

Лабораторная работа № 2.

Аффинные многообразия и их рациональная параметризация.

Срок выполнения лабораторной работы: 14 дней. Отчет предоставляется преподавателю в электронном виде.

Задание 1. Найти все решения системы (над полем \mathbb{R}) и представить их в виде многообразий:

$$M_1 = \{7a^2 + 12ac + 7c^2 + 2ad + 4k + 2m, 11a + 14c + 3d, 7ac - 4ad - 11k - 7m - 3p, 343a^3 + 1029a^2c + 1029ac^2 + 343c^3 - 54dk - 54ap\};$$

$$M_2 = \{3a + 3c + d, ab + 2bc + 2n, 2a^3 + 3a^2c + 3ak + 6ck - ap, 6a^2 + 9ac + 3m - 4p, 3b^2 - 4a^2 - 6ac + 2k + 2p, ab + bc + 1 + n\};$$

$$M_3 = \{a + c, cb + bd + 3n, a^2b^2 + b^4 + 2abl + n^2, -b^2k + cbn + 1^2, b^2m - 3abn + 3n^2, p, 1 + n\};$$

$$M_4 = \{a + c, -ck + 2dk + 6bl - am + ap, a - d, -dk - ap, ab + bc + 1 + n, -bck + 2bdk + 6b^2l - ac1 + k1 - abm + 1m + a^2n - 2kn + abp + 1p, 2l^3 - k1m + k^2n + k1p\};$$

Примечание: если переменные в решении выражены линейно в виде $x_1 =$

$$f(x_2, x_3, \dots), \text{ например } a = 4ms + 7pk,$$

то соответствующий элемент многообразия запишется в

$$\text{виде: } x_1 - f(x_2, x_3, \dots) \text{ (} a - 4ms - 7pk \text{)}. \text{ В противном случае,}$$

если правая часть равенства в решении системы представляет

$$\text{собой дробь } \left(x_1 = \frac{f(x_2, x_3, \dots)}{g(x_2, x_3, \dots)} \right), \text{ например } k = \frac{3ac - 17mn}{b},$$

то соответствующий элемент многообразия следует записывать в

$$\text{виде: } x_1 g(x_2, x_3, \dots) - f(x_2, x_3, \dots) \text{ (} kb - 3ac + 17mn \text{)},$$

а также добавить к многообразию элемент $yg_1 g_2 \dots g_n - 1$,

означающий, что знаменатели $g_1, g_2, \dots,$

g_n не должны быть равны нулю (y - новый параметр).

Задание 2. Проверить, что многообразии допускает рациональную параметризацию, заданную уравнениями

$$M_5 = \{4a^5 + 16a^3b^2 + 20ab^4 + 4a^4c + 12a^2b^2c + 16b^4c + a^3c^2, 18a^3b + 10ab^3 + 39a^2bc + 8b^3c + 30abc^2 + 8bc^3 + 20a^2n + 26acn + 8c^2n, 2a^4 - 10a^2b^2 + a^3c - 28ab^2c - 16b^2c^2 - 20abn - 16bcn, 10a^3b + 10ab^3 + 15a^2bc + 8b^3c + 6abc^2 + 12a^2n + 8b^2n + 6acn, -8a^5 + 10a^3b^2 - 15a^4c + 68a^2b^2c - 6a^3c^2 + 108ab^2c^2 + 48b^2c^3 - 4a^2bn - 60an^2 - 48cn^2, -a^3 + 2ab^2 + 4b^2c - 3ak + 4bn, 2a^3 - 10ab^2 - 3a^2c - 20b^2c - 12ck - 20bn, 4a^2b + 2b^3 + 5abc + 2bc^2 + 2bk + 4an + 2cn, -2a^4 - 62a^2b^2 - 48b^4 + 3a^3c - 76ab^2c - 48b^2c^2 + 48k^2 - 28abn + 48n^2, 4a^2 + 6b^2 + ac + 6k + 2m, ab + bc + 1 + n\};$$

$$a = \frac{2uv}{1+2u^2}, \quad b = -\frac{(-1+2u^2)v}{2(1+2u^2)}, \quad c = -\frac{u(5+4u^2+4u^4)v}{2(1+2u^2)}, \quad k = -\frac{v^2}{4(1+u^2)},$$

$$l = \frac{uv^2}{4(1+u^2)}, \quad m = \frac{u^2(-1+2u^2)v^2}{4(1+u^2)}, \quad n = -\frac{u^3(1+2u^2)v^2}{4(1+u^2)}.$$

Задание 3. Решить систему (над полем R) и параметризовать многообразия:

$$M_6 = \{6a^4b + 10a^2b^3 + 13a^3bc + 18ab^3c + 9a^2bc^2 + 8b^3c^2 + 2abc^3 + 7a^3bd + 4ab^3d + 11a^2bcd + 4b^3cd + 4abc^2d + 2a^2bd^2 + 2abcd^2 + 8a^3n + 12ab^2n + 8a^2cn + 8b^2cn + 2ac^2n + 8a^2dn + 4b^2dn + 4acd + 2ad^2n, -2a^3 + 2ab^2 - a^2c + 4b^2c - a^2d - 8ak - 4ck - 4dk + 4bn, 2a^3b + 2ab^3 + 3a^2bc + 2b^3c + abc^2 + a^2bd + abcd + 2abk + 2bck + 2a^2n + 2b^2n + acn + adn, -2a^3b^2 - 4ab^4 - 2a^2b^2c - 4b^4c - 2a^2b^2d - 2ab^2cd + a^3k + a^2ck + 4ak^2 + 4ck^2 - 4b^3n + 2abcn - 2abdn + 4bkn + 2an^2, 2a^3 + 4ab^2 + a^2c + 2b^2c + a^2d + 4ak + 2ck + am + 2bn, 2b^3 - 2abc - bc^2 - bcd + 2bk + bm - 2an - cn - dn, 2a^4 + 2a^2b^2 + a^3c + 4ab^2c + 4b^2c^2 + a^3d + 2a^2k - 8b^2k + 2ack - 8k^2 - 4km + 4abn + 8bcn + 4n^2, 4a^2 + 6b^2 + ac + 3ad + 6k + 2m + 2p, ab + bc + l + n\};$$

$$M_7 = \{2a + c - d, 256a^6 + 321a^4b^2 + 99a^2b^4 + 9b^6 + 256a^5c + 232a^3b^2c + 36ab^4c + 96a^4c^2 + 54a^2b^2c^2 + 4b^4c^2 + 16a^3c^3 + 4ab^2c^3 + a^2c^4, 204a^4b + 225a^2b^3 + 36b^5 + 140a^3bc + 42ab^3c + 125a^2bc^2 + b^3c^2 + 46abc^3 + 5bc^4 - 15a^3n + 87a^2cn + 43ac^2n + 5c^3n, 44a^3b + 9ab^3 + 80a^2bc + 13b^3c + 37abc^2 + 5bc^3 + 57a^2n + 12b^2n + 34acn + 5c^2n, 12a^2b^2 + b^4 + 20ab^2c + 9b^2c^2 + 17abn + 13bcn + 4n^2, 2048a^6 + 2960a^4b^2 + 426a^2b^4 + 2048a^5c + 2848a^3b^2c + 249ab^4c + 768a^4c^2 + 822a^2b^2c^2 + 36b^4c^2 + 128a^3c^3 + 73ab^2c^3 + 8a^2c^4 - 1024a^4k - 1024a^3ck - 384a^2c^2k - 64ac^3k - 4c^4k + 738a^3bn + 335a^2bcn + 37abc^2n, 12a^2b + b^3 + 16abc + 5bc^2 + 4bk + 13an + 5cn, 128a^3b + 12ab^3 + 260a^2bc + 7b^3c + 172abc^2 + 35bc^3 + 144a^2n + 151acn + 35c^2n - 12kn, 141792a^5 + 49620a^3b^2 + 11025ab^4 + 82824a^4c - 65952a^2b^2c + 2925b^4c + 16884a^3c^2 - 37455ab^2c^2 + 1260a^2c^3 - 4575b^2c^3 + 133668a^3k + 73392a^2ck + 16080ac^2k + 1200c^3k + 4802a^3m - 79875a^2bn - 38550abcn - 4575bc^2n, 48a^3 + 30ab^2 + 36a^2c + 12b^2c + 6ac^2 + 42ak + 18ck + 13am + 5cm, 12a^2b - 3b^3 + 24abc + 9bc^2 - 2bm + 21an + 9cn, 52a^3b + 3ab^3 + 112a^2bc - b^3c + 83abc^2 + 19bc^3 + 63a^2n + 74acn + 19c^2n + 2mn, 4a^2 + 3b^2 + ac + 3k + m - p, ab + bc + l + n\};$$

$$\begin{aligned}
M8 = & \{-ab^2c - b^2c^2 + b^2k - abn - 2bcn - n^2, \\
& 2b^3 - 2abc - bc^2 - bcd + 2bk + bm - 2an - cn - dn, 2a^2bc + 3abc^2 + bc^3 + abcd + \\
& bc^2d - 2abk - bck - bdk + 2a^2n + 2b^2n + 3acn + c^2n + adn + cdn + 2kn + mn, \\
& -4a^4b^2 + 4a^2b^4 - 26a^3b^2c + 16ab^4c - 60a^2b^2c^2 + 16b^4c^2 - 56ab^2c^3 - \\
& 16b^2c^4 - 2a^3b^2d - 12a^2b^2cd - 24ab^2c^2d - 16b^2c^3d + 2a^3ck + a^2c^2k + \\
& 2a^3dk + 2a^2cdk + a^2d^2k - 4a^2k^2 + 8ack^2 + 4c^2k^2 + 8adk^2 + 8cdk^2 + \\
& 4d^2k^2 - 16k^3 - 2a^4m - a^3cm - a^3dm - 12a^2km - 4ackm - 4adkm - 16k^2m - \\
& a^2m^2 - 4km^2 - 24a^3bn + 16ab^3n - 76a^2bcn + 32b^3cn - 96abc^2n - \\
& 32bc^3n - 12a^2bdn - 32abcdn - 32bc^2dn - 32abkn - 16bckn - \\
& 16bdkn - 16a^2n^2 + 16b^2n^2 - 40acn^2 - 16c^2n^2 - 8adn^2 - 16cdn^2, \\
& -16a^2b^4 + 16b^6 - 28a^3b^2c - 12ab^4c - 110a^2b^2c^2 + 24b^4c^2 - 128ab^2c^3 - \\
& 40b^2c^4 + 8a^3b^2d - 16ab^4d + 14a^2b^2cd - 24b^4cd - 20ab^2c^2d - 32b^2c^3d + \\
& 4a^2b^2d^2 + 12ab^2cd^2 + 8b^2c^2d^2 - 2a^2c^2k - ac^3k - 6a^2cdk - 4ac^2dk - \\
& 4a^2d^2k - 5acd^2k - 2ad^3k + 20ack^2 + 8c^2k^2 + 24adk^2 + 16cdk^2 + 8d^2k^2 - \\
& 32k^3 + 2a^3cm + a^2c^2m + 4a^3dm + 3a^2cdm + 2a^2d^2m - 16a^2km - 8ackm - \\
& 2c^2km - 4adkm - 4cdkm - 2d^2km - 24k^2m + 4a^2m^2 + 3acm^2 + 4adm^2 + \\
& 2m^3 - 32a^3bn - 128a^2bcn + 72b^3cn - 216abc^2n - 80bc^3n + 8a^2bdn - \\
& 24b^3dn - 12abcdn - 64bc^2dn + 12abd^2n + 16bcd^2n - 96abkn - 48bckn - \\
& 48bdkn - 16a^2n^2 + 48b^2n^2 - 88acn^2 - 40c^2n^2 + 8adn^2 - 32cdn^2 + 8d^2n^2, \\
& 2ab^3 + a^2bc + 4b^3c + abcd - abk + bck - bdk + a^2n + 4b^2n + adn + kn + bcp + np, \\
& -12a^3b^2 + 4ab^4 - 34a^2b^2c - 28ab^2c^2 - 8b^2c^3 - 6a^2b^2d - 12ab^2cd - \\
& 4b^2c^2d + 2a^2ck + ac^2k + 2a^2dk + 2acd + ad^2k - 4ak^2 - 2ck^2 + 2dk^2 - \\
& 2a^3m - a^2cm - a^2dm - 2akm + 2dkm - am^2 - 28a^2bn - 40abcn - 16bc^2n - \\
& 12abd - 8bcd - 12an^2 - 8cn^2 - 4dn^2 - 4akp - 2ckp - 2dkp, \\
& 2a^2b^3 + 6ab^3c + 4b^3c^2 - abck - bcdk + bk^2 + 6ab^2n + 8b^2cn - akn - \\
& dkn + 4bn^2 + bkp, -10a^2b^2 + 4b^4 - 22ab^2c - 10b^2c^2 - 6ab^2d - \\
& 8b^2cd + 3ack + c^2k + 3adk + 3cdk + 2d^2k - 6k^2 - 3a^2m - acm - \\
& 2adm - 5km - m^2 - 18abn - 12bcn - 8bdn - 2n^2 - 2b^2p - 2kp - mp, \\
& 8a^4b^2 + 20a^2b^4 + 14a^3b^2c + 64ab^4c - 8a^2b^2c^2 + 32b^4c^2 - 8ab^2c^3 + 2a^3b^2d - \\
& 4a^2b^2cd - 28ab^2c^2d - 16b^2c^3d - 2a^3ck - a^2c^2k - 2a^3dk - 2a^2cdk - \\
& a^2d^2k + 4a^2k^2 + 2ack^2 + 2d^2k^2 - 2k^3 + 2a^4m + a^3cm + a^3dm + 2a^2km - \\
& 2adkm + a^2m^2 + 8a^3bn + 64ab^3n - 16a^2bcn + 64b^3cn - 16abc^2n - 4a^2bdn - \\
& 40abcdn - 32bc^2dn - 16abkn - 16bdkn - 8a^2n^2 + 32b^2n^2 - 8acn^2 - \\
& 12adn^2 - 16cdn^2 - 4a^2b^2p + 2a^2kp + 2ackp - 4k^2p - 2kp^2, ab + bc + l + n\};
\end{aligned}$$

