УДК 519.21(076)(075.8)
ББК 22.171я73
Т34

А в т о р ы:
**Лазакович Н. В., Радыно Е. М., Сташулёнок С. П.,
Штин С. Л., Яблонский О. Л.**

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра экономической кибернетики и теории вероятностей
Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор *Ю. В. Малинковский*);
доктор физико-математических наук, профессор *М. А. Маталыцкий*

Теория вероятностей. Практикум : учеб. пособие : в 2 ч. / Н. В. Ла-
Т34 закович [и др.] ; под ред. Н. В. Лазаковича. Ч. 1. – Минск : БГУ, 2011. –
147 с.
ISBN 978-985-518-442-4.

Учебное пособие состоит из введения, трех глав, решений задач и приложений, в которых даны таблицы основных вероятностных распределений. Включены лабораторные работы по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика».

Для студентов математических специальностей учреждений, обеспечивающих получение высшего образования.

УДК 519.21(076)(075.8)
ББК 22.171я73

ISBN 978-985-518-442-4 (ч. 1)
ISBN 978-985-518-443-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу настоящего учебного пособия положены лекционный материал учебника «Теория вероятностей» (авторы Н. В. Лазакович, С. П. Сташулёнок, О. Л. Яблонский, 2007) и задания к лабораторным работам, которые выполняют студенты механико-математического факультета Белорусского государственного университета при изучении курса теории вероятностей и математической статистики. Содержание первой части соответствует программе курса для студентов математических специальностей государственных университетов.

Пособие состоит из введения; трех глав по темам: вероятностные пространства, независимость, случайные величины и их числовые характеристики; решений задач и приложений, в которых приводятся таблицы основных вероятностных распределений и значений некоторых из них.

Каждая глава содержит теоретический раздел, в котором приведены необходимые определения понятий и формулировки теорем, разобраны многочисленные примеры. После этого идут тестовые задания, дающие возможность оценить степень усвоения теоретического материала.

Лабораторные работы состоят из заданий и задач. Каждое задание включает в себя 10 однотипных и примерно одинаковых по сложности задач. Задачи, помещенные после заданий, не одинаковы по степени трудности. Для решения некоторых из них могут потребоваться более глубокие знания. Такие задачи отмечены звездочкой и снабжены подробными решениями.

Предлагаемая форма проведения занятий (в виде лабораторных работ) рассчитана на выполнение каждой работы как одним студентом, так и группой из двух-трех человек.

В рецензировании учебного пособия участвовали член-корреспондент НАН Беларуси Я. В. Радыно, профессор В. А. Еровенко, профессор М. А. Маталыцкий и кафедра экономической кибернетики и теории вероятностей Гомельского государственного университета

(заведующий кафедрой профессор Ю. В. Малинковский). Их критические замечания и полезные советы способствовали улучшению содержания пособия.

Авторы признательны коллегам – сотрудникам кафедры функционального анализа Белорусского государственного университета за неоднократное обсуждение рукописи и сделанные при этом ценные замечания.

Все отзывы, пожелания и замечания просим присылать по адресу: кафедра функционального анализа, механико-математический факультет, Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Республика Беларусь.

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей – это большой, интенсивно развивающийся раздел математики, изучающий случайные явления. Казалось бы, науке, в частности математике, нет дела до случайных явлений, ведь наука открывает законы, которые помогают предсказывать течение того или иного процесса или явления, а случайное явление – как раз такое явление, исход которого предсказать невозможно. Однако и случайные явления подчиняются некоторым закономерностям, которые называют *вероятностными*. Прежде всего условимся, что мы будем иметь дело не со всеми случайными явлениями, а с *массовыми*, т. е. с такими, исходы которых, в принципе, возможно наблюдать в одних и тех же условиях много раз. Пусть при N-кратном осуществлении некоторого комплекса условий случайное событие A происходит $N(A)$ раз. Отношение $N(A)/N$ называется *относительной частотой события* A. Оказывается, для больших N относительная частота события A в массовых явлениях обладает так называемым свойством *устойчивости*, которое состоит в том, что отношение $N(A)/N$ колеблется относительно одного и того же числа. Это число $\mathrm{P}(A)$ в соответствующей математической модели называют *вероятностью события* A. Устойчивость относительных частот событий – объективное свойство массовых случайных явлений реального мира. Отсутствие устойчивости относительных частот в сериях испытаний свидетельствует о том, что условия, в которых проводятся испытания, претерпевают значительные изменения.

Теория вероятностей – это наука, которая изучает математические модели массовых случайных явлений. Если говорить конкретнее, то теория вероятностей устанавливает такие связи между вероятностями случайных событий в математических моделях, которые позволяют вычислять вероятности сложных событий по вероятностям более простых событий.

Призванная изучать количественные характеристики случайных событий теория вероятностей, как и всякая точная наука, стала таковой лишь тогда, когда было четко сформулировано понятие вероятностной модели и была создана ее аксиоматика.

В этой связи естественно хотя бы кратко остановиться на основных этапах развития теории вероятностей.

Теория вероятностей как наука возникла в середине XVII в. и связана с именами Б. Паскаля, П. Ферма, Х. Гюйгенса, хотя отдельные задачи, касающиеся подсчета шансов в азартных играх, рассматривались и ранее – в XV–XVI вв. итальянскими математиками. Первые общие методы решения таких задач были, по-видимому, даны в знаменитой переписке Паскаля и Ферма, начавшейся в 1654 г., и в первой книге по теории вероятностей «О расчетах в азартной игре», опубликованной Гюйгенсом в 1657 г.

Истинная теория вероятностей начинается с работы Я. Бернулли «Искусство предположения» (1713), в которой была доказана первая предельная теорема – закон больших чисел, и работы А. Муавра «Аналитические методы» (1730), в которой сформулирована и доказана так называемая центральная предельная теорема.

В 1812 г. вышел большой трактат П. Лапласа «Аналитическая теория вероятностей», в котором обобщалась теорема Муавра на несимметричный случай схемы Бернулли и давались применения вероятностных методов к теории ошибок наблюдений.

К этому же периоду в развитии теории вероятностей, когда центральное место в исследованиях занимали предельные теоремы, относятся работы С. Пуассона и К. Ф. Гаусса. С именем Пуассона в современной теории вероятностей связаны понятия распределения и процесса, носящие его имя. Гауссу принадлежит заслуга создания теории ошибок.

Следующий важный период в становлении теории вероятностей связан с именами П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова, получивших в начале XIX в. эффективные методы доказательства предельных теорем для сумм независимых случайных величин.

Современный период в развитии теории вероятностей начинается с установления аксиоматики. Первые работы в этом направлении принадлежат С. Н. Бернштейну, Р. Мизесу и Э. Борелю. В 1933 г. вышла книга А. Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей», в которой была предложена аксиоматика, получившая всеобщее признание и позволившая охватить не только все классические разделы теории вероятностей, но и дать строгую основу для развития ее новых разделов – теории случайных процессов и математической статистики. Изложение в настоящей книге основано на аксиоматическом подходе А. Н. Колмогорова.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Для математического описания экспериментов со случайными исходами необходимо понятие *пространства элементарных событий* (*исходов*). Таким пространством будем называть любое множество элементарных событий, обладающих следующими свойствами. Во-первых, все события взаимно исключают друг друга – являются непересекающимися, т. е. в результате эксперимента происходит одно и только одно элементарное событие. Во-вторых, каждый интересующий нас результат эксперимента может быть однозначно описан с помощью элементарных событий, которые будем обозначать ω, $\omega \in \Omega$.

Пространство элементарных событий можно трактовать как множество всех исходов исследуемого случайного явления.

Определение 1. *Класс* $\mathscr{A}$ *подмножеств пространства* Ω *назовем алгеброй событий, если*:

1) $\varnothing \in \mathscr{A}$, $\Omega \in \mathscr{A}$;

2) *из того, что* $A \in \mathscr{A}$, *следует, что* $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$;

3) *из соотношений* $A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{A}$ *следует, что* $A \bigcup B \in \mathscr{A}$.

Определение 2. *Алгебра* $\mathscr{A}$ *называется* σ-*алгеброй* (*сигма-алгеброй*), *если из того, что* $A_n \in \mathscr{A}$ *для всех* $n \in N$, *следует, что*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}.$$

Случайными событиями будем называть элементы некоторой σ-алгебры $\mathscr{A}$ подмножеств из Ω. *Достоверным событием* назовем случайное событие, которое всегда происходит при осуществлении данного комплекса условий. Оно совпадает со всем пространством элементарных событий, поэтому обозначим его Ω. *Невозможным событием* назовем случайное событие, которое никогда не происходит при реализации данного комплекса условий. Обозначать невозможное событие будем $\varnothing$.

Пусть дано некоторое пространство элементарных событий Ω. Определим операции между двумя событиями A и B. *Произведением* или *пересечением* событий назовем событие, обозначаемое $A \cap B$ или AB, которое происходит тогда и только тогда, когда одновременно происходят события A и B.

События A и B назовем *несовместными*, если $A \cap B = \varnothing$ (т. е. вместе произойти они не могут).

Суммой или *объединением* событий A и B назовем событие, обозначаемое $A \cup B$ или $A + B$ (в случае, когда они несовместны), которое происходит тогда и только тогда, когда происходят A или B или оба вместе.

Разностью событий A и B назовем событие $A \setminus B$, происходящее тогда и только тогда, когда произошло A, но не произошло B.

Событием, противоположным событию A, назовем событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Симметрической разностью назовем событие $A \Delta B$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий $A \setminus B$ или $B \setminus A$.

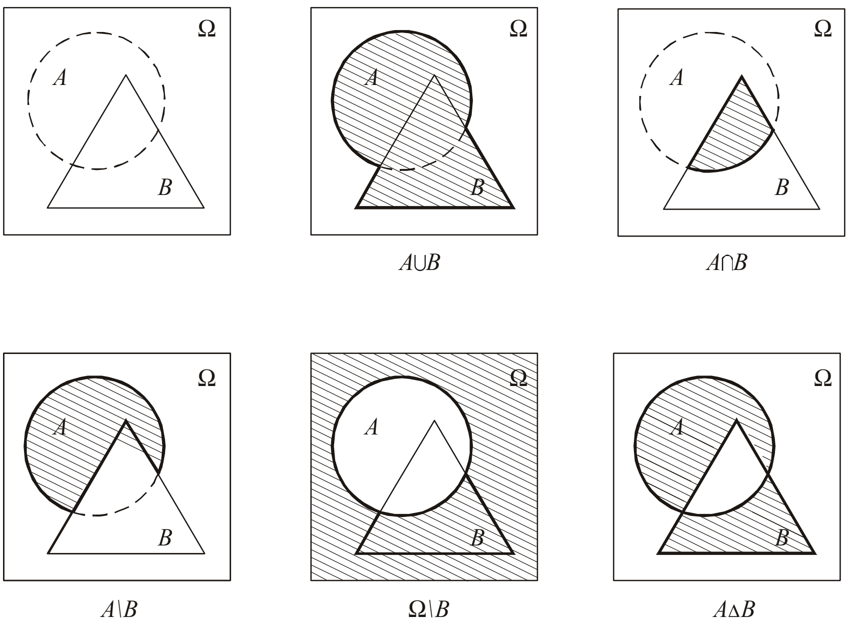

Рис. 1. Сумма, произведение, разность событий A и B; событие, противоположное A, и симметрическая разность A и B

Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечная последовательность случайных событий. Обозначим через A^* множество всех тех и только тех элементарных событий, которые принадлежат бесконечному числу множеств A_n. Тогда

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Пусть A_* – множество тех и только тех $\omega \in \Omega$, которые принадлежат всем A_n, за исключением конечного числа. Тогда

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Множество A^* можно интерпретировать как событие, состоящее в том, что произойдет бесконечно много событий из последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Множество A_* есть событие, состоящее в том, что произойдут все события A_n, начиная с некоторого номера, или, что то же самое, не произойдет только конечное число событий из последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно, что $A_* \subset A^*$. Событие A^* называется *верхним пределом* последовательности событий $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$A^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

Событие A_* называется *нижним пределом* последовательности событий $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$A_* = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

Если $A^* = A_*$, то говорят, что последовательность событий $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

Определение 3. *Вероятностным пространством называется тройка* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, *где* Ω *– пространство элементарных событий*; $\mathscr{A}$ *– некоторая* σ*-алгебра подмножеств из* Ω; *функция* $\mathrm{P}: \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ *и обладает следующими свойствами*:

1°) $\mathrm{P}(A) \geq 0$ *для всех* $A \in \mathscr{A}$ (*неотрицательность* P);

2°) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ (*нормированность* P);

3°) $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ *для любых* $A, B \in \mathscr{A}$, $A \bigcap B = \varnothing$ (*аддитивность* P);

4°) *Для любых событий* $B_1, B_2, ..., B_n, ... \in \mathscr{A}$ *таких, что* $B_n \downarrow \varnothing$, *т. е.* $B_1 \supset B_2 \supset ... \supset B_n \supset ...$ *и*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing,$$

выполняется

$$\mathrm{P}(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ (непрерывность в нуле P).}$$

Функция P *называется вероятностью*.

