1
x_6	0	**5/3**	−1	0	−4/3	1	2
w	0	**5/3**	−1	0	−7/3	0	2

В ней разрешающим будет столбец x_2, а разрешающий элемент будет в строке x_6.

Строим следующую симплекс-таблицу:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	0	0	1	1	1	−1	1
x_1	1	0	1/5	0	3/5	−1/5	3/5
x_2	0	1	−3/5	0	−4/5	3/5	6/5
w	0	0	0	0	−1	−1	0

Из нее видно, что $w_{\min} = 0$ в точке $(3/5, 6/5, 0, 1, 0, 0)$. Значит, область определения исходной задачи не пуста, и начальный опорный план x_0 для исходной задачи имеет координаты $(3/5, 6/5, 0, 1)$.

Выпишем начальную симплекс-таблицу для исходной задачи. При этом все строки с базисными переменными можно взять из последней симплекс-таблицы для w-задачи:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	1	−3/5	0	6/5
x_4	0	0	1	1	1
z	−4	−1	0	0	0

С помощью элементарных преобразований приравняем к нулю все элементы z-строки, отвечающие базисным переменным:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	1	−3/5	0	6/5
x_4	0	0	**1**	1	1
z	0	0	**1/5**	0	18/5

Поскольку в z-строке нет отрицательных элементов, мы «бесплатно» нашли максимум $z_{\max} = 18/5$, который достигается в точке $(3/5, 6/5)$.

Чтобы найти минимум, совершим еще один шаг симплекс-метода. Разрешающим столбцом служит столбец x_3, а разрешающий элемент находится в строке x_4. Следующая таблица будет такой:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	−1/5	0	2/5
x_2	0	1	0	3/5	9/5
x_3	0	0	1	1	1
z	0	0	0	−1/5	17/5

Ответ: $z_{\min} = 17/5$ и минимум достигается в точке $(2/5, 9/5)$.

Пример 7.3. Решить задачу с помощью метода искусственного базиса или доказать, что решений нет:

$$\begin{cases} z = 4x_1 - x_2 + x_3 \to \min, \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \geqslant -1, \\ \;\; 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ \;\; x_i \geqslant 0, \quad i = 1,\, 2,\, 3. \end{cases}$$

Решение. Сделаем правые части всех равенств и неравенств положительными и запишем задачу в каноническом виде:

$$\begin{cases} z = 4x_1 - x_2 + x_3 \to \min, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

В ней переменная x_4 выделена (содержится лишь в одном уравнении и с положительным коэффициентом).

Перейдем к w-задаче:

$$\begin{cases} w = x_5 + x_6 \to \min, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_6 = 2, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 6. \end{cases}$$

Точка $x_0 = (0, 0, 0, 1, 3, 2)$ — ее начальный опорный план.

Составим нулевую симплекс-таблицу:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	4	−1	2	0	1	0	3
x_4	2	3	−3	1	0	0	1
x_6	5	2	4	0	0	1	2
w	0	0	0	0	−1	−1	0

С помощью элементарных преобразований приравняем к нулю все элементы w-строки, отвечающие базисным переменным:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	4	−1	2	0	1	0	3
x_4	2	3	−3	1	0	0	1
x_6	**5**	2	4	0	0	1	2
w	**9**	1	6	0	0	0	5

К этой таблице применяем симплекс-метод. Разрешающим столбцом считаем столбец x_1. Тогда разрешающим элементом будет 5, так как $\min\{3/4, 1/2, 2/5\} = 2/5$. Поэтому вводим в базис x_1, а выводим x_6.

Делаем разрешающий элемент равным единице, а остальные элементы разрешающего столбца — нулевыми:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	0	−13/5	−6/5	0	1	−4/5	7/5
x_4	0	11/5	−23/5	1	0	−2/5	1/5
x_1	1	2/5	4/5	0	0	1/5	2/5
w	0	−13/5	−6/5	0	0	−9/5	7/5

Из последней таблицы видно, что $w_{\min} = 7/5 > 0$. Значит, у исходной задачи область определения пуста, и у нее нет решений.