Примечание: в случае, когда в решении присутствует неприводимый полином (не имеющий множителей над полем R) второй и выше степени, можно воспользоваться **алгоритмом упрощения**. Например, одним из решений системы (в чем можно убедиться непосредственной проверкой)

$$\begin{aligned}
& \{ab + bc + l + n, 6ab^3 - 3a^2bc + 6b^3c - 3abc^2 + 3a^2bd + 3abcd + 6abk + 5bck + \\
& 2bdk + 6b^2l + 2acl + 3c^2l + 3adl + 3cdl + kl + 2abm + 3bcm + lm - 5a^2n - \\
& 6acn - 2kn + abp + lp, -ckl + dkl + 6b^2l^2 - bkm - alm + 2akn + 2bkp, \\
& 2l^3 - klm + k^2n + klp, -2a^2 + 3b^2 - 6ac - 3c^2 - cd + 2k + m, \\
& -6a^3 - 21a^2c - 24ac^2 - 9c^3 - 2a^2d - 5acd - 3c^2d + ak + 2dk + 6bl - am - cp, \\
& 9l^2 - 3km + 5kp, 9a^2 + 18ac + 9c^2 + 3ad + 3cd + p\}
\end{aligned}$$

является набор равенств:

$$27 b^4 (5 a + 4 c + 2 d) + a (a + 3 c - d)^2 (a + d) (7 a + 6 c + 2 d) - 3 b^2 (23 a^3 + 84 a^2 c + 54 a c^2 + 6 a^2 d + 63 a c d + 36 c^2 d - 9 a d^2 + 6 c d^2 - 2 d^3) = 0,$$

k =

$$\left((8 a^2 - 3 b^2 + 18 a c + 9 c^2 + 2 a d + 3 c d) (-3 a^3 b^2 - 36 a b^4 + 6 a^4 c - 15 a^2 b^2 c - 72 b^4 c + 21 a^3 c^2 + 18 a b^2 c^2 + 9 a^2 c^3 - 27 a^2 b^2 d + a^3 c d - 72 a b^2 c d + 20 a^2 c^2 d - 12 b^2 c^2 d + 6 a c^3 d - 6 a b^2 d^2 - 5 a^2 c d^2 - 12 b^2 c d^2 + 4 a c^2 d^2 - 2 a c d^3) \right) /$$

$$\left(-93 a^3 b^2 + 198 a b^4 + 18 a^4 c - 333 a^2 b^2 c + 72 b^4 c + 63 a^3 c^2 - 144 a b^2 c^2 + 27 a^2 c^3 - 111 a^2 b^2 d + 108 b^4 d + 15 a^3 c d - 456 a b^2 c d + 102 a^2 c^2 d - 168 b^2 c^2 d + 36 a c^3 d + 12 a b^2 d^2 - 13 a^2 c d^2 - 84 b^2 c d^2 + 52 a c^2 d^2 + 12 c^3 d^2 + 12 b^2 d^3 - 16 a c d^3 + 8 c^2 d^3 - 4 c d^4 \right),$$

$$l = - \left(b (8 a^2 - 3 b^2 + 18 a c + 9 c^2 + 2 a d + 3 c d) \right.$$

$$\left. (14 a^4 - 51 a^2 b^2 + 48 a^3 c - 48 a b^2 c + 33 a^2 c^2 + 4 a^3 d - 30 a b^2 d + 35 a^2 c d - 24 b^2 c d + 28 a c^2 d - 14 a^2 d^2 - 16 a c d^2 - 4 c^2 d^2 - 4 a d^3 - 4 c d^3) \right) /$$

$$\left(-93 a^3 b^2 + 198 a b^4 + 18 a^4 c - 333 a^2 b^2 c + 72 b^4 c + 63 a^3 c^2 - 144 a b^2 c^2 + 27 a^2 c^3 - 111 a^2 b^2 d + 108 b^4 d + 15 a^3 c d - 456 a b^2 c d + 102 a^2 c^2 d - 168 b^2 c^2 d + 36 a c^3 d + 12 a b^2 d^2 - 13 a^2 c d^2 - 84 b^2 c d^2 + 52 a c^2 d^2 + 12 c^3 d^2 + 12 b^2 d^3 - 16 a c d^3 + 8 c^2 d^3 - 4 c d^4 \right),$$

$$m = - \left(138 a^5 b^2 - 1233 a^3 b^4 + 810 a b^6 + 60 a^6 c + 894 a^4 b^2 c - 4689 a^2 b^4 c + 648 b^6 c + \right.$$

$$318 a^5 c^2 + 2322 a^3 b^2 c^2 - 4806 a b^4 c^2 + 522 a^4 c^3 + 2268 a^2 b^2 c^3 - 1512 b^4 c^3 + 351 a^3 c^4 + 756 a b^2 c^4 + 81 a^2 c^5 - 222 a^4 b^2 d - 531 a^2 b^4 d + 324 b^6 d + 10 a^5 c d - 492 a^3 b^2 c d - 2286 a b^4 c d + 164 a^4 c^2 d + 636 a^2 b^2 c^2 d - 1260 b^4 c^2 d + 204 a^3 c^3 d + 972 a b^2 c^3 d + 81 a^2 c^4 d + 288 b^2 c^4 d - 228 a^3 b^2 d^2 + 72 a b^4 d^2 - 50 a^4 c d^2 - 660 a^2 b^2 c d^2 - 288 b^4 c d^2 - 71 a^3 c^2 d^2 + 36 a b^2 c^2 d^2 - 201 a^2 c^3 d^2 + 168 b^2 c^3 d^2 - 156 a c^4 d^2 - 36 c^5 d^2 - 48 a^2 b^2 d^3 + 36 b^4 d^3 - 20 a^3 c d^3 - 204 a b^2 c d^3 + 7 a^2 c^2 d^3 - 64 a c^3 d^3 - 36 c^4 d^3 - 24 b^2 c d^4 + 28 a c^2 d^4 + 4 c^3 d^4 + 4 c^2 d^5) /$$

$$\left(-93 a^3 b^2 + 198 a b^4 + 18 a^4 c - 333 a^2 b^2 c + 72 b^4 c + 63 a^3 c^2 - 144 a b^2 c^2 + 27 a^2 c^3 - 111 a^2 b^2 d + 108 b^4 d + 15 a^3 c d - 456 a b^2 c d + 102 a^2 c^2 d - 168 b^2 c^2 d + 36 a c^3 d + 12 a b^2 d^2 - 13 a^2 c d^2 - 84 b^2 c d^2 + 52 a c^2 d^2 + 12 c^3 d^2 + 12 b^2 d^3 - 16 a c d^3 + 8 c^2 d^3 - 4 c d^4 \right),$$

n =

$$\left(112 a^6 b - 357 a^4 b^3 - 45 a^2 b^5 + 618 a^5 b c - 1020 a^3 b^3 c - 126 a b^5 c + 1173 a^4 b c^2 - 945 a^2 b^3 c^2 - 72 b^5 c^2 + 936 a^3 b c^3 - 288 a b^3 c^3 + 270 a^2 b c^4 + 60 a^5 b d - 243 a^3 b^3 d - 18 a b^5 d + 475 a^4 b c d - 519 a^2 b^3 c d - 36 b^5 c d + 983 a^3 b c^2 d - 306 a b^3 c^2 d + 780 a^2 b c^3 d - 48 b^3 c^3 d + 216 a b c^4 d - 104 a^4 b d^2 - 30 a^2 b^3 d^2 - 285 a^3 b c d^2 - 18 a b^3 c d^2 - 324 a^2 b c^2 d^2 + 24 b^3 c^2 d^2 - 196 a b c^3 d^2 - 48 b c^4 d^2 - 60 a^3 b d^3 - 162 a^2 b c d^3 - 156 a b c^2 d^3 - 56 b c^3 d^3 - 8 a^2 b d^4 - 16 a b c d^4 - 8 b c^2 d^4) /$$

$$\left(-93 a^3 b^2 + 198 a b^4 + 18 a^4 c - 333 a^2 b^2 c + 72 b^4 c + 63 a^3 c^2 - 144 a b^2 c^2 + 27 a^2 c^3 - 111 a^2 b^2 d + 108 b^4 d + 15 a^3 c d - 456 a b^2 c d + 102 a^2 c^2 d - 168 b^2 c^2 d + 36 a c^3 d + 12 a b^2 d^2 - 13 a^2 c d^2 - 84 b^2 c d^2 + 52 a c^2 d^2 + 12 c^3 d^2 + 12 b^2 d^3 - 16 a c d^3 + 8 c^2 d^3 - 4 c d^4 \right),$$

$$p = -3 (a+c) (3 a+3 c+d).$$

Заметим, что почти все выражения имеют довольно неприглядный вид. Но их можно упростить, используя неприводимый полином из первого равенства (обозначим его e_0). Для этого выберем одну переменную (например, b), относительно которой будем упрощать, и какое-нибудь выражение (например, предпоследнее - обозначим его s), и выполним следующие действия.