Следующее свойство вероятности P называется σ-*аддитивностью.*

3*. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathscr{A}$ и $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Тогда

$$\mathrm{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

Можно показать, что P – *это* σ-*аддитивная мера и что система аксиом* 1°–4° *эквивалентна системе аксиом* 1°, 2°, 3*. *Отметим, что с точки зрения теории меры функция* P – *конечная мера, а* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ – *пространство с мерой.*

Сформулируем следующие простейшие свойства вероятностей:

1. *Если* $A \subset B$, *то* $\mathrm{P}(A) \le \mathrm{P}(B)$.

2. *Если* $A \subset B$, *то* $\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$.

3. *Для любого случайного события A справедливо* $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

4. $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.

5. *Для каждого случайного события A выполняется* $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$.

6. *Пусть A и B – случайные события. Тогда* $\mathrm{P}(A \bigcup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \bigcap B)$.

7. *Пусть* $A_1, ..., A_n$ – *случайные события. Тогда справедлива следующая формула включения-исключения*:

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} \mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} \mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - ... +$$

$$+(-1)^{n-1}\mathrm{P}(A_1 \cap ... \cap A_n).$$

8. *Для любого конечного или счетного числа случайных событий* $\{A_n\}$ *имеют место неравенства*

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n} A_n\right) \le \sum_{n} \mathrm{P}(A_n), \quad \mathrm{P}\left(\bigcap_{n} A_n\right) \ge 1 - \sum_{n} \mathrm{P}(\overline{A}_n).$$

9. *Вероятность* P – *непрерывная функция на* σ*-алгебре* $\mathscr{A}$, *т. е. если*

$$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A,$$

то

$$\mathrm{P}(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{P}(A).$$

Примеры основных вероятностных пространств:

1. *Классическое вероятностное пространство* – математическая модель случайного явления, число исходов которого конечно и все они равновозможны (т. е. все элементарные события равновероятны). В этом случае тройка $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ имеет следующий вид:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}, \quad \mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \mathrm{P}(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, ..., n\,.$$

Здесь и в дальнейшем $\mathscr{P}(\Omega)$ будет обозначать множество всех подмножеств множества Ω. На любом подмножестве из Ω определим вероятность P следующим образом:

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i:\ \omega_i \in A} \mathrm{P}(\omega_i) = \frac{1}{n} \sum_{i:\ \omega_i \in A} 1 = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где $|\Omega|$ – число всех элементарных событий; $|A|$ – число элементарных событий, принадлежащих A. Несложно убедиться, что функция P удовлетворяет всем аксиомам вероятности. Она носит название *классической вероятности*.

Пример 1. Построим вероятностную модель эксперимента, состоящего в однократном подбрасывании симметричной монеты. В этом случае $\Omega = \{\omega : \omega = \text{г} \vee \text{р}\}$ или $\Omega = \{\text{г}, \text{р}\}$, где элементарные события $\{\text{г}\}$ и $\{\text{р}\}$ заключаются соответственно в выпадении герба и решки, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega) = \{\varnothing, \Omega, \{\text{г}\}, \{\text{р}\}\}$ и $\mathrm{P}(\omega = \text{г}) = \mathrm{P}(\omega = \text{р}) = 1/2$.

Пример 2. Пусть бросается симметричная игральная кость. Тогда $\Omega = \{\omega : \omega = i,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ (σ-алгебра $\mathscr{A}$ состоит из $2^6 = 64$ случайных событий), $\mathrm{P}(\omega = i) = 1/16$.

Рассмотрим событие B = {выпавшее число очков кратно трем}, т. е. $B = \{3,\ 6\}$. В этом случае $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\omega = 3) + \mathrm{P}(\omega = 6) = 1/3$.

2. *Конечное вероятностное пространство* – математическая модель случайного явления с конечным числом, вообще говоря, неравновозможных исходов (т. е. вероятности элементарных событий могут быть различными). В этом случае тройка $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ имеет следующий вид:

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_n\},\ \ \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega),$$

$$\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \mathrm{P}(\omega_i) = p_i,\ \ p_i \ge 0,\ \ i = 1,\ 2,\ ...,\ n,\ \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Для любого подмножества A из Ω вероятность P определяется так:

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i:\ \omega_i \in A} p_i.$$

П р и м е р 3. Бросается симметричная игральная кость. В качестве пространства элементарных событий возьмем множество

$$\Omega = \{\omega_1 = \{1,\ 2,\ 3\},\ \omega_2 = \{4,\ 5\},\ \omega_3 = \{6\}\},\ \ \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

(σ-алгебра $\mathcal{A}$ состоит из $2^3 = 8$ случайных событий), $\mathrm{P}(\omega_1) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(\omega_2) = \dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(\omega_3) = \dfrac{1}{6}$. В рамках данной модели случайное событие $B = \{3,\ 6\}$ из примера 2 не является элементом σ-алгебры, а значит, для него вероятность не определена.

3. *Дискретное вероятностное пространство* – математическая модель случайного явления, число исходов которого не более чем счетное, поэтому

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_n,\ ...\},\ \ \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega),$$

$$\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \mathrm{P}(\omega_i) = p_i,\ \ p_i \ge 0,\ \ i = 1,\ 2,\ ...,\ \ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Для любого события A вероятность определим как сумму вероятностей всех элементарных событий, содержащихся в A:

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k:\ \omega_k \in A} p_k.$$

П р и м е р 4. Двое по очереди бросают одну и ту же симметричную монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Найдем вероятность того, что выиграет бросающий первым.

Пространство элементарных событий рассматриваемого эксперимента имеет следующий вид:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\},$$

где событие ω_n состоит в том, что впервые герб выпал при n-м подбрасывании,

$$\mathrm{P}(\omega_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Событие A, состоящее в выигрыше первого игрока, имеет следующий вид: $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \ldots, \omega_{2k-1}, \ldots\}$, поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} = \frac{0,5}{1-0,25} = \frac{2}{3}.$$

4. *Геометрическое вероятностное пространство* – тройка $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое по Лебегу множество конечной меры; $\mathscr{A}$ – некоторая σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств Ω. В качестве $\mathscr{A}$ можно выбрать также борелевскую σ-алгебру, т. е. σ-алгебру, порожденную всеми открытыми подмножествами Ω. Функция $\mathrm{P}: \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ задается на элементах $A \in \mathscr{A}$ следующим образом:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)},$$

где λ – мера Лебега.

Определенная таким образом вероятность называется *геометрической.*

З а д а ч а о в с т р е ч е. Двое договорились встретиться в определенном месте между 19 и 20 часами. Пришедший первым ждет второго 20 минут, затем уходит. Какова вероятность того, что встреча состоится?

Р е ш е н и е. Введем независимые переменные, зная значения которых, мы можем ответить на вопрос задачи «да» или «нет»: x – момент прихода первого, y – момент прихода второго. Для того чтобы встреча состоялась, необходимо и достаточно, чтобы $|x - y| \le 20$.

Тогда

$$\Omega = \{\omega:\ \omega = (x, y),\ 0 \le x,\ y \le 60\},$$

$$A = \{\omega \in \Omega : |x - y| \le 20\}.$$

Все возможные исходы изображены на рис. 2 точками квадрата со стороной 60; исходы, при которых встреча состоится, расположены в заштрихованном шестиугольнике A. Несложный подсчет показывает, что вероятность в этом случае равна 5/9.

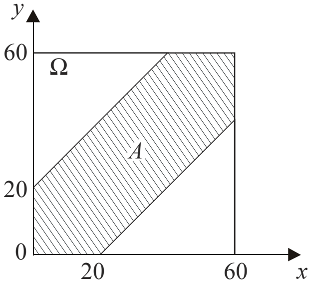

Рис. 2

П а р а д о к с Б е р т р а н а. Геометрическое определение вероятности часто подвергалось критике за некорректность определения вероятности события. В качестве наиболее яркого примера можно привести задачу Жозефа Бертрана – французского математика, жившего в XIX в.:

Наудачу берется хорда в круге. Чему равна вероятность того, что ее длина превосходит длину стороны вписанного равностороннего треугольника?

Р е ш е н и е 1. Из соображений симметрии можно заранее задать направление хорды. Проведем диаметр, перпендикулярный хорде. Получим, что только хорды, которые пересекают диаметр в промежутке от $1/4$ до $3/4$ его длины, будут превосходить сторону правильного треугольника. Значит, вероятность равна 1/2.

Р е ш е н и е 2. Не ограничивая общности, можно закрепить один из концов хорды на окружности. Касательная к окружности в этой точке и две стороны правильного треугольника с вершиной в этой точке образуют три угла по 60°. Условию задачи удовлетворяют только хорды, попадающие в средний угол. Таким образом, при этом способе вычисления искомая вероятность оказывается равной 1/3.

Р е ш е н и е 3. Для определения положения хорды достаточно задать ее середину. Хорда удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда ее середина находится внутри круга, концентрического данному, но половинного радиуса. Площадь этого круга равна 1/4 площади данного. Таким образом, искомая вероятность равняется 1/4.

Дело в том, что в условии задачи не определено проведение хорды наудачу. В самом деле, в решении 1 вдоль одного из диаметров AB окружности катится стержень (рис. 3, *а*). Множество всех возможных мест остановки этого стержня есть множество точек отрезка AB длины, равной диаметру. Равновероятными считаются события, состоящие в том, что остановка произойдет в интервале длины Δh, где бы внутри диаметра не располагался этот отрезок. В решении 2 стержень, закрепленный на шарнире, расположенном в одной из точек окружности, совершает колебания величиной 180° (рис. 3, *б*). При этом предполагается, что остановка стержня внутри дуги окружности длины h зависит только от длины дуги, но не от ее положения, т. е. равновероятными событиями считаются остановки стержня в любых дугах окружности одинаковой длины. В решении 3 (рис. 3, *в*) точка бросается внутрь круга радиусом R наудачу, и вычисляется вероятность попадания ее внутрь концентрического круга радиусом $R/2$. Таким образом, разные ответы объясняются различными постановками задач.

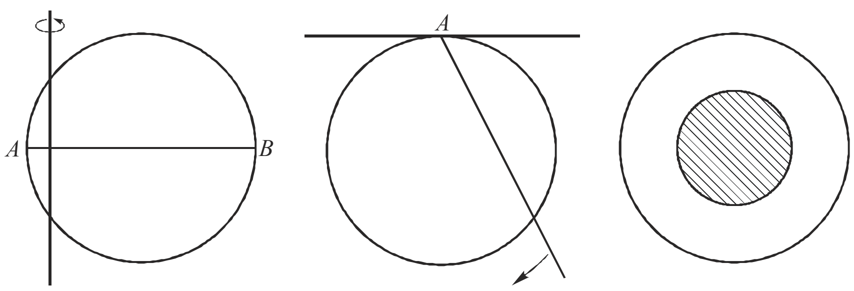

Рис. 3

Для вычисления вероятностей в классическом вероятностном пространстве используются комбинаторные методы.