Пример 7.4. Решить задачу с помощью метода искусственного базиса или доказать, что решений нет:

$$\begin{cases} z = -7x_1 + 7x_2 - 2x_3 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geqslant 5, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1,\, 2,\, 3. \end{cases}$$

Решение. Запишем исходную задачу в канонической форме:

$$\begin{cases} z = -7x_1 + 7x_2 - 2x_3 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

Перейдем к соответствующей w-задаче:

$$\begin{cases} w = x_5 + x_6 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + x_6 = 3, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 6. \end{cases}$$

В ней точка $x_0 = (0, 0, 0, 0, 5, 3)$ — начальный опорный план.

Составим нулевую симплекс-таблицу для w-задачи:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	1	2	-3	-1	1	0	5
x_6	3	-1	5	0	0	1	3
w	0	0	0	0	-1	-1	0

Выразим функцию w через свободные переменные:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	1	2	-3	-1	1	0	5
x_6	**3**	-1	5	0	0	1	3
w	**4**	1	2	-1	0	0	8

Далее решаем w-задачу симплекс-методом. В данном случае разрешающим столбцом можно объявить столбец x_1, отвечающий максимальному элементу w-строки. Тогда разрешающий элемент будет в строке x_6, так как $\min\{5/1, 3/3\} = 1$, и этот минимум достигается на элементе строки x_6. Следующая симплекс-таблица будет иметь вид

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	0	**7/3**	−14/3	−1	1	−1/3	4
x_1	1	−1/3	5/3	0	0	1/3	1
w	0	**7/3**	−14/3	−1	0	−4/3	4

В ней разрешающим столбцом является столбец x_2, а разрешающим элементом — элемент в строке x_5. На следующем шаге получаем

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	1	−2	−3/7	3/7	−1/7	12/7
x_1	1	0	1	−1/7	1/7	2/7	11/7
w	0	0	0	0	−1	−1	0

Из этой таблицы делаем вывод, что значение $w_{\min} = 0$ достигается в точке $(11/7, 12/7, 0, 0, 0, 0)$. Значит, исходная задача имеет непустую область определения, и для нее начальным опорным планом является точка $(11/7, 12/7, 0, 0)$.

Выпишем нулевую симплекс-таблицу для исходной задачи (строки с базисными переменными берем из последней таблицы для w-задачи)

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	1	−1/7	11/7
x_2	0	1	−2	−3/7	12/7
z	7	−7	2	0	0

и выразим в ней функцию z через свободные переменные:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	1	−1/7	11/7
x_2	0	1	−2	−3/7	12/7
z	0	0	−21	−2	1

Из последней таблицы получатся

Ответ: $z_{\min} = 1$ в точке $(11/7, 12/7, 0)$.

Задания. Решите задачи линейного программирования.

11.1. $$\begin{cases} z = 3x_1 + x_2 + 8x_3 \to \text{extr}, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 9x_2 - x_3 = 9, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

11.2. $$\begin{cases} z = 5x_1 + x_2 + x_3 \to \text{extr}, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

11.3. $$\begin{cases} z = -x_1 + x_2 - 5x_3 \to \text{extr}, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \geqslant -5, \\ x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

11.4. $$\begin{cases} z = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \text{extr}, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 10, \\ x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

11.5. $$\begin{cases} z = -3x_1 + x_2 - x_3 \to \text{extr}, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 3, \\ -x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -2, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

Содержание

Учебное издание

Бахтин Виктор Иванович
Иванишко Ия Александровна
Лебедев Андрей Владимирович
Пиндрик Ольга Исааковна

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методическое пособие для студентов специальности 1-31 03 01-03 «Математика (экономическая деятельность)»

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *О. И. Пиндрик*

Подписано в печать 27.04.2012. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 2,33. Уч.-изд. л. 1,97. Тираж 50 экз. Заказ

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
на копировально-множительной технике
механико-математического факультета
Белорусского государственного университета.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.