e_0

$$27 b^4 (5 a + 4 c + 2 d) + a (a + 3 c - d)^2 (a + d) (7 a + 6 c + 2 d) - 3 b^2 (23 a^3 + 84 a^2 c + 54 a c^2 + 6 a^2 d + 63 a c d + 36 c^2 d - 9 a d^2 + 6 c d^2 - 2 d^3)$$

s

$$\begin{aligned} & (112 a^6 b - 357 a^4 b^3 - 45 a^2 b^5 + 618 a^5 b c - 1020 a^3 b^3 c - 126 a b^5 c + 1173 a^4 b c^2 - \\ & 945 a^2 b^3 c^2 - 72 b^5 c^2 + 936 a^3 b c^3 - 288 a b^3 c^3 + 270 a^2 b c^4 + 60 a^5 b d - 243 a^3 b^3 d - \\ & 18 a b^5 d + 475 a^4 b c d - 519 a^2 b^3 c d - 36 b^5 c d + 983 a^3 b c^2 d - 306 a b^3 c^2 d + \\ & 780 a^2 b c^3 d - 48 b^3 c^3 d + 216 a b c^4 d - 104 a^4 b d^2 - 30 a^2 b^3 d^2 - 285 a^3 b c d^2 - \\ & 18 a b^3 c d^2 - 324 a^2 b c^2 d^2 + 24 b^3 c^2 d^2 - 196 a b c^3 d^2 - 48 b c^4 d^2 - 60 a^3 b d^3 - \\ & 162 a^2 b c d^3 - 156 a b c^2 d^3 - 56 b c^3 d^3 - 8 a^2 b d^4 - 16 a b c d^4 - 8 b c^2 d^4) / \\ & (-93 a^3 b^2 + 198 a b^4 + 18 a^4 c - 333 a^2 b^2 c + 72 b^4 c + 63 a^3 c^2 - 144 a b^2 c^2 + \\ & 27 a^2 c^3 - 111 a^2 b^2 d + 108 b^4 d + 15 a^3 c d - 456 a b^2 c d + \\ & 102 a^2 c^2 d - 168 b^2 c^2 d + 36 a c^3 d + 12 a b^2 d^2 - 13 a^2 c d^2 - \\ & 84 b^2 c d^2 + 52 a c^2 d^2 + 12 c^3 d^2 + 12 b^2 d^3 - 16 a c d^3 + 8 c^2 d^3 - 4 c d^4) \end{aligned}$$

Представим s в таком виде : $s =$

$$\alpha_0 + \alpha_1 b + \alpha_2 b^2 + \alpha_3 b^3 \text{ (степень по } b \text{ будет на единицу меньше, чем в } e_0 \text{).}$$

$s - (\alpha_0 + \alpha_1 b + \alpha_2 b^2 + \alpha_3 b^3)$

$$\begin{aligned} & (112 a^6 b - 357 a^4 b^3 - 45 a^2 b^5 + 618 a^5 b c - 1020 a^3 b^3 c - 126 a b^5 c + 1173 a^4 b c^2 - \\ & 945 a^2 b^3 c^2 - 72 b^5 c^2 + 936 a^3 b c^3 - 288 a b^3 c^3 + 270 a^2 b c^4 + 60 a^5 b d - 243 a^3 b^3 d - \\ & 18 a b^5 d + 475 a^4 b c d - 519 a^2 b^3 c d - 36 b^5 c d + 983 a^3 b c^2 d - 306 a b^3 c^2 d + \\ & 780 a^2 b c^3 d - 48 b^3 c^3 d + 216 a b c^4 d - 104 a^4 b d^2 - 30 a^2 b^3 d^2 - 285 a^3 b c d^2 - \\ & 18 a b^3 c d^2 - 324 a^2 b c^2 d^2 + 24 b^3 c^2 d^2 - 196 a b c^3 d^2 - 48 b c^4 d^2 - 60 a^3 b d^3 - \\ & 162 a^2 b c d^3 - 156 a b c^2 d^3 - 56 b c^3 d^3 - 8 a^2 b d^4 - 16 a b c d^4 - 8 b c^2 d^4) / \\ & (-93 a^3 b^2 + 198 a b^4 + 18 a^4 c - 333 a^2 b^2 c + 72 b^4 c + 63 a^3 c^2 - 144 a b^2 c^2 + \\ & 27 a^2 c^3 - 111 a^2 b^2 d + 108 b^4 d + 15 a^3 c d - 456 a b^2 c d + 102 a^2 c^2 d - \\ & 168 b^2 c^2 d + 36 a c^3 d + 12 a b^2 d^2 - 13 a^2 c d^2 - 84 b^2 c d^2 + 52 a c^2 d^2 + \\ & 12 c^3 d^2 + 12 b^2 d^3 - 16 a c d^3 + 8 c^2 d^3 - 4 c d^4) - \alpha_0 - b \alpha_1 - b^2 \alpha_2 - b^3 \alpha_3 \end{aligned}$$

Это выражение равно нулю. Приведем его к общему знаменателю и отбросим этот знаменатель за ненужностью:

Factor[%]

$$\begin{aligned}
& (112 a^6 b - 357 a^4 b^3 - 45 a^2 b^5 + 618 a^5 b c - 1020 a^3 b^3 c - 126 a b^5 c + 1173 a^4 b c^2 - \\
& 945 a^2 b^3 c^2 - 72 b^5 c^2 + 936 a^3 b c^3 - 288 a b^3 c^3 + 270 a^2 b c^4 + 60 a^5 b d - 243 a^3 b^3 d - \\
& 18 a b^5 d + 475 a^4 b c d - 519 a^2 b^3 c d - 36 b^5 c d + 983 a^3 b c^2 d - 306 a b^3 c^2 d + \\
& 780 a^2 b c^3 d - 48 b^3 c^3 d + 216 a b c^4 d - 104 a^4 b d^2 - 30 a^2 b^3 d^2 - 285 a^3 b c d^2 - \\
& 18 a b^3 c d^2 - 324 a^2 b c^2 d^2 + 24 b^3 c^2 d^2 - 196 a b c^3 d^2 - 48 b c^4 d^2 - 60 a^3 b d^3 - \\
& 162 a^2 b c d^3 - 156 a b c^2 d^3 - 56 b c^3 d^3 - 8 a^2 b d^4 - 16 a b c d^4 - 8 b c^2 d^4 + 93 a^3 b^2 \alpha_0 - \\
& 198 a b^4 \alpha_0 - 18 a^4 c \alpha_0 + 333 a^2 b^2 c \alpha_0 - 72 b^4 c \alpha_0 - 63 a^3 c^2 \alpha_0 + 144 a b^2 c^2 \alpha_0 - \\
& 27 a^2 c^3 \alpha_0 + 111 a^2 b^2 d \alpha_0 - 108 b^4 d \alpha_0 - 15 a^3 c d \alpha_0 + 456 a b^2 c d \alpha_0 - 102 a^2 c^2 d \alpha_0 + \\
& 168 b^2 c^2 d \alpha_0 - 36 a c^3 d \alpha_0 - 12 a b^2 d^2 \alpha_0 + 13 a^2 c d^2 \alpha_0 + 84 b^2 c d^2 \alpha_0 - 52 a c^2 d^2 \alpha_0 - \\
& 12 c^3 d^2 \alpha_0 - 12 b^2 d^3 \alpha_0 + 16 a c d^3 \alpha_0 - 8 c^2 d^3 \alpha_0 + 4 c d^4 \alpha_0 + 93 a^3 b^3 \alpha_1 - 198 a b^5 \alpha_1 - \\
& 18 a^4 b c \alpha_1 + 333 a^2 b^3 c \alpha_1 - 72 b^5 c \alpha_1 - 63 a^3 b c^2 \alpha_1 + 144 a b^3 c^2 \alpha_1 - 27 a^2 b c^3 \alpha_1 + \\
& 111 a^2 b^3 d \alpha_1 - 108 b^5 d \alpha_1 - 15 a^3 b c d \alpha_1 + 456 a b^3 c d \alpha_1 - 102 a^2 b c^2 d \alpha_1 + \\
& 168 b^3 c^2 d \alpha_1 - 36 a b c^3 d \alpha_1 - 12 a b^3 d^2 \alpha_1 + 13 a^2 b c d^2 \alpha_1 + 84 b^3 c d^2 \alpha_1 - \\
& 52 a b c^2 d^2 \alpha_1 - 12 b c^3 d^2 \alpha_1 - 12 b^3 d^3 \alpha_1 + 16 a b c d^3 \alpha_1 - 8 b c^2 d^3 \alpha_1 + 4 b c d^4 \alpha_1 + \\
& 93 a^3 b^4 \alpha_2 - 198 a b^6 \alpha_2 - 18 a^4 b^2 c \alpha_2 + 333 a^2 b^4 c \alpha_2 - 72 b^6 c \alpha_2 - 63 a^3 b^2 c^2 \alpha_2 + \\
& 144 a b^4 c^2 \alpha_2 - 27 a^2 b^2 c^3 \alpha_2 + 111 a^2 b^4 d \alpha_2 - 108 b^6 d \alpha_2 - 15 a^3 b^2 c d \alpha_2 + \\
& 456 a b^4 c d \alpha_2 - 102 a^2 b^2 c^2 d \alpha_2 + 168 b^4 c^2 d \alpha_2 - 36 a b^2 c^3 d \alpha_2 - 12 a b^4 d^2 \alpha_2 + \\
& 13 a^2 b^2 c d^2 \alpha_2 + 84 b^4 c d^2 \alpha_2 - 52 a b^2 c^2 d^2 \alpha_2 - 12 b^2 c^3 d^2 \alpha_2 - 12 b^4 d^3 \alpha_2 + \\
& 16 a b^2 c d^3 \alpha_2 - 8 b^2 c^2 d^3 \alpha_2 + 4 b^2 c d^4 \alpha_2 + 93 a^3 b^5 \alpha_3 - 198 a b^7 \alpha_3 - 18 a^4 b^3 c \alpha_3 + \\
& 333 a^2 b^5 c \alpha_3 - 72 b^7 c \alpha_3 - 63 a^3 b^3 c^2 \alpha_3 + 144 a b^5 c^2 \alpha_3 - 27 a^2 b^3 c^3 \alpha_3 + 111 a^2 b^5 d \alpha_3 - \\
& 108 b^7 d \alpha_3 - 15 a^3 b^3 c d \alpha_3 + 456 a b^5 c d \alpha_3 - 102 a^2 b^3 c^2 d \alpha_3 + 168 b^5 c^2 d \alpha_3 - \\
& 36 a b^3 c^3 d \alpha_3 - 12 a b^5 d^2 \alpha_3 + 13 a^2 b^3 c d^2 \alpha_3 + 84 b^5 c d^2 \alpha_3 - 52 a b^3 c^2 d^2 \alpha_3 - \\
& 12 b^3 c^3 d^2 \alpha_3 - 12 b^5 d^3 \alpha_3 + 16 a b^3 c d^3 \alpha_3 - 8 b^3 c^2 d^3 \alpha_3 + 4 b^3 c d^4 \alpha_3) / \\
& (-93 a^3 b^2 + 198 a b^4 + 18 a^4 c - 333 a^2 b^2 c + 72 b^4 c + 63 a^3 c^2 - 144 a b^2 c^2 + \\
& 27 a^2 c^3 - 111 a^2 b^2 d + 108 b^4 d + 15 a^3 c d - 456 a b^2 c d + \\
& 102 a^2 c^2 d - 168 b^2 c^2 d + 36 a c^3 d + 12 a b^2 d^2 - 13 a^2 c d^2 - \\
& 84 b^2 c d^2 + 52 a c^2 d^2 + 12 c^3 d^2 + 12 b^2 d^3 - 16 a c d^3 + 8 c^2 d^3 - 4 c d^4)
\end{aligned}$$