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий расположения объектов в соответствии со специальными правилами и методы подсчета числа всех возможных способов, которыми эти расположения могут быть сделаны

Основной принцип комбинаторики (правило умножения).

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2, и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ способами.

Пример 5. Из города A в город B ведет m различных путей, а из города B в город C – n путей. Несложно видеть, что число различных путей из города A в город C равно $m \times n$.

Упорядоченные множества, перестановки.

Множество называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n, где n – число элементов множества, так, что различным элементам соответствуют различные числа.

Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (т. е. могут быть получены из того же самого множества), называются *перестановками* этого множества.

Пусть P_n – число перестановок множества, содержащего n различных элементов. Тогда

$$P_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n = n!.$$

Размещения из n по k. Рассмотрим теперь упорядоченные подмножества основного множества Ω. Упорядоченные подмножества, содержащие k элементов, множества из n элементов называются *размещениями из n элементов по k.*

Число размещений из n элементов по k равно

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 6. Найдем число телефонных номеров, состоящих из шести различных цифр:

$A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\ 200.$

Сочетания из n по k.

Пусть Ω – основное множество, состоящее из n элементов. Произвольное (неупорядоченное) подмножество Ω, содержащее k элементов, называется сочетанием из n элементов по k.

Число всех сочетаний из n элементов по k равно

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

П р и м е р 7. Рассмотрим прямоугольную сетку размером $m \times n$, состоящую из квадратов размером 1×1. Найдем число кратчайших путей на этой сетке, ведущих из левого нижнего угла – точки $(0;\ 0)$ в правый верхний угол – точку $(m;\ n)$.

Каждый кратчайший путь из точки $(0;\ 0)$ в точку $(m;\ n)$ состоит из $m+n$ отрезков, среди которых m горизонтальных и n вертикальных. Разные пути отличаются лишь порядком чередования горизонтальных и вертикальных отрезков. Поэтому общее число путей равно числу способов, которыми из $m+n$ отрезков можно выбрать m горизонтальных отрезков, т. е. C_{m+n}^m. Можно было бы рассматривать число способов выбора не m горизонтальных, а n вертикальных отрезков, тогда получили бы ответ C_{m+n}^n. Итак, геометрически установлено равенство

$$C_{m+n}^m = C_{m+n}^n,$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, используя представление C_n^k.

Р а з б и е н и я н а г р у п п ы; п е р е с т а н о в к и с п о в т о р е н и я м и. *Пусть* $k_1,\ ...,\ k_m$ *– целые неотрицательные числа, причем* $k_1 + ... + k_m = n$. *Число способов, которыми можно представить множество* Ω *из n элементов в виде суммы m множеств* $B_1,\ B_2,\ ...,\ B_m$, *число элементов которых составляет соответственно* $k_1,\ ...,\ k_m$, *равно*

$$P_n(k_1,\ k_2,\ ...,\ k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ \dots\ k_m!}.$$

Пусть имеется n букв: k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, …, k_m букв a_m, $k_1 + ... + k_m = n$. Слова длины n, которые можно получить из k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, …, k_m букв a_m, называются еще *перестановками с повторениями*.

Число различных перестановок, которые можно составить из n элементов, среди которых имеется k_1 *элементов первого типа,* k_2 *элементов второго типа, …,* k_m *элементов m-го типа, равно* $P_n(k_1,\ k_2,\ ...,\ k_m)$.

П р и м е р 8. Найдем число различных слов, которые можно получить, переставляя буквы в слове «математика». Оно равно

$$P_{10}(3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1) = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151\ 200.$$

Полиномиальная формула. Справедливо равенство

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1 \ge 0,\ ...,\ k_m \ge 0, \\ k_1 + ... + k_m = n}} P_n(k_1, k_2, ..., k_m) a_1^{k_1} \ ... \ a_m^{k_m}.$$

Числа $P_n(k_1, k_2, ..., k_m)$ называются *полиномиальными коэффициентами*.

Сочетания с повторениями. *Сочетаниями из m элементов по n элементов с повторениями называются группы, содержащие n элементов, причем каждый элемент принадлежит одному из m типов.*

Например, из трех элементов a, b, c можно составить такие сочетания по два элемента с повторениями:

$$aa,\ bb,\ cc,\ ab,\ ac,\ bc.$$

Число различных сочетаний из m элементов по n с повторениями равно

$$f_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^n.$$

Пример 9. Найдем число способов, которыми можно выбрать три из двенадцати букв А, А, А, Т, Т, Т, Г, Г, Г, Ц, Ц, Ц. В рассматриваемом случае $m = 4$ (имеем четыре типа А, Т, Г, Ц), а $n = 3$. Поэтому искомое число равно

$$f_4^3 = C_{3+4-1}^3 = C_6^3 = 20.$$

Пример 10. Кости домино можно рассматривать как сочетание с повторениями по два из семи чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Число таких сочетаний равно

$$f_7^2 = C_{7+2-1}^2 = C_8^2 = 28.$$

Пример 11. Найдем число целых неотрицательных решений уравнения

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = n.$$

Существует взаимно-однозначное соответствие между решениями указанного уравнения и сочетаниями из m элементов по n. Если имеем целые неотрицательные числа $x_1, x_2, ..., x_m$ такие, что $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$, то можем составить сочетание из m элементов, взяв x_1 элементов первого типа, …, x_m элементов m-го типа. Наоборот, имея сочетание из m элементов по n, получим некоторое решение исходного уравнения в целых неотрицательных числах. Поэтому число целых неотрицательных решений равно

$$f_m^n = C_{m+n-1}^n.$$

Пример 12. Найдем число различных частных производных порядка n у бесконечно дифференцируемой функции m переменных. Частные производные порядка n зависят лишь от того, сколько раз мы дифференцируем по каждой переменной, а не зависят от порядка дифференцирования. Поэтому число различных частных производных равно числу различных целых неотрицательных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$, т. е. $f_m^n = C_{m+n-1}^n$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Сочетание из n элементов по k это: 1) упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества; 2) k-элементное подмножество n-элементного множества; 3) упорядоченное n-элементное подмножество k-элементного множества; 4) n-элементное подмножество k-элементного множества.

2. Размещение из n элементов по k это: 1) упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества; 2) k-элементное подмножество n-элементного множества; 3) упорядоченное n-элементное подмножество k-элементного множества; 4) n-элементное подмножество k-элементного множества.

3. Рассмотрим эксперимент с однократным бросанием игральной кости. Пусть A = {выпадение единицы}; B = {выпадение двойки}; C = {выпадение тройки}. Тогда случайными событиями, не являющимися элементарными, являются: 1) $\overline{A}B$; 2) B; 3) C; 4) ABC.

4. Бросается игральная кость. Рассмотрим следующие случайные события: A = {выпадение четного числа очков}; B = {выпадение тройки}; C = {выпадение шестерки}. Тогда событие $A\overline{B}\overline{C}$ заключается в следующем: 1) выпала двойка или четверка; 2) выпала двойка; 3) выпала четверка; 4) событие $A\overline{B}\overline{C}$ невозможно.

5. События A и B несовместны. Может ли хотя бы одно из них быть достоверным? Ответ: 1) да; 2) нет.

6. События A, B и C попарно несовместны. Может ли хотя бы одно из них быть достоверным? Ответ: 1) да; 2) нет.

7. Рассмотрим эксперимент с однократным бросанием игральной кости. Построим соответствующую этому эксперименту математическую модель – вероятностное пространство. Тогда сигма-алгебра событий содержит: 1) 6 случайных событий; 2) 64 элементарных события; 3) 32 случайных события; 4) 64 случайных события.

8. Среди следующих утверждений неверным является: 1) всякое классическое вероятностное пространство является конечным; 2) всякое конечное вероятностное пространство не является геометрическим; 3) конечное вероятностное пространство не является дискретным; 4) геометрическое вероятностное пространство содержит более чем счетное число исходов.

9. Рассмотрим геометрическое вероятностное пространство, являющееся математической моделью бросания точки в квадрат, который обозначим $ABCD$. Точку пересечения его диагоналей обозначим E. а) Вероятность непопадания в треугольник BCE равна: 1) 0,5; 2) 0,25; 3) 0,75; 4) 0,4. б) Событие, заключающееся в непопадании в точку E: 1) невозможно; 2) нулевой вероятности; 3) достоверно; 4) единичной вероятности.

10. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.

11. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

12. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, – тоже белый.

13. Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет белым.

14. Из урны, в которой a белых шаров и b черных, вынимают подряд все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

15. В урне $a(a \geq 2)$ белых и b черных шаров. Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

16. В урне a белых и b черных шаров $(a \geq 2,\ b \geq 3)$. Из урны вынимают сразу пять шаров. Найти вероятность того, что два из них будут белыми, а три черными.

17. В партии, состоящей из k изделий, имеется $l(l \leq k)$ дефектных. Из партии выбирается для контроля $r(r \leq k)$ изделий. Найти вероятность того, что из них ровно $s(s \leq r)$ изделий будут дефектными.

18. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий:

A – появление четного числа очков;

B – появление не менее 5 очков;

C – появление не более 5 очков.

19. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что оба раза появится одно и то же число очков.

20. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

A – сумма выпавших очков равна 8;

B – произведение выпавших очков равно 8;

C – сумма выпавших очков больше, чем их произведение.

21. Бросаются две монеты. Какое из событий является более вероятным:

A – монеты лягут одинаковыми сторонами;

B – монеты лягут разными сторонами?

22. В урне a белых и b черных шаров $(a \geq 2, b \geq 2)$. Из урны вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно:

A – шары одного цвета;

B – шары разных цветов?

23. Трое игроков играют в карты. Каждому из них сдано по 10 карт и две карты оставлены в прикупе. Один из игроков видит, что у него на руках 6 карт бубновой масти и 4 – не бубновой. Он сбрасывает две карты из этих четырех и берет себе прикуп. Найти вероятность того, что он прикупит две бубновые карты.

24. Из урны, содержащей n пронумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: 1, 2, ..., n.

25. Та же урна, что и в предыдущей задаче, но каждый шар после вынимания возвращается обратно и перемешивается с другими, а его номер записывается. Найти вероятность того, что будет записана естественная последовательность номеров: 1, 2, ..., n.

26. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные пачки по 26 листов. Найти вероятности следующих событий:

A – в каждой из пачек окажется по два туза;

B – в одной из пачек не будет ни одного туза, а в другой – все четыре;

C – в одной из пачек один туз, а в другой – три.

27. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстра-класса. Найти вероятности следующих событий:

A – все команды экстра-класса попадут в одну и ту же группу;

B – две команды экстра-класса попадут в одну из групп, а три – в другую.

28. На девяти карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Две из них вынимаются наугад и укладываются на стол в порядке появления, затем читается полученное число, например 07 (семь), 14 (четырнадцать) и т. д. Найти вероятность того, что число будет четным.

29. На пяти карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5. Две из них, одна за другой, извлекают. Найти вероятность того, что число на второй карточке будет больше, чем на первой.

30. Тот же вопрос, что в предыдущей задаче, но первая карточка после вынимания кладется обратно и смешивается с остальными, а стоящее на ней число записывается.

31. В урне a белых, b черных и c красных шаров. Из урны вынимают один за другим все находящиеся в ней шары и записывают их цвета. Найти вероятность того, что в этом списке белый цвет появится раньше черного.

32. Имеется две урны: в первой a белых и b черных шаров; во второй c белых и d черных. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

33. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что вынутые шары разных цветов.