Numerator [%]

$$\begin{aligned}
& 112 a^6 b - 357 a^4 b^3 - 45 a^2 b^5 + 618 a^5 b c - 1020 a^3 b^3 c - 126 a b^5 c + 1173 a^4 b c^2 - \\
& 945 a^2 b^3 c^2 - 72 b^5 c^2 + 936 a^3 b c^3 - 288 a b^3 c^3 + 270 a^2 b c^4 + 60 a^5 b d - 243 a^3 b^3 d - \\
& 18 a b^5 d + 475 a^4 b c d - 519 a^2 b^3 c d - 36 b^5 c d + 983 a^3 b c^2 d - 306 a b^3 c^2 d + 780 a^2 b c^3 d - \\
& 48 b^3 c^3 d + 216 a b c^4 d - 104 a^4 b d^2 - 30 a^2 b^3 d^2 - 285 a^3 b c d^2 - 18 a b^3 c d^2 - 324 a^2 b c^2 d^2 + \\
& 24 b^3 c^2 d^2 - 196 a b c^3 d^2 - 48 b c^4 d^2 - 60 a^3 b d^3 - 162 a^2 b c d^3 - 156 a b c^2 d^3 - 56 b c^3 d^3 - \\
& 8 a^2 b d^4 - 16 a b c d^4 - 8 b c^2 d^4 + 93 a^3 b^2 \alpha_0 - 198 a b^4 \alpha_0 - 18 a^4 c \alpha_0 + 333 a^2 b^2 c \alpha_0 - \\
& 72 b^4 c \alpha_0 - 63 a^3 c^2 \alpha_0 + 144 a b^2 c^2 \alpha_0 - 27 a^2 c^3 \alpha_0 + 111 a^2 b^2 d \alpha_0 - 108 b^4 d \alpha_0 - \\
& 15 a^3 c d \alpha_0 + 456 a b^2 c d \alpha_0 - 102 a^2 c^2 d \alpha_0 + 168 b^2 c^2 d \alpha_0 - 36 a c^3 d \alpha_0 - 12 a b^2 d^2 \alpha_0 + \\
& 13 a^2 c d^2 \alpha_0 + 84 b^2 c d^2 \alpha_0 - 52 a c^2 d^2 \alpha_0 - 12 c^3 d^2 \alpha_0 - 12 b^2 d^3 \alpha_0 + 16 a c d^3 \alpha_0 - \\
& 8 c^2 d^3 \alpha_0 + 4 c d^4 \alpha_0 + 93 a^3 b^3 \alpha_1 - 198 a b^5 \alpha_1 - 18 a^4 b c \alpha_1 + 333 a^2 b^3 c \alpha_1 - 72 b^5 c \alpha_1 - \\
& 63 a^3 b c^2 \alpha_1 + 144 a b^3 c^2 \alpha_1 - 27 a^2 b c^3 \alpha_1 + 111 a^2 b^3 d \alpha_1 - 108 b^5 d \alpha_1 - 15 a^3 b c d \alpha_1 + \\
& 456 a b^3 c d \alpha_1 - 102 a^2 b c^2 d \alpha_1 + 168 b^3 c^2 d \alpha_1 - 36 a b c^3 d \alpha_1 - 12 a b^3 d^2 \alpha_1 + \\
& 13 a^2 b c d^2 \alpha_1 + 84 b^3 c d^2 \alpha_1 - 52 a b c^2 d^2 \alpha_1 - 12 b c^3 d^2 \alpha_1 - 12 b^3 d^3 \alpha_1 + 16 a b c d^3 \alpha_1 - \\
& 8 b c^2 d^3 \alpha_1 + 4 b c d^4 \alpha_1 + 93 a^3 b^4 \alpha_2 - 198 a b^6 \alpha_2 - 18 a^4 b^2 c \alpha_2 + 333 a^2 b^4 c \alpha_2 - \\
& 72 b^6 c \alpha_2 - 63 a^3 b^2 c^2 \alpha_2 + 144 a b^4 c^2 \alpha_2 - 27 a^2 b^2 c^3 \alpha_2 + 111 a^2 b^4 d \alpha_2 - 108 b^6 d \alpha_2 - \\
& 15 a^3 b^2 c d \alpha_2 + 456 a b^4 c d \alpha_2 - 102 a^2 b^2 c^2 d \alpha_2 + 168 b^4 c^2 d \alpha_2 - 36 a b^2 c^3 d \alpha_2 - \\
& 12 a b^4 d^2 \alpha_2 + 13 a^2 b^2 c d^2 \alpha_2 + 84 b^4 c d^2 \alpha_2 - 52 a b^2 c^2 d^2 \alpha_2 - 12 b^2 c^3 d^2 \alpha_2 - \\
& 12 b^4 d^3 \alpha_2 + 16 a b^2 c d^3 \alpha_2 - 8 b^2 c^2 d^3 \alpha_2 + 4 b^2 c d^4 \alpha_2 + 93 a^3 b^5 \alpha_3 - 198 a b^7 \alpha_3 - \\
& 18 a^4 b^3 c \alpha_3 + 333 a^2 b^5 c \alpha_3 - 72 b^7 c \alpha_3 - 63 a^3 b^3 c^2 \alpha_3 + 144 a b^5 c^2 \alpha_3 - 27 a^2 b^3 c^3 \alpha_3 + \\
& 111 a^2 b^5 d \alpha_3 - 108 b^7 d \alpha_3 - 15 a^3 b^3 c d \alpha_3 + 456 a b^5 c d \alpha_3 - 102 a^2 b^3 c^2 d \alpha_3 + \\
& 168 b^5 c^2 d \alpha_3 - 36 a b^3 c^3 d \alpha_3 - 12 a b^5 d^2 \alpha_3 + 13 a^2 b^3 c d^2 \alpha_3 + 84 b^5 c d^2 \alpha_3 - \\
& 52 a b^3 c^2 d^2 \alpha_3 - 12 b^3 c^3 d^2 \alpha_3 - 12 b^5 d^3 \alpha_3 + 16 a b^3 c d^3 \alpha_3 - 8 b^3 c^2 d^3 \alpha_3 + 4 b^3 c d^4 \alpha_3
\end{aligned}$$

Разделим полученное выражение на e_0 и возьмем остаток :