34. В барабане револьвера семь гнезд, из них в пяти заложены патроны, а два оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, в результате чего против ствола случайным образом оказывается одно из гнезд. После этого нажимается спусковой крючок; если ячейка была пустая, выстрела не происходит. Найти вероятность того, что, если провести такой опыт два раза подряд, револьвер оба раза выстрелит.

35. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «успех». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось это слово.

36. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

A – все пассажиры выйдут на четвертом этаже;

B – все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже).

37. Два судна должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода каждого из них независимо и равновозможно на протяжении данных суток. Определить вероятность того, что одному из них придется ждать освобождения причала, если время стоянки первого один час, а второго – два.

38. По маршруту независимо друг от друга ходят два автобуса: № 20 – через 10 минут и № 15 – через 7 минут. Студент приходит на остановку в случайный момент. Какова вероятность того, что ему придется ждать автобус менее трех минут?

Ответы к тестовым заданиям

1. 2). **2.** 1). **3.** 4). **4.** 1). **5.** 1). **6.** 1). **7.** 4). **8.** 3). **9.** а) 2); б) 4). **10.** $\frac{a}{a+b}$. **11.** $\frac{a-1}{a+b-1}$. **12.** $\frac{a-1}{a+b-1}$. **13.** $\frac{a}{a+b}$. **14.** $\frac{a}{a+b}$. **15.** $\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$.

16. $\frac{10a(a-1)b(b-1)(b-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)(a+b-4)}$. **17.** $\frac{C_l^s C_{k-l}^{r-s}}{C_k^r}$. **18.** $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$; $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$; $\mathrm{P}(C)=\frac{5}{6}$. **19.** $\frac{1}{6}$. **20.** $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{36}$; $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{18}$; $\mathrm{P}(C)=\frac{11}{36}$. **21.** $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$. **22.** $\mathrm{P}(A)<\mathrm{P}(B)$ при $(a-b)^2<a+b$; $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$ при $(a-b)^2=a+b$; $\mathrm{P}(A)>\mathrm{P}(B)$ при $(a-b)^2>a+b$. **23.** $\frac{1}{C_{22}^2}$. **24.** $\frac{1}{n!}$. **25.** $\frac{1}{n^n}$.

26. $\mathrm{P}(A)=\dfrac{C_4^2C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}}$; $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2C_4^4C_{48}^{22}}{C_{52}^{26}}$; $\mathrm{P}(C)=\dfrac{2C_4^3C_{48}^{23}}{C_{52}^{26}}$. **27.** $\mathrm{P}(A)=\dfrac{C_5^5C_{13}^4}{C_{18}^9}$; $\mathrm{P}(B)=\dfrac{C_5^2C_{13}^7+C_5^3C_{13}^6}{C_{18}^9}$. **28.** $\dfrac{5}{9}$. **29.** $\dfrac{1}{2}$. **30.** $\dfrac{2}{5}$. **31.** $\dfrac{a}{a+b}$. **32.** $\dfrac{ac}{(a+b)(c+d)}$.

33. $\dfrac{ad+bc}{(a+b)(c+d)}$. **34.** $\dfrac{4}{49}$. **35.** $\dfrac{1}{5!}$. **36.** $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{216}$; $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{36}$. **37.** $\dfrac{139}{1152}$. **38.** $\dfrac{21}{35}$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1

(4 часа)

Тема: Вероятностные пространства

Необходимые понятия и теоремы: элементарные события, случайные события и операции над ними; пространство элементарных событий, σ-алгебры и алгебры; вероятность и ее свойства; классическое, конечное и дискретное вероятностные пространства; сочетания, размещения и перестановки; упорядоченные и неупорядоченные выборки с возвращением и без возвращения; геометрическое вероятностное пространство; парадокс Бертрана.

Литература: [3] с. 15–21, 24–35; [5] с. 3–42; [6] с. 11–54; [10] с. 5–16; [12] с. 9–12, 35–40; [16] с. 9–35; [20] с. 9–12, 18–21; [21] с. 9–24; [22, т. 1] с. 24–81, 117–132; [23] стр. 9–27; [25] с. 11–22, 24–33; [26] с. 16–29.

Задание 1.1. В урне находится N шаров, на каждом из которых изображено одно из чисел: $k = 1, 2$ или 3. Число k изображено на a_k шаров $(k = 1, 2, 3)$. Случайный эксперимент состоит в последовательном доставании (без возвращения) шаров из урны наугад до первого появления шара с числом 3.

1) Построить для этого эксперимента вероятностное пространство.

2) Решить задачу для аналогичного эксперимента, в котором извлечение шаров производится с возвращением.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	5	6	7	5	6	7	5	6	7	4
a_1	2	2	1	1	2	1	1	2	2	2
a_2	2	2	3	1	3	4	3	1	3	1
a_3	1	2	3	3	1	2	1	3	2	1

Задание 1.2. Из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ выбирают k различных чисел. Найти вероятности событий:

$A_1 = \{$все k чисел кратны $q\}$;

A_2 = {все k чисел не кратны q};
A_3 = {не все k чисел кратны q};
A_4 = {каждое из k чисел кратно хотя бы одному из чисел q_1 или q_2};
A_5 = {каждое из k чисел не кратно хотя бы одному из чисел q_1 или q_2}.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
k	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4
q	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
q_1	4	3	2	2	2	4	2	5	3	4
q_2	5	4	3	5	7	5	5	6	7	7

Задание 1.3. На круглом столе радиусом R лежит игла длины r_1. Середина иглы совпадает с центром стола. На стол наудачу брошен круг радиусом r_2 (попадания центра круга в любую точку стола являются равновозможными).

1) Построить вероятностное пространство.

2) Найти вероятность того, что круг радиусом r_2 хотя бы частично закроет иглу.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	10	9	8	7	6	7	8	9	10	11
r_1	4	4	4	4	4	3	3	3	5	6
r_2	3	2	1	2	3	2	3	1	4	5

Задание 1.4. На бесконечную плоскость, на которой изображена прямая с отмеченным направлением, брошены три вектора. Пусть числа $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ($0 \le \alpha \le \pi,\ \ 0 \le \beta \le \pi,\ \ 0 \le \gamma \le \pi$) измеряют в радианах углы между каждым вектором и прямой.

1) Построить вероятностное пространство, считая, что все значения углов α, β и γ равновозможны.

2) Найти вероятность события $\alpha + \beta + \gamma \le 2\pi$.

3) Найти вероятность одновременного выполнения неравенств:

$$0 \le \alpha + \beta \le \pi / k_1,\ \ 0 \le \beta \le \pi / k_2,\ \ 0 \le \gamma \le \pi / k_3.$$

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_1	4	4	5	5	4	5	4	3	5	6
k_2	5	6	6	6	6	6	6	6	8	8
k_3	4	10	8	9	10	8	8	8	9	9

Задачи

1. Установить справедливость следующих свойств операций $\bigcup$ и $\bigcap$:

1) $A\bigcup B = B\bigcup A$, $A\bigcap B = B\bigcap A$ (коммутативность);

2) $A\bigcup(B\bigcup C) = (A\bigcup B)\bigcup C$, $A\bigcap(B\bigcap C) = (A\bigcap B)\bigcap C$ (ассоциативность);

3) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$, $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$ (дистрибутивность);

4) $A\bigcup A = A$, $A\bigcap A = A$ (идемпотентность)

Показать также, что

$$\overline{A\bigcup B} = \overline{A}\bigcap\overline{B}.$$

2. Доказать, что

$$\mathrm{P}(A\Delta B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 2\mathrm{P}(A\bigcap B) = \mathrm{P}(A\bigcup B) - \mathrm{P}(A\bigcap B).$$

3. Пусть множество Ω состоит из N элементов. Показать, что общее число $d(N)$ различных разбиений множества Ω определяется формулой

$$d(N) = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^N}{k!}.$$

У к а з а н и е. Сначала убедитесь в том, что

$$d(N) = \sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1}^{k} d(k),\ d(0) = 1.$$

4. Пусть $A_1, ..., A_n$ – события и величины $S_0, S_1, ..., S_n$ определены следующим образом:

$$S_0 = 1,\ S_r = \sum_{I_r} P(A_{k_1}, ..., A_{k_r}),\ 1 \le r \le n.$$

где суммирование распространяется по неупорядоченным подмножествам $I_r = \{k_1, \ldots, k_r\}$ множества $\{1, \ldots, n\}$.

Пусть событие B_m состоит в том, что одновременно произойдет в точности m событий из $A_1, ..., A_n$. Показать, что

$$\mathrm{P}(B_m) = \sum_{r=m}^{n} (-1)^{r-m} C_r^m S_r.$$

В частности, для $m = 0$

$$\mathrm{P}(B_0) = 1 - S_1 + S_2 - ... \pm S_n.$$

Показать также, что вероятность того, что одновременно произойдут, по крайней мере, m событий из $A_1, \ldots, A_n$, равна

$$\mathrm{P}(B_1) + \ldots + \mathrm{P}(B_n) = \sum_{r=m}^{n} (-1)^{r-m} C_{r-1}^{m-1} S_r.$$

В частности, вероятность того, что произойдет, по крайней мере, одно из событий $A_1, \ldots, A_n$, равна

$$\mathrm{P}(B_1) + \ldots + \mathrm{P}(B_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots \pm S_n.$$

5. Используя вероятностные соображения, доказать справедливость следующих тождеств:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_m^k = C_{m-1}^n,\ m-1 \geq n$;

4) $\sum\limits_{k=0}^{m} k(k-1)C_m^k = m(m-1)2^{m-2},\ m \geq 2$.

6. Пусть $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{4}$ и $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{3}$. Доказать, что $\dfrac{1}{12} \leq \mathrm{P}(A \cap B) \leq \dfrac{1}{3}$.

7.* Пусть $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ – такие события, что $\mathrm{P}(A_j) = 0{,}5,\ j = 1, 2, 3, 4$. Доказать, что

$$\max_{1 \leq j < k \leq 4} \mathrm{P}(A_j \cap A_k) \geq \frac{1}{6},$$

причем указанную оценку нельзя улучшить.

8. Брошены три монеты. Найти вероятности следующих событий:

A = {первая монета выпала гербом вверх};

B = {выпало ровно два герба};

C = {выпало не больше двух гербов}.

9. Какова вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе:

1) имеет все разные цифры;

2) имеет три одинаковые цифры;

3) имеет две пары одинаковых цифр?

10. У туристов было 3 банки с мясом, 2 банки с овощами и 2 с фруктами. Во время дождя надписи на банках были смыты. Туристам нужно открыть три банки. Какова вероятность того, что они будут отличаться содержимым?

11. Какова вероятность угадать в спортлото 6 из 49 k номеров, $0 \leq k \leq 6$?

12. В аудитории находится n студентов. Пусть день рождения каждого приходится на 1 из 365 дней года. Найти вероятность того, что найдутся хотя бы два студента, дни рождения которых совпадают.

13. Группа состоит из 4 мужчин и 8 женщин. Найти вероятность того, что при случайной группировке по три человека в каждой группе будет мужчина.

14. В урне 2 белых и 4 черных шара. Из урны один за другим вынимаются все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что последний извлеченный шар будет черным.

15. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются три карты. Определить вероятность того, что сумма очков этих карт равна 21, если соответствие карт и очков следующее:

карты:	6	7	8	9	10	В	Д	К	Т
очки:	6	7	8	9	10	2	3	4	11.

16. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность того, что образованная из 2 полученных чисел дробь сократима.

17. Из полного набора 28 костей домино наудачу берутся 5 костей. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы 1 кость с шестью очками.

18. В зале, насчитывающем $n + k$ мест, случайным образом занимают места n человек. Найти вероятность того, что будут заняты определенные $m \le n$ мест.

19. Сорок участников турнира разбиваются на четыре равные группы. Найти вероятность того, что четыре сильнейших участника окажутся в разных группах.

20. Группа из n лиц рассаживается в ряд или за круглый стол в случайном порядке. Какова вероятность того (в том и другом случае), что между двумя определенными лицами окажется ровно s человек?

21. Имеется $2n$ карточек, на которых написаны числа от 1 до $2n$, и $2n$ конвертов, на которых написаны те же числа. Карточки случайным образом вкладываются в конверты (в каждый конверт по одной карточке). Найти вероятность того, что сумма чисел на каждом конверте и лежащей в нем карточке четная.

22.* Восемь ладей случайным образом расставлены на шахматной доске. Найти вероятность того, что ни одна из них не бьет другую и ни одна не стоит на главной белой диагонали.

23.* Из колоды, содержащей 52 карты, извлекаются 13 карт. Найти вероятность того, что в выборке содержится ровно k пар «туз-король» одной масти.

24. Рассмотрим множество F кусочно-линейных функций $f(x)$, $0 \le x \le 6$, вида

$$f(x) = f(i) + \alpha_i (x - i), \text{ где } f(0) = 0,\ i \le x \le i + 1,$$

i – целые числа, $0 \le i \le 5$, и α_i принимают с одинаковой вероятностью два значения: 1 или –1. Найти вероятность того, что для случайно выбранной функции $f \in F$

$$\int_0^6 f(x)dx = 0.$$

25. Колода из 36 карт хорошо перемешана (т. е. все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятности событий:

A = {4 туза расположены рядом};

B = {места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом 7}.

26. Из множества всех последовательностей длины n, состоящих из цифр 0, 1, 2, случайно выбирается одна последовательность. Найти вероятности событий:

A = {последовательность начинается с 0};

B = {последовательность содержит ровно $m + 2$ нуля, причем 2 из них находятся на концах последовательности};

C = {последовательность содержит ровно m единиц};

D = {в последовательности ровно m_0 нулей, m_1 единиц, m_2 двоек, $m_0 + m_1 + m_2 = n$}.

27. В записанном телефонном номере 135–3?–?? три последние цифры стерлись. В предположении, что все комбинации трех стершихся цифр равновероятны, найти вероятности событий:

A = {стерлись различные цифры, отличные от 1, 3, 5};

B = {стерлись одинаковые цифры};

C = {две из стершихся цифр совпадают}.

28. В лифт 8-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Предположим, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

29. Найти вероятность того, что на две карточки спортлото с отмеченными номерами (4, 12, 38, 20, 41, 46) и (4, 12, 38, 20, 41, 49) будет получено ровно два минимальных выигрыша (указано ровно по три числа).

30. Из последовательности чисел 1, 2, ..., n наудачу выбираются два числа. Какова вероятность, что одно из них меньше k, а другое больше k, где $1 < k < n$?

31. Имеются пять отрезков, длины которых равны соответственно 1, 3, 5, 7, 9 единицам. Определить вероятность того, что с помощью взятых наудачу трех отрезков из данных пяти можно построить треугольник.

32. Ребенок играет с 10 буквами разрезной азбуки: *А*, *А*, *А*, *Е*, *И*, *К*, *М*, *М*, *Т*, *Т*. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «МАТЕМАТИКА»?

33. Из урны, содержащей M шаров, выбирают n шаров. Описать пространство элементарных событий, если:

1) выборка упорядоченная с возвращением;

2) выборка неупорядоченная с возвращением;

3) выборка упорядоченная без возвращения;

4) выборка неупорядоченная без возвращения.

34. Четыре человека сдают шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что собственные шляпы получают в точности 3, 2, 1, 0 человек.

35. В чулане находится n пар ботинок. Из них случайно выбираются $2r$ ботинок ($2r < n$). Какова вероятность того, что среди выбранных ботинок:

1) отсутствуют парные;

2) имеется ровно 1–2 комплектные пары?

36. Каждая из n палок разламывается на 2 части – длинную и короткую. Затем $2n$ полученных обломков объединяются в n пар, каждая из которых образует новую «палку». Найти вероятность того, что:

1) все обломки объединены в первоначальном порядке;

2) все длинные части соединены с короткими.

37.* По схеме случайного выбора с возвращением из множества чисел $\{1, 2, ..., N\}$, $N \geq 4$, выбираются числа X и Y. Какое из чисел – $P_2 = $ $= \mathrm{P}\{X^2 - Y^2$ делится на $2\}$ или $P_3 = \mathrm{P}\{X^2 - Y^2$ делится на $3\}$ – больше?

38.* Шестизначный номер трамвайного, троллейбусного или автобусного билета считается «счастливым», если сумма первых трех цифр совпадает с суммой последних трех цифр. Найти вероятность получить «счастливый» билет.

39. Десять рукописей разложены по 30 папкам (на одну рукопись три папки). Найти вероятность того, что в случайно выбранных 6 папках не содержится целиком ни одной рукописи.

40.* За круглый стол рассаживаются в случайном порядке $2n$ гостей. Какова вероятность того, что гостей можно разбить на n непересекающихся пар так, чтобы любая пара состояла из сидящих рядом мужчины и женщины?

41.* Задача Банаха. Некий математик носит с собой два коробка спичек, число которых в каждом из коробков равно N. Каждый раз, когда ему нужна спичка, он берет наудачу один из коробков. Когда-нибудь наступит такой момент, что вынутый коробок окажется пуст. Найти вероятность того, что:

1) второй коробок содержит r спичек;

2) в момент, когда впервые один из коробков оказался пуст, в другом было r спичек;

3) отсутствие спичек будет впервые обнаружено не в том коробке, который опустел первым; $r = 0, 1, \ldots, N$.

42.* Задача о баллотировке. Пусть два кандидата R и S получили на выборах соответственно r и s, $r > s$, голосов. Какова вероятность того, что кандидат R в течение всех выборов по количеству полученных голосов был впереди S? При этом предполагается, что последовательно опрашиваются все избиратели и на каждом шаге подсчитывается количество голосов, поданных за R и за S.

43. Семейная задача. В семье четыре сестры, они моют посуду по очереди. Из четырех разбитых тарелок три разбиты младшей сестрой, и поэтому ее называют неуклюжей. Можно ли ее оправдать, приписывая эти неудачи случайности? Установить связь с размещением шаров по ящикам.

44.* Теоретико-вероятностная формулировка великой теоремы Ферма. В двух урнах содержится одно и то же количество шаров – несколько черных и несколько белых в каждой. Из них вынимаются $n\,(n \geq 3)$ шаров с возвращением. Найти число n и содержимое обеих урн, если вероятность того, что все белые шары взяты из первой урны, равна вероятности того, что из второй урны взяты либо все белые, либо все черные шары.

45.* По n ящикам раскладывают R различимых шаров. Найти вероятность того, что останется ровно m пустых ящиков.

46.* По n ящикам раскладывают R неразличимых шаров. Найти вероятность того, что останется ровно m пустых ящиков.

47.* Два игрока A и B играют в следующую игру. На первом шаге игрок A расставляет разные числа от 1 до 18 по своему усмотрению на шести гранях трех игральных костей. На втором шаге игрок B, внимательно изучив кости, выбирает одну. На третьем шаге A выбирает одну из оставшихся костей. После этого каждый бросает кость. Побеждает тот, на чьей кости выпало большее количество очков. Какому из игроков игра более выгодна?

48.* На столе лежат белая и черная шляпы с лотерейными билетами. Белая шляпа «лучше» в том смысле, что при вытаскивании из нее билета вероятность получить выигрышный билет выше, чем для черной шляпы. На другом столе лежат также белая и черная шляпы с лотерейными билетами, причем белая шляпа «лучше» в указанном выше смысле. Предположим, что билеты из обеих белых шляп объединили в одну большую белую шляпу, а билеты из двух черных шляп объединили в одну большую черную шляпу. Верно ли, что большая белая шляпа «лучше» большой черной шляпы в указанном выше смысле?

49. Имеется два игральных кубика с гранями, помеченными числами $1, 2, \ldots, 6$. Можно ли приписать граням каждого из кубиков вероятности выпадения (свои для каждого кубика) так, что при одновременном бросании все значения суммы выпавших чисел были бы равновероятны?

50. Восемь мальчиков и семь девочек купили билеты на 15-местный ряд в кинотеатре. Считая, что все 15! их возможных расположений по этим местам равновероятны, найти вероятность того, что число пар соседей противоположного пола будет равно k, где $k = 1, 2, \ldots, 14$. (Например, при расположении «м, м, м, м, м, м, м, д, м, д, д, д, д, д, д» имеется 3 пары соседей противоположного пола.) Решить эту же задачу в предположении, что мальчиков m и девочек n.

51.* В n-местный вагон купили билеты n пассажиров. При этом каждому пассажиру было выделено свое место. Первые $n-1$ пассажиров расселись в вагоне случайным образом так, что все $n!$ вариантов рассадки равновероятны. Однако n-й пассажир решил занять именно свое место. При этом он просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято), тот в результате просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято), и т. д. Найти вероятность того, что будет потревожено ровно m пассажиров, $m = 0, 1, \ldots, n-1$ (n-й пассажир не входит в их число).

52.* В руке зажаты 6 травинок так, что их концы выступают и сверху и снизу. Верхние концы случайным образом разбиваются на пары и попарно связываются между собой. То же самое делают и с нижними концами. Какова вероятность того, что в результате этой операции все травинки окажутся связанными в одно кольцо? Решить эту же задачу, если количество травинок $2n$.

53. В корзине находится m зеленых яблок и n красных. Из нее вынимают (без возвращения) по одному яблоку до тех пор, пока не достанут все зеленые. Чему равна вероятность того, что после этого в корзине не останется ни одного яблока?

54.* Двадцать человек сидят за круглым столом. Перед одним из них находится тарелка. Он выбирает (равновероятно) одного из своих соседей и передает ему тарелку. Затем тот так же выбирает своего соседа и передает ему тарелку и т. д. (на каждом шаге соседи выбираются независимо). Для каждого сидящего за столом существует вероятность, что он окажется последним, кто получит тарелку. Найти множество людей, для которых эта вероятность максимальна.

55.* Игральная кость бросается n раз. Пусть p_n – вероятность того, что последовательность из числа выпавших очков является неубывающей. Найти p_n.

56. Кусок проволоки длиной в 20 см согнут в случайно выбранной точке. После этого, перегнув проволоку еще в двух местах, сделали прямоугольную рамку. Найти вероятность того, что площадь полученной рамки не превосходит 21 см^2.

57. Найти вероятность того, что корни квадратного уравнения

$$x^2 + 2ax + b = 0$$

1) действительны;

2) положительны,

если a и b равномерно распределены в квадрате с вершинами (1, 1), (1, –1), (–1, 1), (–1, –1).

58. На отрезок $[a; b]$ длиной c наудачу брошены 5 точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки a на расстоянии меньшем x, а три – на расстоянии большем x.

59. На отрезке $[a; b]$ длиной c поставлены наудачу две точки K и M. Какова вероятность того, что точка K окажется ближе к точке a нежели точка M?

60. На отрезке длины a наудачу ставятся две точки, в результате этот отрезок оказывается разделенным на три части. Найти вероятность того, что из получившихся частей можно построить треугольник.

61. На окружности радиусом R наудачу брошены три точки A, B и C. Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный?

62. На отрезок наудачу бросают три точки, одну за другой. Какова вероятность того, что третья по счету точка упадет между двумя первыми?

63. В шар радиусом R случайно бросаются N точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a, $0 < a < R$.

64. В квадрат наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что они образуют вершины:

1) какого-нибудь треугольника;

2) правильного треугольника;

3) прямоугольного треугольника.

65. В квадрат наудачу брошены две точки A и B. Найти вероятность того, что круг, диаметром которого является отрезок AB, целиком содержится в исходном квадрате.

66. В квадрат с вершинами (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) наудачу брошена точка $M(\xi,\eta)$.

1) Доказать, что $\mathrm{P}(\xi < x; \eta < y) = \mathrm{P}(\xi < x)\mathrm{P}(\eta < y) = xy$ для $0 \le x,\ \ y \le 1$.