PolynomialRemainder [%, e₀, b] // Factor

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{27 (5 a + 4 c + 2 d)^2} \\
& (77175 a^8 b - 256500 a^6 b^3 + 554580 a^7 b c - 1186650 a^5 b^3 c + 1574802 a^6 b c^2 - \\
& 2193885 a^4 b^3 c^2 + 2301444 a^5 b c^3 - 2024460 a^3 b^3 c^3 + 1842966 a^4 b c^4 - \\
& 931824 a^2 b^3 c^4 + 771120 a^3 b c^5 - 171072 a b^3 c^5 + 132192 a^2 b c^6 + 101115 a^7 b d - \\
& 373275 a^5 b^3 d + 776997 a^6 b c d - 1455030 a^4 b^3 c d + 2165634 a^5 b c^2 d - \\
& 2191968 a^3 b^3 c^2 d + 2960460 a^4 b c^3 d - 1561032 a^2 b^3 c^3 d + 2134188 a^3 b c^4 d - \\
& 502848 a b^3 c^4 d + 772416 a^2 b c^5 d - 51840 b^3 c^5 d + 108864 a b c^6 d - 28377 a^6 b d^2 - \\
& 189675 a^4 b^3 d^2 + 27171 a^5 b c d^2 - 579258 a^3 b^3 c d^2 + 263754 a^4 b c^2 d^2 - \\
& 642816 a^2 b^3 c^2 d^2 + 344304 a^3 b c^3 d^2 - 299376 a b^3 c^3 d^2 + 123768 a^2 b c^4 d^2 - \\
& 46656 b^3 c^4 d^2 - 32832 a b c^5 d^2 - 20736 b c^6 d^2 - 90855 a^5 b d^3 - 36882 a^3 b^3 d^3 - \\
& 332298 a^4 b c d^3 - 71604 a^2 b^3 c d^3 - 525312 a^3 b c^2 d^3 - 41472 a b^3 c^2 d^3 - \\
& 456696 a^2 b c^3 d^3 - 6048 b^3 c^3 d^3 - 218160 a b c^4 d^3 - 44928 b c^5 d^3 - 48006 a^4 b d^4 - \\
& 1188 a^2 b^3 d^4 - 162936 a^3 b c d^4 + 2376 a b^3 c d^4 - 219312 a^2 b c^2 d^4 + 3024 b^3 c^2 d^4 - \\
& 136800 a b c^3 d^4 - 32832 b c^4 d^4 - 10260 a^3 b d^5 + 216 a b^3 d^5 - 28440 a^2 b c d^5 + \\
& 432 b^3 c d^5 - 27936 a b c^2 d^5 - 9504 b c^3 d^5 - 792 a^2 b d^6 - 1584 a b c d^6 - 864 b c^2 d^6 + \\
& 6930 a^7 \alpha_0 - 5535 a^5 b^2 \alpha_0 + 43434 a^6 c \alpha_0 - 3753 a^4 b^2 c \alpha_0 + 93357 a^5 c^2 \alpha_0 + \\
& 26460 a^3 b^2 c^2 \alpha_0 + 87291 a^4 c^3 \alpha_0 + 40176 a^2 b^2 c^3 \alpha_0 + 34344 a^3 c^4 \alpha_0 + 15552 a b^2 c^4 \alpha_0 + \\
& 3888 a^2 c^5 \alpha_0 + 1602 a^6 d \alpha_0 + 42741 a^4 b^2 d \alpha_0 + 29295 a^5 c d \alpha_0 + 164214 a^3 b^2 c d \alpha_0 + \\
& 79128 a^4 c^2 d \alpha_0 + 248832 a^2 b^2 c^2 d \alpha_0 + 73332 a^3 c^3 d \alpha_0 + 168480 a b^2 c^3 d \alpha_0 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 22\,032 a^2 c^4 d \alpha_0 + 41\,472 b^2 c^4 d \alpha_0 - 12\,078 a^5 d^2 \alpha_0 + 56\,862 a^3 b^2 d^2 \alpha_0 - 46\,053 a^4 c d^2 \alpha_0 + \\
& 145\,476 a^2 b^2 c d^2 \alpha_0 - 64\,476 a^3 c^2 d^2 \alpha_0 + 130\,896 a b^2 c^2 d^2 \alpha_0 - 50\,760 a^2 c^3 d^2 \alpha_0 + \\
& 41\,472 b^2 c^3 d^2 \alpha_0 - 25\,056 a c^4 d^2 \alpha_0 - 5184 c^5 d^2 \alpha_0 - 4554 a^4 d^3 \alpha_0 + 24\,732 a^2 b^2 d^3 \alpha_0 - \\
& 32\,796 a^3 c d^3 \alpha_0 + 41\,256 a b^2 c d^3 \alpha_0 - 54\,072 a^2 c^2 d^3 \alpha_0 + 17\,280 b^2 c^2 d^3 \alpha_0 - \\
& 34\,992 a c^3 d^3 \alpha_0 - 8640 c^4 d^3 \alpha_0 + 4716 a^3 d^4 \alpha_0 + 3672 a b^2 d^4 \alpha_0 + 1944 a^2 c d^4 \alpha_0 + \\
& 3456 b^2 c d^4 \alpha_0 - 5472 a c^2 d^4 \alpha_0 - 3024 c^3 d^4 \alpha_0 + 2952 a^2 d^5 \alpha_0 + 3744 a c d^5 \alpha_0 + \\
& 864 c^2 d^5 \alpha_0 + 432 a d^6 \alpha_0 + 432 c d^6 \alpha_0 + 6930 a^7 b \alpha_1 - 5535 a^5 b^3 \alpha_1 + 43\,434 a^6 b c \alpha_1 - \\
& 3753 a^4 b^3 c \alpha_1 + 93\,357 a^5 b c^2 \alpha_1 + 26\,460 a^3 b^3 c^2 \alpha_1 + 87\,291 a^4 b c^3 \alpha_1 + 40\,176 a^2 b^3 c^3 \alpha_1 + \\
& 34\,344 a^3 b c^4 \alpha_1 + 15\,552 a b^3 c^4 \alpha_1 + 3888 a^2 b c^5 \alpha_1 + 1602 a^6 b d \alpha_1 + 42\,741 a^4 b^3 d \alpha_1 + \\
& 29\,295 a^5 b c d \alpha_1 + 164\,214 a^3 b^3 c d \alpha_1 + 79\,128 a^4 b c^2 d \alpha_1 + 248\,832 a^2 b^3 c^2 d \alpha_1 + \\
& 73\,332 a^3 b c^3 d \alpha_1 + 168\,480 a b^3 c^3 d \alpha_1 + 22\,032 a^2 b c^4 d \alpha_1 + 41\,472 b^3 c^4 d \alpha_1 - \\
& 12\,078 a^5 b d^2 \alpha_1 + 56\,862 a^3 b^3 d^2 \alpha_1 - 46\,053 a^4 b c d^2 \alpha_1 + 145\,476 a^2 b^3 c d^2 \alpha_1 - \\
& 64\,476 a^3 b c^2 d^2 \alpha_1 + 130\,896 a b^3 c^2 d^2 \alpha_1 - 50\,760 a^2 b c^3 d^2 \alpha_1 + 41\,472 b^3 c^3 d^2 \alpha_1 - \\
& 25\,056 a b c^4 d^2 \alpha_1 - 5184 b c^5 d^2 \alpha_1 - 4554 a^4 b d^3 \alpha_1 + 24\,732 a^2 b^3 d^3 \alpha_1 - \\
& 32\,796 a^3 b c d^3 \alpha_1 + 41\,256 a b^3 c d^3 \alpha_1 - 54\,072 a^2 b c^2 d^3 \alpha_1 + 17\,280 b^3 c^2 d^3 \alpha_1 - \\
& 34\,992 a b c^3 d^3 \alpha_1 - 8640 b c^4 d^3 \alpha_1 + 4716 a^3 b d^4 \alpha_1 + 3672 a b^3 d^4 \alpha_1 + 1944 a^2 b c d^4 \alpha_1 + \\
& 3456 b^3 c d^4 \alpha_1 - 5472 a b c^2 d^4 \alpha_1 - 3024 b c^3 d^4 \alpha_1 + 2952 a^2 b d^5 \alpha_1 + 3744 a b c d^5 \alpha_1 + \\
& 864 b c^2 d^5 \alpha_1 + 432 a b d^6 \alpha_1 + 432 b c d^6 \alpha_1 + 287 a^9 \alpha_2 + 4101 a^7 b^2 \alpha_2 + 1933 a^8 c \alpha_2 + \\
& 33\,447 a^6 b^2 c \alpha_2 + 2475 a^7 c^2 \alpha_2 + 101\,223 a^5 b^2 c^2 \alpha_2 - 8505 a^6 c^3 \alpha_2 + 146\,421 a^4 b^2 c^3 \alpha_2 - \\
& 26\,190 a^5 c^4 \alpha_2 + 101\,736 a^3 b^2 c^4 \alpha_2 - 24\,624 a^4 c^5 \alpha_2 + 27\,216 a^2 b^2 c^5 \alpha_2 - 7776 a^3 c^6 \alpha_2 - \\
& 2536 a^8 d \alpha_2 + 23\,841 a^6 b^2 d \alpha_2 - 22\,349 a^7 c d \alpha_2 + 170\,964 a^5 b^2 c d \alpha_2 - 81\,276 a^6 c^2 d \alpha_2 + \\
& 441\,495 a^4 b^2 c^2 d \alpha_2 - 161\,529 a^5 c^3 d \alpha_2 + 546\,840 a^3 b^2 c^3 d \alpha_2 - 186\,102 a^4 c^4 d \alpha_2 + \\
& 330\,048 a^2 b^2 c^4 d \alpha_2 - 114\,480 a^3 c^5 d \alpha_2 + 77\,760 a b^2 c^5 d \alpha_2 - 28\,512 a^2 c^6 d \alpha_2 - \\
& 720 a^7 d^2 \alpha_2 + 14\,895 a^5 b^2 d^2 \alpha_2 - 16\,281 a^6 c d^2 \alpha_2 + 137\,943 a^4 b^2 c d^2 \alpha_2 - \\
& 78\,711 a^5 c^2 d^2 \alpha_2 + 341\,550 a^3 b^2 c^2 d^2 \alpha_2 - 159\,396 a^4 c^3 d^2 \alpha_2 + 372\,816 a^2 b^2 c^3 d^2 \alpha_2 - \\
& 169\,056 a^3 c^4 d^2 \alpha_2 + 190\,080 a b^2 c^4 d^2 \alpha_2 - 93\,312 a^2 c^5 d^2 \alpha_2 + 36\,288 b^2 c^5 d^2 \alpha_2 - \\
& 20\,736 a c^6 d^2 \alpha_2 + 41\,666 a^6 d^3 \alpha_2 - 3423 a^4 b^2 d^3 \alpha_2 + 21\,145 a^5 c d^3 \alpha_2 + 31\,980 a^3 b^2 c d^3 \alpha_2 + \\
& 24\,660 a^4 c^2 d^3 \alpha_2 + 84\,780 a^2 b^2 c^2 d^3 \alpha_2 + 4716 a^3 c^3 d^3 \alpha_2 + 69\,120 a b^2 c^3 d^3 \alpha_2 - \\
& 6840 a^2 c^4 d^3 \alpha_2 + 19\,008 b^2 c^4 d^3 \alpha_2 - 3456 a c^5 d^3 \alpha_2 + 1349 a^5 d^4 \alpha_2 - 3834 a^3 b^2 d^4 \alpha_2 + \\
& 15\,196 a^4 c d^4 \alpha_2 + 2808 a^2 b^2 c d^4 \alpha_2 + 23\,748 a^3 c^2 d^4 \alpha_2 + 11\,160 a b^2 c^2 d^4 \alpha_2 + \\
& 12\,624 a^2 c^3 d^4 \alpha_2 + 5040 b^2 c^3 d^4 \alpha_2 + 2304 a c^4 d^4 \alpha_2 - 1494 a^4 d^5 \alpha_2 - 612 a^2 b^2 d^5 \alpha_2 + \\
& 1332 a^3 c d^5 \alpha_2 + 432 a b^2 c d^5 \alpha_2 + 4128 a^2 c^2 d^5 \alpha_2 + 864 b^2 c^2 d^5 \alpha_2 + 1536 a c^3 d^5 \alpha_2 - \\
& 916 a^3 d^6 \alpha_2 + 24 a b^2 d^6 \alpha_2 - 848 a^2 c d^6 \alpha_2 + 48 b^2 c d^6 \alpha_2 - 136 a^2 d^7 \alpha_2 - 128 a c d^7 \alpha_2 + \\
& 287 a^9 b \alpha_3 + 4101 a^7 b^3 \alpha_3 + 1933 a^8 b c \alpha_3 + 33\,447 a^6 b^3 c \alpha_3 + 2475 a^7 b c^2 \alpha_3 + \\
& 101\,223 a^5 b^3 c^2 \alpha_3 - 8505 a^6 b c^3 \alpha_3 + 146\,421 a^4 b^3 c^3 \alpha_3 - 26\,190 a^5 b c^4 \alpha_3 + \\
& 101\,736 a^3 b^3 c^4 \alpha_3 - 24\,624 a^4 b c^5 \alpha_3 + 27\,216 a^2 b^3 c^5 \alpha_3 - 7776 a^3 b c^6 \alpha_3 - \\
& 2536 a^8 b d \alpha_3 + 23\,841 a^6 b^3 d \alpha_3 - 22\,349 a^7 b c d \alpha_3 + 170\,964 a^5 b^3 c d \alpha_3 - \\
& 81\,276 a^6 b c^2 d \alpha_3 + 441\,495 a^4 b^3 c^2 d \alpha_3 - 161\,529 a^5 b c^3 d \alpha_3 + 546\,840 a^3 b^3 c^3 d \alpha_3 - \\
& 186\,102 a^4 b c^4 d \alpha_3 + 330\,048 a^2 b^3 c^4 d \alpha_3 - 114\,480 a^3 b c^5 d \alpha_3 + 77\,760 a b^3 c^5 d \alpha_3 - \\
& 28\,512 a^2 b c^6 d \alpha_3 - 720 a^7 b d^2 \alpha_3 + 14\,895 a^5 b^3 d^2 \alpha_3 - 16\,281 a^6 b c d^2 \alpha_3 + \\
& 137\,943 a^4 b^3 c d^2 \alpha_3 - 78\,711 a^5 b c^2 d^2 \alpha_3 + 341\,550 a^3 b^3 c^2 d^2 \alpha_3 - 159\,396 a^4 b c^3 d^2 \alpha_3 + \\
& 372\,816 a^2 b^3 c^3 d^2 \alpha_3 - 169\,056 a^3 b c^4 d^2 \alpha_3 + 190\,080 a b^3 c^4 d^2 \alpha_3 - 93\,312 a^2 b c^5 d^2 \alpha_3 + \\
& 36\,288 b^3 c^5 d^2 \alpha_3 - 20\,736 a b c^6 d^2 \alpha_3 + 41\,666 a^6 b d^3 \alpha_3 - 3423 a^4 b^3 d^3 \alpha_3 + \\
& 21\,145 a^5 b c d^3 \alpha_3 + 31\,980 a^3 b^3 c d^3 \alpha_3 + 24\,660 a^4 b c^2 d^3 \alpha_3 + 84\,780 a^2 b^3 c^2 d^3 \alpha_3 + \\
& 4716 a^3 b c^3 d^3 \alpha_3 + 69\,120 a b^3 c^3 d^3 \alpha_3 - 6840 a^2 b c^4 d^3 \alpha_3 + 19\,008 b^3 c^4 d^3 \alpha_3 - \\
& 3456 a b c^5 d^3 \alpha_3 + 1349 a^5 b d^4 \alpha_3 - 3834 a^3 b^3 d^4 \alpha_3 + 15\,196 a^4 b c d^4 \alpha_3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2808 a^2 b^3 c d^4 \alpha_3 + 23\,748 a^3 b c^2 d^4 \alpha_3 + 11\,160 a b^3 c^2 d^4 \alpha_3 + 12\,624 a^2 b c^3 d^4 \alpha_3 + \\
& 5040 b^3 c^3 d^4 \alpha_3 + 2304 a b c^4 d^4 \alpha_3 - 1494 a^4 b d^5 \alpha_3 - 612 a^2 b^3 d^5 \alpha_3 + 1332 a^3 b c d^5 \alpha_3 + \\
& 432 a b^3 c d^5 \alpha_3 + 4128 a^2 b c^2 d^5 \alpha_3 + 864 b^3 c^2 d^5 \alpha_3 + 1536 a b c^3 d^5 \alpha_3 - 916 a^3 b d^6 \alpha_3 + \\
& 24 a b^3 d^6 \alpha_3 - 848 a^2 b c d^6 \alpha_3 + 48 b^3 c d^6 \alpha_3 - 136 a^2 b d^7 \alpha_3 - 128 a b c d^7 \alpha_3)
\end{aligned}$$