2) Найти для $0 < z < 1$:

а) $\mathrm{P}(|\xi-\eta| < z)$; в) $\mathrm{P}(\min(\xi,\eta) < z)$;

б) $\mathrm{P}(\xi\eta < z)$; г) $\mathrm{P}(\max(\xi,\eta) < z)$.

67. На окружность единичного радиуса с центром в начале координат наудачу бросается точка. Найти вероятность того, что:

1) проекция точки на диаметр (ось абсцисс) находится от центра на расстоянии, не превышающем r, $r < 1$;

2) расстояние от выбранной точки до точки с координатами (1; 0) не превышает r.

68. Задача Бюффона. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, расстояния между которыми $2a$ (рис. 4). На нее наудачу бросается игла длиной $2l$, $l < a$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую. Слово «наудачу» подразумевает следующее: центр иглы случайно попадает на отрезок длиной $2a$, перпендикулярный параллельным прямым, вероятность того, что угол φ, образованный иглой и проведенными прямыми, будет заключаться между углами α и β, пропорциональна $|\alpha-\beta|$, положение центра иглы и величина φ независимы.

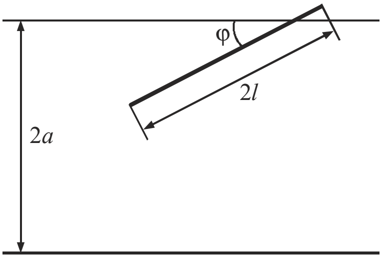

Рис. 4

69. На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиусом r, $r < a$. Какова вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых?

70. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a бросается наудачу монета диаметром $2r$, $2r < a$. Найти вероятность того, что:

1) монета попадает целиком внутрь одного квадрата;

2) монета пересечет не более одной стороны квадрата.

71. В квадрате со стороной 1 случайным образом выбирается точка A. Найти вероятность следующих событий:

1) расстояние от точки A до фиксированной стороны квадрата не превосходит $x, x \in \mathbb{R}$;

2) расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата не превосходит x;

3) расстояние от точки A до центра квадрата не превосходит x;

4) расстояние от точки A до фиксированной вершины квадрата не превосходит x.

72. В прямоугольнике со сторонами 1 и 2 выбирается случайная точка A. Найти вероятности следующих событий:

1) расстояние от точки A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит $x, x \in \mathbb{R}$;

2) расстояние от точки A до любой стороны прямоугольника не превосходит $x, x \in \mathbb{R}$;

3) расстояние от точки A до диагонали прямоугольника не превосходит $x, x \in \mathbb{R}$.

73. На паркет, составленный из правильных k-угольников со стороной a, случайно бросается монета радиусом r. Найти вероятность того, что монета не заденет границу ни одного из k-угольников паркета для: 1) $k = 3$; 2) $k = 4$; 3) $k = 6$.

74.* На отрезке $[0;1]$ случайным образом выбирается точка A, которая делит этот отрезок на две части. Пусть ξ_1 – длина меньшей части, ξ_2 – длина большей части. Найти $\mathrm{P}(\xi_1 \le x)$, $\mathrm{P}(\xi_2 \le x)$ при любых $x \in \mathbb{R}$.

75.* На плоскости проведено n окружностей $S_1, S_2, \ldots, S_n$ с общим центром O; радиус окружности S_k равен k, где $k = 1, 2, \ldots, n$. В круге S_n случайным образом выбирается точка A; ABC – правильный треугольник, одной из вершин которого является точка A, а центром – точка O. Найти вероятность P_m того, что граница треугольника ABC пересекает ровно m окружностей, $m = 0, 1, \ldots, n$.

76. Из множества $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ наудачу выбирается число a. Известно, что P{сумма цифр числа a равна S} = 1/100. Найти S.

77. Имеется прямоугольный параллелепипед Π_1. В нем случайным образом выбирается сначала точка P, а затем две точки, которые являются вершинами некоторого параллелепипеда Π_2, все ребра которого параллельны ребрам Π_1. Найти вероятность того, что $P \in \Pi_2$.

78. Во множестве квадратных матриц порядка n с элементами из поля $F_p = Z/pZ$ (p – простое число) наудачу выбирается матрица A. Какова вероятность P_n того, что уравнение $X^2 + X = \det A$ не имеет корней в F_p? Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 1$?

79. В урне содержится $p \cdot s$ шаров, занумерованных числами от 1 до $p \cdot s$, где p – нечетное простое, $s \ge 2$. Извлекаются p шаров. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_p$ – их номера. Рассмотрим события

$$A_j = \{a_1 + a_2 + \ldots + a_p \equiv j(\operatorname{mod} p)\}, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Доказать, что $\mathrm{P}(A_0) > \mathrm{P}(A_j)$ для $j = 1, 2, ..., p-1$ и $\mathrm{P}(A_i) = \mathrm{P}(A_j)$ для любых $i, j \neq 0$.

80. Двое, честный и шулер, играют в кости. Игра заключается в одновременном выбрасывании каждым игроком пары костей. Проигравшим объявляется тот, кто первым выбросит дубль. Честный игрок использует обычные кости, шулер же может изготовить кости с любым распределением вероятностей p_i, q_i, где p_i, q_i – вероятность выпадения i очков на первой и второй кости соответственно: $p_1 + ... + p_6 = 1$, $q_1 + ... + q_6 = 1$. Что следует предпринять шулеру, чтобы максимизировать свои шансы на выигрыш?

81.* Задача о замкнутости множества значений вероятности. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ – вероятностное пространство. Доказать, что множество $\{\mathrm{P}(A) : A \in \mathscr{A}\} \subset [0; 1]$ замкнуто, если:

1) вероятностное пространство дискретно;

2) вероятностное пространство неатомично или непрерывно, т. е. для всякого события $A \in \mathscr{A}$, где $\mathrm{P}(A) > 0$, существует событие $B \in \mathscr{A}$, $B \subset A$ такое, что $0 < \mathrm{P}(B) < \mathrm{P}(A)$;

3) вероятностное пространство произвольно.

82.* Показать, что если имеет место сходимость событий $A_n \to A$, $n \to \infty$, то $P(A_n) \to P(A)$, $n \to \infty$.

83.* Пусть $\boldsymbol{A}$ – σ-алгебра на множестве натуральных чисел, P – вероятностная мера на $\boldsymbol{A}$. Можно ли продолжить P до вероятностной меры на σ-алгебре всех подмножеств натуральных чисел?

84.* Пусть K – единичная окружность, P – вероятностная мера на K такая, что для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $\mathrm{P} \circ \varphi_\alpha^{-1} = \mathrm{P}$, где φ_α обозначает поворот окружности K на угол α, а $\mathrm{P} \circ \varphi_\alpha^{-1}$ – образ меры P при отображении φ_α, т. е. $(\mathrm{P} \circ \varphi_\alpha^{-1})(A) = \mathrm{P}(\varphi_\alpha^{-1}(A))$. Доказать, что P совпадает с нормированной мерой Лебега. Доказать то же самое, предполагая только, что существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $\alpha / \pi \notin \mathbb{Q}$ и $\mathrm{P} \circ \varphi_\alpha^{-1} = \mathrm{P}$.

85.* Из чисел 1, 2, …, N, где $N \geq 1$, по схеме случайного выбора с возвращением выбираем пару чисел a, b. Обозначим через P_N вероятность того, что числа в паре являются взаимно простыми, т. е. $(a; b) = 1$. Найти $\lim\limits_{N \to \infty} P_N$.

86.* Рассмотрим последовательность Фибоначчи F_k, $k = 0, 1, 2, ...$, где $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, $i = 1, 2, 3, ...$. Из чисел $1, 2, \ldots, N$, где $N \geq 1$, по схеме случайного выбора с возвращением выбираем пару чисел a, b. Обозначим через Q_N вероятность того, что F_a и F_b взаимно просты. Найти $\lim\limits_{N \to \infty} Q_N$.

Указание. Доказать сначала для последовательности Фибоначчи свойство Люка: $(F_a; F_b) = F_{(a;b)}$.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

В этой главе изложены понятия независимости случайных событий, классов случайных событий, испытаний со случайными исходами и некоторые вопросы, связанные с ними. Отметим, что независимость является одним из важнейших понятий теории вероятностей: именно это понятие определило то своеобразие, которое выделяет теорию вероятностей из общей теории, занимающейся исследованием измеримых пространств с мерой.

Далее будем рассматривать события, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.

Изучение независимости случайных событий начнем с обсуждения понятия условной вероятности.

Определение 1. *Пусть вероятность события* B *– положительная величина, т. е.* $\mathrm{P}(B) > 0$. *Условной вероятностью события* A *при условии, что произошло событие* B, *называется число*

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Условная вероятность оценивает то изменение в степени уверенности о наступлении некоторого события, которое происходит после получения дополнительной информации.

Пример 1. Пусть дважды брошена симметричная игральная кость, A – событие, состоящее в том, что при первом бросании выпала единица, а B – событие, состоящее в том, что сумма появившихся очков строго меньше четырех.

Вычислим условную вероятность события A, если известно, что произошло событие B.

Имеем

$$\Omega = \{(i, j) : i = \overline{1,6},\ j = \overline{1,6}\},\quad A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\},$$

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\},\quad A \cap B = \{(1, 1), (1, 2)\}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},\ \mathrm{P}(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},\ \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

По определению условной вероятности имеем

$$\mathrm{P}(A\,|\,B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{2}{3}.$$

П р и м е р 2. Внутрь области Ω случайным образом бросается точка. Пусть событие A заключается в том, что точка попала в треугольную область A, а событие B – в том, что точка попала в пятиугольную область B (рис. 5).

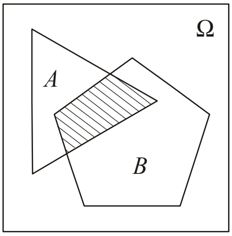

Рис. 5

Определим вероятность события A при условии, что произошло событие B. Обозначим $S(X)$ площадь области X, тогда

$$\mathrm{P}(A\,|\,B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\dfrac{S(A \cap B)}{S(\Omega)}}{\dfrac{S(B)}{S(\Omega)}} = \frac{S(A \cap B)}{S(B)}.$$

На практике часто бывает так, что известны или достаточно просто определяются именно условные вероятности, и с их помощью необходимо вычислить безусловную вероятность некоторого случайного события. Простейшей формулой для решения задач такого типа является *формула умножения вероятностей*.

Теорема 1 (теорема умножения). *Пусть* $\mathrm{P}(A) > 0$, $\mathrm{P}(B) > 0$. *Тогда*

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B\,|\,A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A\,|\,B).$$

Для n событий справедлива следующая формула.

Теорема 2 (теорема умножения). *Пусть случайные события* A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n *такие, что*

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0.$$

Тогда

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$
$$= \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2\,|\,A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3\,|\,A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(A_n\,|\,A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

П р и м е р 3. Студент знает 20 вопросов из 25. Экзаменатор задал ему три вопроса. Какова вероятность того, что студент ответит на все вопросы?

Р е ш е н и е. Введем следующие события:

$$A_1 = \{\text{студент ответил на первый вопрос}\};$$

$$A_2 = \{\text{студент ответил на второй вопрос}\};$$

$$A_3 = \{\text{студент ответил на третий вопрос}\}.$$

Найдем числовые значения вероятностей $P(A_1)$, $P(A_2 \mid A_1)$, $P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$: $P(A_1) = \frac{20}{25}$, так как всего вопросов – 25, а «хороших» – 20; $P(A_2 \mid A_1) = \frac{19}{24}$, так как при подсчете этой вероятности необходимо учесть, что на первый вопрос уже дан ответ, $P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{18}{23}$.

Искомую вероятность $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ находим по теореме 2:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} \approx 0,496.$$

Определение 2. *Конечное или счетное число случайных событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *образует полную группу событий* (*разбиение*), *если*:

1) $P(A_i) > 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots;$
2) $A_i \cap A_j = \varnothing, \qquad i \neq j;$
3) $\sum\limits_k A_k = \Omega.$

Теорема 3 (формула полной вероятности). *Пусть случайные события* $A_1, \ldots, A_n$ *образуют полную группу событий. Тогда для произвольного события* B, *рассматриваемого на том же вероятностном пространстве*,

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P(B \mid A_k).$$

Формула полной вероятности верна и при выполнении следующих условий на события A_i:

1) $P(A_i) > 0;$
2) $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j;$
3) $B \subset \sum\limits_i A_i.$

Пример 4. Студент выучил 20 билетов из 25 и идет отвечать вторым. Какова вероятность, что он вытянет «счастливый» билет?

Решение. Введем случайные события:

$A_1 = \{$первый отвечающий выбрал «счастливый» билет$\}$, $A_2 = \overline{A_1}$. Тогда

$$P(A_1) = \frac{20}{25},\ P(A_2) = \frac{5}{25},\ P(B \mid A_1) = \frac{19}{24},\ P(B \mid A_2) = \frac{20}{24},$$

где событие $B = \{$второй отвечающий выбрал «счастливый» билет$\}$,

$$P(B) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24} = \frac{4}{5}.$$

Таким образом, вероятность выбрать «счастливый» билет такая же, как если бы студент отвечал первым.

Теорема 4 (формулы Байеса). *Пусть выполнены условия теоремы 3 и* $\mathrm{P}(B)>0$. *Тогда для любых значений* $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ *имеют место формулы*

$$\mathrm{P}(A_k\mid B)=\frac{\mathrm{P}(A_k)\cdot\mathrm{P}(B\mid A_k)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{P}(A_j)\cdot\mathrm{P}(B\mid A_j)}.$$

Пример 5. В урне находятся два шара (оба белые, или оба черные, или один черный и один белый – все три исхода равновероятны). Из урны достали один шар, он оказался белым. Какова вероятность того, что и второй шар белый?

Решение. Введем следующие события: A_1 = {в урне находятся два белых шара}, A_2 = {в урне находятся два черных шара}, A_3 = {в урне находятся белый и черный шары}, B = {вынутый из урны шар оказался белым}. Тогда

$$\mathrm{P}(A_1)=\mathrm{P}(A_2)=\mathrm{P}(A_3)=1/3$$

и

$$\mathrm{P}(A_1\mid B)=\frac{\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(B\mid A_1)}{\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(B\mid A_1)+\mathrm{P}(A_2)\cdot\mathrm{P}(B\mid A_2)+\mathrm{P}(A_3)\cdot\mathrm{P}\big(B\mid A_3\big)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

Определение 3. *События A и B называются независимыми, если*

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B).$$

Часто используется следующий принцип: причинно-независимые физические события моделируются независимыми событиями из вероятностного пространства. Однако наличие зависимости между событиями из вероятностного пространства далеко не означает, что моделируемые физические события связаны причинно-следственной связью.

Пример 6. Из колоды в 52 карты случайно вынимается одна. Рассмотрим следующие случайные события: A – вынута карта бубновой масти, B – вынута дама. Являются ли события A и B независимыми?

Найдем вероятности событий A, B и $A\cap B$. Всего в колоде 13 карт бубновой масти, поэтому $\mathrm{P}(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$. В колоде четыре дамы, значит, вероятность вынуть даму $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. Произведением событий A и B является случайное событие – {вынута бубновая дама}, поэтому $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{52}$. Проверим выполнение равенства $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, получим $\frac{1}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4}$. Таким образом, A и B независимы в теоретико-вероятностном смысле.

Решим такую же задачу при условии, что в колоду добавлен джокер. Очевидно, что при подсчете вероятностей изменятся лишь знаменатели, так как карт теперь стало 53. Следовательно, проверка равенства (1) дает следующий результат:

$$\frac{1}{53} \neq \frac{13}{53} \cdot \frac{4}{53}.$$

Значит, если в колоде есть джокер, то события A и B становятся зависимыми.

Определение 4. *Случайные события* $A_1, \ldots, A_n$ *называются попарно независимыми, если для любых* $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(A_j).$$

Определение 5. *Случайные события* $A_1, \ldots, A_n$ *называются независимыми в совокупности, если для любого подмножества индексов* $\{i_1, ..., i_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$

$$\mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} \mathrm{P}(A_{i_j}).$$

Пусть даны события A, B, C. Запишем, что означают попарная независимость случайных событий и независимость случайных событий в совокупности:

1) $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$; 3) $\mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(C)$;

2) $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(C)$; 4) $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(C)$.

Попарная независимость – это выполнение первых трех условий. Если к тому же выполняется и условие 4, то это означает, что события независимы в совокупности. Очевидно, что независимость в совокупности сильнее, т. е. из нее вытекает попарная независимость. Обратное, вообще говоря, неверно. Это показывает следующий пример.

Пример 7 (пример Бернштейна). На плоскость бросают тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный, зеленый и синий, а на четвертой есть все цвета. Рассмотрим следующие события:

$A = \{$выпала грань, содержащая красный цвет$\}$;

$B = \{$выпала грань, содержащая зеленый цвет$\}$;

$C = \{$выпала грань, содержащая синий цвет$\}$.

Покажем, что события A, B, C независимы попарно, но зависимы в совокупности.

Имеем

$$P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=\frac{1}{4},\ P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}.$$

Тогда $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, $P(A\cap C)=P(A)P(C)$, $P(B\cap C)=P(B)P(C)$, т. е. события A, B и C попарно независимы. Но $P(A\cap B\cap C)\neq P(A)P(B)P(C)$, а значит, A, B, C не являются независимыми в совокупности.

Пусть имеется два класса событий. Под *независимостью этих классов событий* по определению будем понимать, что любой представитель одного класса независим с любым представителем из другого. По аналогии для n классов случайных событий можем ввести определения попарной независимости и независимости в совокупности.

О п р е д е л е н и е 6. *Сигма-алгебры* $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ *называются независимыми, если для любых* $A_k\in\mathscr{A}_k$, $k=1, 2, \ldots, n$,

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=\prod_{k=1}^{n}P(A_k).$$

Далее описывается математическая модель n независимых испытаний, каждое из которых имеет конечное число исходов. Напомним, что под испытанием мы понимаем эксперимент со случайными исходами.

Поскольку математическая модель любого испытания с конечным числом исходов – конечное вероятностное пространство, то в случае n испытаний имеем n вероятностных пространств. Пусть $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, P_i)$, $i=\overline{1,n}$, – конечные вероятностные пространства, где $\Omega_i=\{\omega_i^1, \omega_i^2, \ldots, \omega_i^{n_i}\}$, $\mathscr{A}_i=\mathscr{P}(\Omega_i)$, $P_i(\omega_i^k)=p_i^k$, $k=\overline{1,n_i}$, $i=\overline{1,n}$.

Вложим все эти пространства в следующее пространство:

$$\Omega=\{\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_n):\ \omega_i\in\Omega_i,\ i=\overline{1,n}\},\ \mathscr{A}=\mathscr{P}(\Omega),$$

$$P(\omega)=P_1(\omega_1)\cdot\ldots\cdot P_n(\omega_n),$$

для любого $A\in\mathscr{A}$ положим

$$P(A)=\sum_{\omega\in A}P(\omega).$$

Заданная таким образом вероятность P называется прямым произведением вероятностей P_i и обозначается $P=P_1\times P_2\times\ldots\times P_n$. Аналогично в этом случае $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1\times\mathscr{A}_2\times\ldots\times\mathscr{A}_n$ есть прямое произведение σ-алгебр.

Каждому событию A_i из вероятностного пространства $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \mathrm{P}_i)$ поставим в соответствие событие $A'_i = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \ldots \times \Omega_n$ из вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Через $\mathscr{A}'_i$ обозначим подалгебру алгебры $\mathscr{A}$, состоящую из всех таких событий A'_i. Очевидно, что $\mathrm{P}(A'_i) = \mathrm{P}_i(A_i)$ и сигма-алгебры $\mathscr{A}'_1, \mathscr{A}'_2, \ldots, \mathscr{A}'_n$ независимы. Поэтому, рассматривая вместо событий A_i из вероятностного пространства $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \mathrm{P}_i)$ изоморфные события A'_i из подалгебры $\mathscr{A}'_i$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, мы получим математическую модель n независимых испытаний.

Схема Бернулли (биномиальная схема). Пусть проводятся n независимых испытаний. Известно, что в каждом испытании возможны два исхода: либо происходит событие A (успех), либо событие A не происходит (неуспех). Данная схема называется *схемой Бернулли.* При этом предполагается, что вероятности p успеха и $q = 1 - p$ неуспеха не изменятся при переходе от испытания к испытанию. Простейший пример такой схемы – следующий эксперимент.

Пример 8. Монета бросается n раз. Очевидно, что в любом испытании возможны два исхода – выпадение орла или решки.

Опишем математическую модель схемы Бернулли, т. е. построим соответствующее вероятностное пространство:

$$\Omega_i = \{0,1\}, \quad \mathscr{A}_i = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \Omega_i\}, \quad \mathrm{P}_i(1) = p, \quad \mathrm{P}_i(0) = q, \quad p + q = 1.$$

Тогда прямое произведение вероятностных пространств $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \mathrm{P}_i)$ имеет вид

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \omega : \ \omega_i \in \{0, 1\}\},$$

$$\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega),$$

$$\mathrm{P}(\omega) = \prod_{i=1}^{n} p^{\omega_i} q^{1-\omega_i}.$$

Для любого события A из $\mathscr{A}$

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}(\omega).$$

Пусть событие B состоит в том, что при n независимых испытаниях в схеме Бернулли произошло ровно k успехов, т. е.

$$B = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega : \ \omega_1 + \ldots + \omega_n = k, \ \omega_i = 0, 1, \ i = \overline{1,n}\}.$$

Тогда

$$\mathrm{P}(B) = C_n^k p^k q^{n-k} = P_n(k), \ k = \overline{0,n}.$$

Вероятности $P_n(k)$, $k = \overline{0,n}$, называются биномиальными вероятностями.

Пример 9. Известно, что левши составляют 1 %. Найти вероятность того, что среди 200 человек найдется хотя бы трое левшей.

Для решения этой задачи используется схема Бернулли, в которой проводятся 200 независимых испытаний с вероятностью успеха в отдельном испытании, равной $1/100$. Тогда $P_{200}(0)$ – вероятность того, что среди 200 человек нет левшей, $P_{200}(1)$ – есть один левша, $P_{200}(2)$ – есть двое левшей. Искомая вероятность равна

$$1-P_{200}(0)-P_{200}(1)-P_{200}(2)=$$

$$=1-C_{200}^{0}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{0}\cdot\left(\frac{99}{100}\right)^{200}-C_{200}^{1}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{1}\cdot\left(\frac{99}{100}\right)^{199}-C_{200}^{2}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{2}\cdot\left(\frac{99}{100}\right)^{198}.$$

Полиномиальная схема. Более сложная схема n независимых испытаний получается, когда при каждом испытании возможно появление одного из k попарно несовместных исходов $A_1, A_2, ..., A_k$. Такая схема называется полиномиальной схемой. При $k=2$ она превращается в схему Бернулли.

Пусть i-е испытание связано с вероятностным пространством $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \mathrm{P}_i)$, $i=\overline{1, n}$, где $\Omega_i=\{1, 2, ..., k\}$, состоит из номеров исходов $A_1, ..., A_k$, $\mathscr{A}_i=\mathscr{P}(\Omega)$, $\mathrm{P}_i(j)=p_j$, $p_j\geq 0$, $j=\overline{1,k}$, $p_1+...+p_k=1$.