Numerator[%]

$$\begin{aligned}
& 77\,175 a^8 b - 256\,500 a^6 b^3 + 554\,580 a^7 b c - 1\,186\,650 a^5 b^3 c + 1\,574\,802 a^6 b c^2 - \\
& 2\,193\,885 a^4 b^3 c^2 + 2\,301\,444 a^5 b c^3 - 2\,024\,460 a^3 b^3 c^3 + 1\,842\,966 a^4 b c^4 - 931\,824 a^2 b^3 c^4 + \\
& 771\,120 a^3 b c^5 - 171\,072 a b^3 c^5 + 132\,192 a^2 b c^6 + 101\,115 a^7 b d - 373\,275 a^5 b^3 d + \\
& 776\,997 a^6 b c d - 1\,455\,030 a^4 b^3 c d + 2\,165\,634 a^5 b c^2 d - 2\,191\,968 a^3 b^3 c^2 d + \\
& 2\,960\,460 a^4 b c^3 d - 1\,561\,032 a^2 b^3 c^3 d + 2\,134\,188 a^3 b c^4 d - 502\,848 a b^3 c^4 d + \\
& 772\,416 a^2 b c^5 d - 51\,840 b^3 c^5 d + 108\,864 a b c^6 d - 28\,377 a^6 b d^2 - 189\,675 a^4 b^3 d^2 + \\
& 27\,171 a^5 b c d^2 - 579\,258 a^3 b^3 c d^2 + 263\,754 a^4 b c^2 d^2 - 642\,816 a^2 b^3 c^2 d^2 + \\
& 344\,304 a^3 b c^3 d^2 - 299\,376 a b^3 c^3 d^2 + 123\,768 a^2 b c^4 d^2 - 46\,656 b^3 c^4 d^2 - 32\,832 a b c^5 d^2 - \\
& 20\,736 b c^6 d^2 - 90\,855 a^5 b d^3 - 36\,882 a^3 b^3 d^3 - 332\,298 a^4 b c d^3 - 71\,604 a^2 b^3 c d^3 - \\
& 525\,312 a^3 b c^2 d^3 - 41\,472 a b^3 c^2 d^3 - 456\,696 a^2 b c^3 d^3 - 6048 b^3 c^3 d^3 - 218\,160 a b c^4 d^3 - \\
& 44\,928 b c^5 d^3 - 48\,006 a^4 b d^4 - 1188 a^2 b^3 d^4 - 162\,936 a^3 b c d^4 + 2376 a b^3 c d^4 - \\
& 219\,312 a^2 b c^2 d^4 + 3024 b^3 c^2 d^4 - 136\,800 a b c^3 d^4 - 32\,832 b c^4 d^4 - 10\,260 a^3 b d^5 + \\
& 216 a b^3 d^5 - 28\,440 a^2 b c d^5 + 432 b^3 c d^5 - 27\,936 a b c^2 d^5 - 9504 b c^3 d^5 - 792 a^2 b d^6 - \\
& 1584 a b c d^6 - 864 b c^2 d^6 + 6930 a^7 \alpha_0 - 5535 a^5 b^2 \alpha_0 + 43\,434 a^6 c \alpha_0 - 3753 a^4 b^2 c \alpha_0 + \\
& 93\,357 a^5 c^2 \alpha_0 + 26\,460 a^3 b^2 c^2 \alpha_0 + 87\,291 a^4 c^3 \alpha_0 + 40\,176 a^2 b^2 c^3 \alpha_0 + 34\,344 a^3 c^4 \alpha_0 + \\
& 15\,552 a b^2 c^4 \alpha_0 + 3888 a^2 c^5 \alpha_0 + 1602 a^6 d \alpha_0 + 42\,741 a^4 b^2 d \alpha_0 + 29\,295 a^5 c d \alpha_0 + \\
& 164\,214 a^3 b^2 c d \alpha_0 + 79\,128 a^4 c^2 d \alpha_0 + 248\,832 a^2 b^2 c^2 d \alpha_0 + 73\,332 a^3 c^3 d \alpha_0 + \\
& 168\,480 a b^2 c^3 d \alpha_0 + 22\,032 a^2 c^4 d \alpha_0 + 41\,472 b^2 c^4 d \alpha_0 - 12\,078 a^5 d^2 \alpha_0 + 56\,862 a^3 b^2 d^2 \alpha_0 - \\
& 46\,053 a^4 c d^2 \alpha_0 + 145\,476 a^2 b^2 c d^2 \alpha_0 - 64\,476 a^3 c^2 d^2 \alpha_0 + 130\,896 a b^2 c^2 d^2 \alpha_0 - \\
& 50\,760 a^2 c^3 d^2 \alpha_0 + 41\,472 b^2 c^3 d^2 \alpha_0 - 25\,056 a c^4 d^2 \alpha_0 - 5184 c^5 d^2 \alpha_0 - 4554 a^4 d^3 \alpha_0 + \\
& 24\,732 a^2 b^2 d^3 \alpha_0 - 32\,796 a^3 c d^3 \alpha_0 + 41\,256 a b^2 c d^3 \alpha_0 - 54\,072 a^2 c^2 d^3 \alpha_0 + \\
& 17\,280 b^2 c^2 d^3 \alpha_0 - 34\,992 a c^3 d^3 \alpha_0 - 8640 c^4 d^3 \alpha_0 + 4716 a^3 d^4 \alpha_0 + 3672 a b^2 d^4 \alpha_0 + \\
& 1944 a^2 c d^4 \alpha_0 + 3456 b^2 c d^4 \alpha_0 - 5472 a c^2 d^4 \alpha_0 - 3024 c^3 d^4 \alpha_0 + 2952 a^2 d^5 \alpha_0 + \\
& 3744 a c d^5 \alpha_0 + 864 c^2 d^5 \alpha_0 + 432 a d^6 \alpha_0 + 432 c d^6 \alpha_0 + 6930 a^7 b \alpha_1 - 5535 a^5 b^3 \alpha_1 + \\
& 43\,434 a^6 b c \alpha_1 - 3753 a^4 b^3 c \alpha_1 + 93\,357 a^5 b c^2 \alpha_1 + 26\,460 a^3 b^3 c^2 \alpha_1 + 87\,291 a^4 b c^3 \alpha_1 + \\
& 40\,176 a^2 b^3 c^3 \alpha_1 + 34\,344 a^3 b c^4 \alpha_1 + 15\,552 a b^3 c^4 \alpha_1 + 3888 a^2 b c^5 \alpha_1 + 1602 a^6 b d \alpha_1 + \\
& 42\,741 a^4 b^3 d \alpha_1 + 29\,295 a^5 b c d \alpha_1 + 164\,214 a^3 b^3 c d \alpha_1 + 79\,128 a^4 b c^2 d \alpha_1 + \\
& 248\,832 a^2 b^3 c^2 d \alpha_1 + 73\,332 a^3 b c^3 d \alpha_1 + 168\,480 a b^3 c^3 d \alpha_1 + 22\,032 a^2 b c^4 d \alpha_1 + \\
& 41\,472 b^3 c^4 d \alpha_1 - 12\,078 a^5 b d^2 \alpha_1 + 56\,862 a^3 b^3 d^2 \alpha_1 - 46\,053 a^4 b c d^2 \alpha_1 + \\
& 145\,476 a^2 b^3 c d^2 \alpha_1 - 64\,476 a^3 b c^2 d^2 \alpha_1 + 130\,896 a b^3 c^2 d^2 \alpha_1 - 50\,760 a^2 b c^3 d^2 \alpha_1 + \\
& 41\,472 b^3 c^3 d^2 \alpha_1 - 25\,056 a b c^4 d^2 \alpha_1 - 5184 b c^5 d^2 \alpha_1 - 4554 a^4 b d^3 \alpha_1 + 24\,732 a^2 b^3 d^3 \alpha_1 - \\
& 32\,796 a^3 b c d^3 \alpha_1 + 41\,256 a b^3 c d^3 \alpha_1 - 54\,072 a^2 b c^2 d^3 \alpha_1 + 17\,280 b^3 c^2 d^3 \alpha_1 - \\
& 34\,992 a b c^3 d^3 \alpha_1 - 8640 b c^4 d^3 \alpha_1 + 4716 a^3 b d^4 \alpha_1 + 3672 a b^3 d^4 \alpha_1 + 1944 a^2 b c d^4 \alpha_1 + \\
& 3456 b^3 c d^4 \alpha_1 - 5472 a b c^2 d^4 \alpha_1 - 3024 b c^3 d^4 \alpha_1 + 2952 a^2 b d^5 \alpha_1 + 3744 a b c d^5 \alpha_1 + \\
& 864 b c^2 d^5 \alpha_1 + 432 a b d^6 \alpha_1 + 432 b c d^6 \alpha_1 + 287 a^9 \alpha_2 + 4101 a^7 b^2 \alpha_2 + 1933 a^8 c \alpha_2 + \\
& 33\,447 a^6 b^2 c \alpha_2 + 2475 a^7 c^2 \alpha_2 + 101\,223 a^5 b^2 c^2 \alpha_2 - 8505 a^6 c^3 \alpha_2 + 146\,421 a^4 b^2 c^3 \alpha_2 - \\
& 26\,190 a^5 c^4 \alpha_2 + 101\,736 a^3 b^2 c^4 \alpha_2 - 24\,624 a^4 c^5 \alpha_2 + 27\,216 a^2 b^2 c^5 \alpha_2 - 7776 a^3 c^6 \alpha_2 - \\
& 2536 a^8 d \alpha_2 + 23\,841 a^6 b^2 d \alpha_2 - 22\,349 a^7 c d \alpha_2 + 170\,964 a^5 b^2 c d \alpha_2 - 81\,276 a^6 c^2 d \alpha_2 + \\
& 441\,495 a^4 b^2 c^2 d \alpha_2 - 161\,529 a^5 c^3 d \alpha_2 + 546\,840 a^3 b^2 c^3 d \alpha_2 - 186\,102 a^4 c^4 d \alpha_2 + \\
& 330\,048 a^2 b^2 c^4 d \alpha_2 - 114\,480 a^3 c^5 d \alpha_2 + 77\,760 a b^2 c^5 d \alpha_2 - 28\,512 a^2 c^6 d \alpha_2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 720 a^7 d^2 \alpha_2 + 14 895 a^5 b^2 d^2 \alpha_2 - 16 281 a^6 c d^2 \alpha_2 + 137 943 a^4 b^2 c d^2 \alpha_2 - 78 711 a^5 c^2 d^2 \alpha_2 + \\
& 341 550 a^3 b^2 c^2 d^2 \alpha_2 - 159 396 a^4 c^3 d^2 \alpha_2 + 372 816 a^2 b^2 c^3 d^2 \alpha_2 - 169 056 a^3 c^4 d^2 \alpha_2 + \\
& 190 080 a b^2 c^4 d^2 \alpha_2 - 93 312 a^2 c^5 d^2 \alpha_2 + 36 288 b^2 c^5 d^2 \alpha_2 - 20 736 a c^6 d^2 \alpha_2 + \\
& 4166 a^6 d^3 \alpha_2 - 3423 a^4 b^2 d^3 \alpha_2 + 21 145 a^5 c d^3 \alpha_2 + 31 980 a^3 b^2 c d^3 \alpha_2 + 24 660 a^4 c^2 d^3 \alpha_2 + \\
& 84 780 a^2 b^2 c^2 d^3 \alpha_2 + 4716 a^3 c^3 d^3 \alpha_2 + 69 120 a b^2 c^3 d^3 \alpha_2 - 6840 a^2 c^4 d^3 \alpha_2 + \\
& 19 008 b^2 c^4 d^3 \alpha_2 - 3456 a c^5 d^3 \alpha_2 + 1349 a^5 d^4 \alpha_2 - 3834 a^3 b^2 d^4 \alpha_2 + 15 196 a^4 c d^4 \alpha_2 + \\
& 2808 a^2 b^2 c d^4 \alpha_2 + 23 748 a^3 c^2 d^4 \alpha_2 + 11 160 a b^2 c^2 d^4 \alpha_2 + 12 624 a^2 c^3 d^4 \alpha_2 + \\
& 5040 b^2 c^3 d^4 \alpha_2 + 2304 a c^4 d^4 \alpha_2 - 1494 a^4 d^5 \alpha_2 - 612 a^2 b^2 d^5 \alpha_2 + 1332 a^3 c d^5 \alpha_2 + \\
& 432 a b^2 c d^5 \alpha_2 + 4128 a^2 c^2 d^5 \alpha_2 + 864 b^2 c^2 d^5 \alpha_2 + 1536 a c^3 d^5 \alpha_2 - 916 a^3 d^6 \alpha_2 + \\
& 24 a b^2 d^6 \alpha_2 - 848 a^2 c d^6 \alpha_2 + 48 b^2 c d^6 \alpha_2 - 136 a^2 d^7 \alpha_2 - 128 a c d^7 \alpha_2 + 287 a^9 b \alpha_3 + \\
& 4101 a^7 b^3 \alpha_3 + 1933 a^8 b c \alpha_3 + 33 447 a^6 b^3 c \alpha_3 + 2475 a^7 b c^2 \alpha_3 + 101 223 a^5 b^3 c^2 \alpha_3 - \\
& 8505 a^6 b c^3 \alpha_3 + 146 421 a^4 b^3 c^3 \alpha_3 - 26 190 a^5 b c^4 \alpha_3 + 101 736 a^3 b^3 c^4 \alpha_3 - \\
& 24 624 a^4 b c^5 \alpha_3 + 27 216 a^2 b^3 c^5 \alpha_3 - 7776 a^3 b c^6 \alpha_3 - 2536 a^8 b d \alpha_3 + 23 841 a^6 b^3 d \alpha_3 - \\
& 22 349 a^7 b c d \alpha_3 + 170 964 a^5 b^3 c d \alpha_3 - 81 276 a^6 b c^2 d \alpha_3 + 441 495 a^4 b^3 c^2 d \alpha_3 - \\
& 161 529 a^5 b c^3 d \alpha_3 + 546 840 a^3 b^3 c^3 d \alpha_3 - 186 102 a^4 b c^4 d \alpha_3 + 330 048 a^2 b^3 c^4 d \alpha_3 - \\
& 114 480 a^3 b c^5 d \alpha_3 + 77 760 a b^3 c^5 d \alpha_3 - 28 512 a^2 b c^6 d \alpha_3 - 720 a^7 b d^2 \alpha_3 + \\
& 14 895 a^5 b^3 d^2 \alpha_3 - 16 281 a^6 b c d^2 \alpha_3 + 137 943 a^4 b^3 c d^2 \alpha_3 - 78 711 a^5 b c^2 d^2 \alpha_3 + \\
& 341 550 a^3 b^3 c^2 d^2 \alpha_3 - 159 396 a^4 b c^3 d^2 \alpha_3 + 372 816 a^2 b^3 c^3 d^2 \alpha_3 - 169 056 a^3 b c^4 d^2 \alpha_3 + \\
& 190 080 a b^3 c^4 d^2 \alpha_3 - 93 312 a^2 b c^5 d^2 \alpha_3 + 36 288 b^3 c^5 d^2 \alpha_3 - 20 736 a b c^6 d^2 \alpha_3 + \\
& 4166 a^6 b d^3 \alpha_3 - 3423 a^4 b^3 d^3 \alpha_3 + 21 145 a^5 b c d^3 \alpha_3 + 31 980 a^3 b^3 c d^3 \alpha_3 + \\
& 24 660 a^4 b c^2 d^3 \alpha_3 + 84 780 a^2 b^3 c^2 d^3 \alpha_3 + 4716 a^3 b c^3 d^3 \alpha_3 + 69 120 a b^3 c^3 d^3 \alpha_3 - \\
& 6840 a^2 b c^4 d^3 \alpha_3 + 19 008 b^3 c^4 d^3 \alpha_3 - 3456 a b c^5 d^3 \alpha_3 + 1349 a^5 b d^4 \alpha_3 - 3834 a^3 b^3 d^4 \alpha_3 + \\
& 15 196 a^4 b c d^4 \alpha_3 + 2808 a^2 b^3 c d^4 \alpha_3 + 23 748 a^3 b c^2 d^4 \alpha_3 + 11 160 a b^3 c^2 d^4 \alpha_3 + \\
& 12 624 a^2 b c^3 d^4 \alpha_3 + 5040 b^3 c^3 d^4 \alpha_3 + 2304 a b c^4 d^4 \alpha_3 - 1494 a^4 b d^5 \alpha_3 - 612 a^2 b^3 d^5 \alpha_3 + \\
& 1332 a^3 b c d^5 \alpha_3 + 432 a b^3 c d^5 \alpha_3 + 4128 a^2 b c^2 d^5 \alpha_3 + 864 b^3 c^2 d^5 \alpha_3 + 1536 a b c^3 d^5 \alpha_3 - \\
& 916 a^3 b d^6 \alpha_3 + 24 a b^3 d^6 \alpha_3 - 848 a^2 b c d^6 \alpha_3 + 48 b^3 c d^6 \alpha_3 - 136 a^2 b d^7 \alpha_3 - 128 a b c d^7 \alpha_3
\end{aligned}$$

Этот полином равен нулю. Представим его в виде полинома от b с коэффициентами-полиномами от всех остальных переменных. Эти коэффициенты равны нулю. Составим из них систему уравнений.

CoefficientList[%, b]

$$\begin{aligned}
& \{ 6930 a^7 \alpha_0 + 43 434 a^6 c \alpha_0 + 93 357 a^5 c^2 \alpha_0 + 87 291 a^4 c^3 \alpha_0 + 34 344 a^3 c^4 \alpha_0 + 3888 a^2 c^5 \alpha_0 + \\
& 1602 a^6 d \alpha_0 + 29 295 a^5 c d \alpha_0 + 79 128 a^4 c^2 d \alpha_0 + 73 332 a^3 c^3 d \alpha_0 + 22 032 a^2 c^4 d \alpha_0 - \\
& 12 078 a^5 d^2 \alpha_0 - 46 053 a^4 c d^2 \alpha_0 - 64 476 a^3 c^2 d^2 \alpha_0 - 50 760 a^2 c^3 d^2 \alpha_0 - \\
& 25 056 a c^4 d^2 \alpha_0 - 5184 c^5 d^2 \alpha_0 - 4554 a^4 d^3 \alpha_0 - 32 796 a^3 c d^3 \alpha_0 - 54 072 a^2 c^2 d^3 \alpha_0 - \\
& 34 992 a c^3 d^3 \alpha_0 - 8640 c^4 d^3 \alpha_0 + 4716 a^3 d^4 \alpha_0 + 1944 a^2 c d^4 \alpha_0 - 5472 a c^2 d^4 \alpha_0 - \\
& 3024 c^3 d^4 \alpha_0 + 2952 a^2 d^5 \alpha_0 + 3744 a c d^5 \alpha_0 + 864 c^2 d^5 \alpha_0 + 432 a d^6 \alpha_0 + 432 c d^6 \alpha_0 + \\
& 287 a^9 \alpha_2 + 1933 a^8 c \alpha_2 + 2475 a^7 c^2 \alpha_2 - 8505 a^6 c^3 \alpha_2 - 26 190 a^5 c^4 \alpha_2 - 24 624 a^4 c^5 \alpha_2 - \\
& 7776 a^3 c^6 \alpha_2 - 2536 a^8 d \alpha_2 - 22 349 a^7 c d \alpha_2 - 81 276 a^6 c^2 d \alpha_2 - 161 529 a^5 c^3 d \alpha_2 - \\
& 186 102 a^4 c^4 d \alpha_2 - 114 480 a^3 c^5 d \alpha_2 - 28 512 a^2 c^6 d \alpha_2 - 720 a^7 d^2 \alpha_2 - 16 281 a^6 c d^2 \alpha_2 - \\
& 78 711 a^5 c^2 d^2 \alpha_2 - 159 396 a^4 c^3 d^2 \alpha_2 - 169 056 a^3 c^4 d^2 \alpha_2 - 93 312 a^2 c^5 d^2 \alpha_2 - \\
& 20 736 a c^6 d^2 \alpha_2 + 4166 a^6 d^3 \alpha_2 + 21 145 a^5 c d^3 \alpha_2 + 24 660 a^4 c^2 d^3 \alpha_2 + 4716 a^3 c^3 d^3 \alpha_2 - \\
& 6840 a^2 c^4 d^3 \alpha_2 - 3456 a c^5 d^3 \alpha_2 + 1349 a^5 d^4 \alpha_2 + 15 196 a^4 c d^4 \alpha_2 + 23 748 a^3 c^2 d^4 \alpha_2 + \\
& 12 624 a^2 c^3 d^4 \alpha_2 + 2304 a c^4 d^4 \alpha_2 - 1494 a^4 d^5 \alpha_2 + 1332 a^3 c d^5 \alpha_2 + 4128 a^2 c^2 d^5 \alpha_2 + \\
& 1536 a c^3 d^5 \alpha_2 - 916 a^3 d^6 \alpha_2 - 848 a^2 c d^6 \alpha_2 - 136 a^2 d^7 \alpha_2 - 128 a c d^7 \alpha_2, \\
& 77 175 a^8 + 554 580 a^7 c + 1 574 802 a^6 c^2 + 2 301 444 a^5 c^3 + 1 842 966 a^4 c^4 + 771 120 a^3 c^5 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 132\,192 a^2 c^6 + 101\,115 a^7 d + 776\,997 a^6 c d + 2\,165\,634 a^5 c^2 d + 2\,960\,460 a^4 c^3 d + \\
& 2\,134\,188 a^3 c^4 d + 772\,416 a^2 c^5 d + 108\,864 a c^6 d - 28\,377 a^6 d^2 + 27\,171 a^5 c d^2 + \\
& 263\,754 a^4 c^2 d^2 + 344\,304 a^3 c^3 d^2 + 123\,768 a^2 c^4 d^2 - 32\,832 a c^5 d^2 - 20\,736 c^6 d^2 - \\
& 90\,855 a^5 d^3 - 332\,298 a^4 c d^3 - 525\,312 a^3 c^2 d^3 - 456\,696 a^2 c^3 d^3 - 218\,160 a c^4 d^3 - \\
& 44\,928 c^5 d^3 - 48\,006 a^4 d^4 - 162\,936 a^3 c d^4 - 219\,312 a^2 c^2 d^4 - 136\,800 a c^3 d^4 - \\
& 32\,832 c^4 d^4 - 10\,260 a^3 d^5 - 28\,440 a^2 c d^5 - 27\,936 a c^2 d^5 - 9\,504 c^3 d^5 - 792 a^2 d^6 - \\
& 1\,584 a c d^6 - 864 c^2 d^6 + 6930 a^7 \alpha_1 + 43\,434 a^6 c \alpha_1 + 93\,357 a^5 c^2 \alpha_1 + 87\,291 a^4 c^3 \alpha_1 + \\
& 34\,344 a^3 c^4 \alpha_1 + 3888 a^2 c^5 \alpha_1 + 1602 a^6 d \alpha_1 + 29\,295 a^5 c d \alpha_1 + 79\,128 a^4 c^2 d \alpha_1 + \\
& 73\,332 a^3 c^3 d \alpha_1 + 22\,032 a^2 c^4 d \alpha_1 - 12\,078 a^5 d^2 \alpha_1 - 46\,053 a^4 c d^2 \alpha_1 - 64\,476 a^3 c^2 d^2 \alpha_1 - \\
& 50\,760 a^2 c^3 d^2 \alpha_1 - 25\,056 a c^4 d^2 \alpha_1 - 5184 c^5 d^2 \alpha_1 - 4554 a^4 d^3 \alpha_1 - 32\,796 a^3 c d^3 \alpha_1 - \\
& 54\,072 a^2 c^2 d^3 \alpha_1 - 34\,992 a c^3 d^3 \alpha_1 - 8640 c^4 d^3 \alpha_1 + 4716 a^3 d^4 \alpha_1 + 1944 a^2 c d^4 \alpha_1 - \\
& 5472 a c^2 d^4 \alpha_1 - 3024 c^3 d^4 \alpha_1 + 2952 a^2 d^5 \alpha_1 + 3744 a c d^5 \alpha_1 + 864 c^2 d^5 \alpha_1 + 432 a d^6 \alpha_1 + \\
& 432 c d^6 \alpha_1 + 287 a^9 \alpha_3 + 1933 a^8 c \alpha_3 + 2475 a^7 c^2 \alpha_3 - 8505 a^6 c^3 \alpha_3 - 26\,190 a^5 c^4 \alpha_3 - \\
& 24\,624 a^4 c^5 \alpha_3 - 7776 a^3 c^6 \alpha_3 - 2536 a^8 d \alpha_3 - 22\,349 a^7 c d \alpha_3 - 81\,276 a^6 c^2 d \alpha_3 - \\
& 161\,529 a^5 c^3 d \alpha_3 - 186\,102 a^4 c^4 d \alpha_3 - 114\,480 a^3 c^5 d \alpha_3 - 28\,512 a^2 c^6 d \alpha_3 - 720 a^7 d^2 \alpha_3 - \\
& 16\,281 a^6 c d^2 \alpha_3 - 78\,711 a^5 c^2 d^2 \alpha_3 - 159\,396 a^4 c^3 d^2 \alpha_3 - 169\,056 a^3 c^4 d^2 \alpha_3 - \\
& 93\,312 a^2 c^5 d^2 \alpha_3 - 20\,736 a c^6 d^2 \alpha_3 + 4166 a^6 d^3 \alpha_3 + 21\,145 a^5 c d^3 \alpha_3 + 24\,660 a^4 c^2 d^3 \alpha_3 + \\
& 4716 a^3 c^3 d^3 \alpha_3 - 6840 a^2 c^4 d^3 \alpha_3 - 3456 a c^5 d^3 \alpha_3 + 1349 a^5 d^4 \alpha_3 + 15\,196 a^4 c d^4 \alpha_3 + \\
& 23\,748 a^3 c^2 d^4 \alpha_3 + 12\,624 a^2 c^3 d^4 \alpha_3 + 2304 a c^4 d^4 \alpha_3 - 1494 a^4 d^5 \alpha_3 + 1332 a^3 c d^5 \alpha_3 + \\
& 4128 a^2 c^2 d^5 \alpha_3 + 1536 a c^3 d^5 \alpha_3 - 916 a^3 d^6 \alpha_3 - 848 a^2 c d^6 \alpha_3 - 136 a^2 d^7 \alpha_3 - 128 a c d^7 \alpha_3, \\
& -5535 a^5 \alpha_0 - 3753 a^4 c \alpha_0 + 26\,460 a^3 c^2 \alpha_0 + 40\,176 a^2 c^3 \alpha_0 + 15\,552 a c^4 \alpha_0 + 42\,741 a^4 d \alpha_0 + \\
& 164\,214 a^3 c d \alpha_0 + 248\,832 a^2 c^2 d \alpha_0 + 168\,480 a c^3 d \alpha_0 + 41\,472 c^4 d \alpha_0 + 56\,862 a^3 d^2 \alpha_0 + \\
& 145\,476 a^2 c d^2 \alpha_0 + 130\,896 a c^2 d^2 \alpha_0 + 41\,472 c^3 d^2 \alpha_0 + 24\,732 a^2 d^3 \alpha_0 + 41\,256 a c d^3 \alpha_0 + \\
& 17\,280 c^2 d^3 \alpha_0 + 3672 a d^4 \alpha_0 + 3456 c d^4 \alpha_0 + 4101 a^7 \alpha_2 + 33\,447 a^6 c \alpha_2 + 101\,223 a^5 c^2 \alpha_2 + \\
& 146\,421 a^4 c^3 \alpha_2 + 101\,736 a^3 c^4 \alpha_2 + 27\,216 a^2 c^5 \alpha_2 + 23\,841 a^6 d \alpha_2 + 170\,964 a^5 c d \alpha_2 + \\
& 441\,495 a^4 c^2 d \alpha_2 + 546\,840 a^3 c^3 d \alpha_2 + 330\,048 a^2 c^4 d \alpha_2 + 77\,760 a c^5 d \alpha_2 + \\
& 14\,895 a^5 d^2 \alpha_2 + 137\,943 a^4 c d^2 \alpha_2 + 341\,550 a^3 c^2 d^2 \alpha_2 + 372\,816 a^2 c^3 d^2 \alpha_2 + \\
& 190\,080 a c^4 d^2 \alpha_2 + 36\,288 c^5 d^2 \alpha_2 - 3423 a^4 d^3 \alpha_2 + 31\,980 a^3 c d^3 \alpha_2 + 84\,780 a^2 c^2 d^3 \alpha_2 + \\
& 69\,120 a c^3 d^3 \alpha_2 + 19\,008 c^4 d^3 \alpha_2 - 3834 a^3 d^4 \alpha_2 + 2808 a^2 c d^4 \alpha_2 + 11\,160 a c^2 d^4 \alpha_2 + \\
& 5040 c^3 d^4 \alpha_2 - 612 a^2 d^5 \alpha_2 + 432 a c d^5 \alpha_2 + 864 c^2 d^5 \alpha_2 + 24 a d^6 \alpha_2 + 48 c d^6 \alpha_2, \\
& -256\,500 a^6 - 1\,186\,650 a^5 c - 2\,193\,885 a^4 c^2 - 2\,024\,460 a^3 c^3 - 931\,824 a^2 c^4 - \\
& 171\,072 a c^5 - 373\,275 a^5 d - 1\,455\,030 a^4 c d - 2\,191\,968 a^3 c^2 d - 1\,561\,032 a^2 c^3 d - \\
& 502\,848 a c^4 d - 51\,840 c^5 d - 189\,675 a^4 d^2 - 579\,258 a^3 c d^2 - 642\,816 a^2 c^2 d^2 - \\
& 299\,376 a c^3 d^2 - 46\,656 c^4 d^2 - 36\,882 a^3 d^3 - 71\,604 a^2 c d^3 - 41\,472 a c^2 d^3 - 6048 c^3 d^3 - \\
& 1188 a^2 d^4 + 2376 a c d^4 + 3024 c^2 d^4 + 216 a d^5 + 432 c d^5 - 5535 a^5 \alpha_1 - 3753 a^4 c \alpha_1 + \\
& 26\,460 a^3 c^2 \alpha_1 + 40\,176 a^2 c^3 \alpha_1 + 15\,552 a c^4 \alpha_1 + 42\,741 a^4 d \alpha_1 + 164\,214 a^3 c d \alpha_1 + \\
& 248\,832 a^2 c^2 d \alpha_1 + 168\,480 a c^3 d \alpha_1 + 41\,472 c^4 d \alpha_1 + 56\,862 a^3 d^2 \alpha_1 + 145\,476 a^2 c d^2 \alpha_1 + \\
& 130\,896 a c^2 d^2 \alpha_1 + 41\,472 c^3 d^2 \alpha_1 + 24\,732 a^2 d^3 \alpha_1 + 41\,256 a c d^3 \alpha_1 + 17\,280 c^2 d^3 \alpha_1 + \\
& 3672 a d^4 \alpha_1 + 3456 c d^4 \alpha_1 + 4101 a^7 \alpha_3 + 33\,447 a^6 c \alpha_3 + 101\,223 a^5 c^2 \alpha_3 + \\
& 146\,421 a^4 c^3 \alpha_3 + 101\,736 a^3 c^4 \alpha_3 + 27\,216 a^2 c^5 \alpha_3 + 23\,841 a^6 d \alpha_3 + 170\,964 a^5 c d \alpha_3 + \\
& 441\,495 a^4 c^2 d \alpha_3 + 546\,840 a^3 c^3 d \alpha_3 + 330\,048 a^2 c^4 d \alpha_3 + 77\,760 a c^5 d \alpha_3 + \\
& 14\,895 a^5 d^2 \alpha_3 + 137\,943 a^4 c d^2 \alpha_3 + 341\,550 a^3 c^2 d^2 \alpha_3 + 372\,816 a^2 c^3 d^2 \alpha_3 + \\
& 190\,080 a c^4 d^2 \alpha_3 + 36\,288 c^5 d^2 \alpha_3 - 3423 a^4 d^3 \alpha_3 + 31\,980 a^3 c d^3 \alpha_3 + 84\,780 a^2 c^2 d^3 \alpha_3 + \\
& 69\,120 a c^3 d^3 \alpha_3 + 19\,008 c^4 d^3 \alpha_3 - 3834 a^3 d^4 \alpha_3 + 2808 a^2 c d^4 \alpha_3 + 11\,160 a c^2 d^4 \alpha_3 + \\
& 5040 c^3 d^4 \alpha_3 - 612 a^2 d^5 \alpha_3 + 432 a c d^5 \alpha_3 + 864 c^2 d^5 \alpha_3 + 24 a d^6 \alpha_3 + 48 c d^6 \alpha_3 \}
\end{aligned}$$

Решая эту систему относительно $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, получим :

Solve[% == 0, { $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ }] [[1]] // Simplify

$$\left\{ \alpha_1 \rightarrow \left(-13 a^3 - 4 c d (6 c + d) - a^2 (46 c + 7 d) + a (-30 c^2 - 40 c d + 2 d^2) \right) / \right. \\ \left. ((a + 3 c - d) (a + 2 d)), \alpha_3 \rightarrow \frac{9 (5 a + 4 c + 2 d)}{(a + 3 c - d) (a + 2 d)}, \alpha_0 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0 \right\}$$

Вспомнив, что $s = \alpha_0 + \alpha_1 b + \alpha_2 b^2 + \alpha_3 b^3$,

подставим полученные коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Factor[Sum[$\alpha_i * b^i$, {i, 0, 3}] /. %]

$$\frac{1}{(a + 3 c - d) (a + 2 d)} \\ \left(b \left(-13 a^3 + 45 a b^2 - 46 a^2 c + 36 b^2 c - 30 a c^2 - 7 a^2 d + 18 b^2 d - 40 a c d - \right. \right. \\ \left. \left. 24 c^2 d + 2 a d^2 - 4 c d^2 \right) \right)$$

Это и есть упрощенное выражение для n .

$n =$

$$\frac{1}{(a + 3 c - d) (a + 2 d)} \left(b \left(-13 a^3 + 45 a b^2 - 46 a^2 c + 36 b^2 c - 30 a c^2 - 7 a^2 d + 18 b^2 d - \right. \right. \\ \left. \left. 40 a c d - 24 c^2 d + 2 a d^2 - 4 c d^2 \right) \right).$$

Упростив таким же образом все остальные выражения, получим:

$$k = -\frac{1}{a + 2 d} \left(2 a^3 - 21 a b^2 + 12 a^2 c - 18 b^2 c + 9 a c^2 - 6 a^2 d - 6 b^2 d - 3 a c d - 2 a d^2 \right),$$

$$l = -\left(3 b \left(-4 a^3 + 15 a b^2 - 14 a^2 c + 12 b^2 c - 9 a c^2 - 2 a^2 d + \right. \right. \\ \left. \left. 6 b^2 d - 11 a c d - 6 c^2 d - 2 c d^2 \right) \right) / ((a + 3 c - d) (a + 2 d)),$$

$$m = \frac{1}{a + 2 d} \left(6 a^3 - 45 a b^2 + 30 a^2 c - 36 b^2 c + \right. \\ \left. 21 a c^2 - 8 a^2 d - 18 b^2 d + 7 a c d + 6 c^2 d - 4 a d^2 + 2 c d^2 \right),$$

Эти условия вместе с уже найденным n ,

$e_0 = 0$ и $p = -3 (a + c) (3 a + 3 c + d)$ являются решением заданной системы.