Тогда, согласно общей схеме, прямое произведение $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ может быть представлено следующим образом:

$$\Omega=\{\omega=(\omega_1, ..., \omega_n):\omega_i=\overline{1,k}\},\ A=\mathscr{P}(\Omega),$$

$$\mathrm{P}(\omega)=\mathrm{P}_1(\omega_1)\cdot\mathrm{P}_2(\omega_2)\cdot...\cdot\mathrm{P}_n(\omega_n).$$

Пусть событие B состоит в том, что в n испытаниях полиномиальной схемы событие A_1 произойдет ровно m_1 раз, A_2 – ровно m_2 раз, ..., A_k – ровно m_k раз, $m_1+...+m_k=n$. Вероятность события B обозначается $P_n(m_1, ..., m_k)$ и называется полиномиальной вероятностью:

$$P_n(m_1, ..., m_k)=\frac{n!}{m_1!\ ...\ m_k!}\cdot p_1^{m_1}\cdot...\cdot p_k^{m_k}.$$

Пример 10. В некотором обществе блондины составляют 40 %, брюнеты – 30 %, шатены – 20 %, рыжие – 10 %. Случайно выбираются шесть человек. Найти вероятность того, что количество блондинов и шатенов среди них одинаково.

Очевидно, что возможны только четыре выборки, при которых число блондинов и шатенов одинаково: среди шести выбранных нет блондинов и шатенов, один блондин и один шатен, два шатена и два блондина, три шатена и три блондина. Введем следующие события:

$$A_1 = \{\text{случайно выбранный человек является блондином}\};$$

$$A_2 = \{\text{случайно выбранный человек является шатеном}\};$$

$$A_3 = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2.$$

Вероятности этих событий будут равны соответственно $\mathrm{P}(A_1)=\dfrac{4}{10}$, $\mathrm{P}(A_2)=\dfrac{2}{10}$, $\mathrm{P}(A_3)=\dfrac{4}{10}$. Тогда искомая вероятность запишется в виде

$$P_6(0,0,6)+P_6(1,1,4)+P_6(2,2,2)+P_6(3,3,0),$$

где $P_6(m_1,m_2,m_6)=\dfrac{6!}{m_1!\,m_2!\,m_3!}\mathrm{P}(A_1)^{m_1}\,\mathrm{P}(A_2)^{m_2}\,\mathrm{P}(A_3)^{m_3}$ – вероятность того, что из шести случайно выбранных человек m_1 являются блондинами, m_2 – шатенами, m_3 – рыжими или брюнетами, причем $m_1+m_2+m_3=6$.

При больших значениях n и m сложно с вычислительной точки зрения получить численные значения вероятности $P_n(m)$ или суммы $\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$. Следующие теоремы дают асимптотические формулы, позволяющие вычислять указанные вероятности приближенно.

Обозначим μ_n – число наступивших успехов в n испытаниях схемы Бернулли.

Теорема 1 (локальная предельная теорема Пуассона). *Если* $p\to 0$, $n\to\infty$, *так что* $p\cdot n\to a$, *то*

$$\mathrm{P}(\mu_n=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\to\frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}.$$

Пример 11. Рассмотрим продолжение примера 9. Воспользовавшись локальной предельной теоремой Пуассона, найдем приближенное численное значение вероятности того, что среди 200 человек хотя бы трое левшей.

На практике обычно пользуются пуассоновским приближением уже тогда, когда $n\ge 100$, $p\le 1/100$.

Итак, $\mathrm{P}(A)=1-P_{200}(0)-P_{200}(1)-P_{200}(2)$. Имеем, что $n=200$, $p=\dfrac{1}{100}$ и $a=np=2$, поэтому искомая вероятность будет приближенно равна

$$1-\frac{2^0}{0!}\cdot e^{-2}-\frac{2^1}{1!}\cdot e^{-2}-\frac{2^2}{2!}\cdot e^{-2}=1-5\cdot e^{-2}\approx 0{,}323.$$

Следующая теорема позволяет определять точность «пуассоновского» приближения.

Теорема 2 (интегральная предельная теорема Пуассона). *В схеме Бернулли для любого* $n \in N$, *любого* $p \in (0;1)$ *и для любого числового множества* B *справедливо неравенство*

$$\left| \mathrm{P}(\mu_n \in B) - \sum_{m \in B} \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} \right| \le \frac{a^2}{n}, \text{ где } a = np.$$

Справедливо также следующее неравенство

$$\sup_k \left| P_n(k) - \frac{a^k e^{-a}}{k!} \right| \le \frac{2a}{n} \min(2, a).$$

Теоремы, которые приводятся ниже, дают асимптотическую формулу для рассматриваемых вероятностей при p не близких к 0 или 1.

Теорема 3 (локальная предельная теорема Муавра – Лапласа). *Если в схеме Бернулли* $\sigma = \sqrt{npq} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, *то для любого* $C > 0$ *равномерно по всем* x,

$$x \in \left\{ x \in R : |x| \le C,\ x = \frac{m - np}{\sigma},\ m \in N \cup \{0\} \right\},$$

справедливо соотношение

$$\mathrm{P}\left\{ \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} = x \right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1 + o(1)),$$

где $o(1)$ *– бесконечно малая величина при* $\sigma \to \infty$.

Теорема 4 (интегральная предельная теорема Муавра – Лапласа). *При выполнении условий теоремы 3 равномерно по* $-\infty \le a < b \le +\infty$ *выполнено предельное соотношение*

$$\mathrm{P}\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sigma} \le b \right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Теорема Берри – Эссеена утверждает, что в интегральной предельной теореме Муавра – Лапласа

$$\sup_{x \in R} \left| \mathrm{P}\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le x \right) - \Phi(x) \right| \le \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}},$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$. (Значения функции Φ протабулированы, см. табл. прил. 2.)

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Из урны, содержащей 4 пронумерованных шара, последовательно вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Известно, что первый вынутый шар с номером 1, а последний – с номером 4. Вероятность того, что номера вынутых шаров будут расположены по возрастанию, равна: 1) 1/4; 2) 1/2; 3) 1/6; 4) 3/4.

2. Игральная кость бросается 6 раз. Известно, что первый раз выпала единица, второй – двойка, третий – тройка. Какова вероятность того, что при каждом броске выпадет разное число очков? Выбрать правильный ответ: 1) 1/36; 2) 1/6!; 3) 1/6; 4) 1/12.

3. Из урны, содержащей 5 пронумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Известно, что шар с номером три был вынут раньше, чем шар с номером четыре. Тогда вероятность того, что последним был вынут шар с номером пять, равна: 1) 1/5!; 2) 1/5; 3) 1/2; 4) 1.

4. Игральная кость бросается два раза. Определить вероятность того, что два раза выпадет одно и то же число, при условии, что первый раз выпала «1».

5. Монета брошена 10 раз. Найти вероятность выпадения 5 гербов, при условии, что все четные подбрасывания закончились выпадениями решки.

6. Пусть случайные события A и B рассматриваются на одном и том же вероятностном пространстве, причем $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Тогда

1) $\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\overline{A}|B) = 1$; 3) $\mathrm{P}(A|\overline{B}) + \mathrm{P}(\overline{A}|B) = 1$;

2) $\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\overline{A}|\overline{B}) = 1$; 4) $\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(A|\overline{B}) = 1$.

7. Из тщательно перемешанной колоды из 52 карт достали одну. Найти вероятность, что это дама, при условии, что вынута карта бубновой масти.

8. Пусть $\mathrm{P}(A) = 0$, а B – произвольное случайное событие, рассматриваемое на том же вероятностном пространстве, что и A. Тогда: 1) события A и B несовместны; 2) события A и B независимы; 3) наступление события A влечет наступление события B; 4) события A и B противоположны.

9. Монета брошена 1000 раз. Чему равна вероятность того, что герб выпадет 500 раз?

10. Игральная кость брошена 5000 раз. Чему равна вероятность того, что четное число очков выпало не менее 1000 раз?

11. Монета брошена 8000 раз. Чему равна вероятность выпадения герба не более 700 раз?

12. В квартире 4 электролампочки. Лампочки выходят из строя независимо друг от друга. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется исправной за год, равна 5/6. Какова вероятность, что за год придется заменить ровно две лампочки?

13. В квартире 6 электролампочек. Лампочки выходят из строя независимо друг от друга. Для каждой лампочки вероятность того, что она выйдет из строя за год, равна 1/8. Какова вероятность, что за год придется заменить хотя бы три лампочки?

14. В схеме Бернулли проведено 3 независимых испытания. Вероятность того, что ни разу не произошел «успех», равна вероятности того, что «успех» наступил ровно один раз. Найти вероятность «успеха».

15. В схеме Бернулли проведено 3 независимых испытания. Вероятность того, что ни разу не произошел «успех», равна вероятности того, что «успех» наступил ровно три раза. Найти вероятность «успеха».

16. Тест состоит из 20 вопросов. На каждый вопрос даны 5 возможных ответов, среди которых ровно один правильный. Какова вероятность, что методом простого угадывания удастся ответить, по крайней, мере на 15 вопросов?

17. События A, B и C независимы в совокупности. Будут ли независимыми события $A \bigcap B$ и C?

18. События A, B и C попарно независимы. Будут ли независимыми события $A \bigcup B$ и C?

19. Группа из 18 стрелков разбита на подгруппы. В первой подгруппе 5 стрелков. Для каждого из них вероятность попадания в мишень равна 0,8. Во второй подгруппе 7 стрелков. Для каждого из них вероятность попадания в мишень равна 0,7. В третьей 4 стрелка. Для каждого из них вероятность попадания в мишень равна 0,6. И в четвертой – 2 стрелка с вероятностью попадания 0,5. Один из 18 стрелков выстрелил и попал в мишень. Вероятнее всего он из: 1) первой подгруппы; 2) второй подгруппы; 3) третьей подгруппы; 4) четвертой подгруппы.

20. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар. После этого из нее наудачу извлекают один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Ответы к тестовым заданиям

1. 2). **2.** 1). **3.** 2). **4.** 1/6. **5.** 1/32. **6.** 1). **7.** 1/13. **8.** 2). **9.** $\dfrac{C_{1000}^{500}}{2^{1000}}$.

10. $\dfrac{\sum_{k=1000}^{5000} C_{5000}^k}{2^{5000}}$. **11.** $\dfrac{\sum_{k=0}^{700} C_{8000}^k}{2^{8000}}$. **12.** $C_4^2 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^2$. **13.** $\sum_{k=3}^{6} C_6^k \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^k \cdot \left(\dfrac{7}{8}\right)^{6-k}$.

14. 0,25. **15.** 0,5. **16.** $\sum_{k=15}^{20} C_{20}^k \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^{20-k}$. **17.** Да. **18.** Вообще говоря, нет.

19. 2). **20.** 2/3.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

(6 часов)

Тема: Независимость. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Необходимые понятия и теоремы: условная вероятность, теоремы умножения, формулы полной вероятности и Байеса, попарная независимость и независимость в совокупности событий, независимые испытания, схема Бернулли и биномиальные вероятности, полиномиальная схема и полиномиальные вероятности, локальная и интегральная предельные теоремы Пуассона, локальная и интегральная предельные теоремы Муавра – Лапласа.

Литература: [3] с. 21–24, 35–38, 115–123; [5] с. 42–49, 100–104; [6] с. 54–69, 72–106; [10] с. 16–20; [12] с.12–18; [16] с. 38–53; [20] с. 14–18, 24–29; [21] с. 26–39, 65–75; [22, т. 1] с. 132–206; [23] с. 27–34; [25] с.37–64; [26] с. 29–43, 67–81.

Задание 2.1. Точка случайным образом брошена на плоскость. Вероятность попадания точки в квадрат

$$K_{ij} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : i \le x_1 < i+1, j \le x_2 < j+1\}$$

равна p_{ij}; $i, j = 0, \pm 1, \ldots$, где $p_{00} = 0$ и $p_{ij} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^{|i|}} \cdot \frac{1}{3^{|j|}}$, когда $i^2 + j^2 \ne 0$.

Пусть

$$A = \bigcup_{i=m_1}^{m_2} \bigcup_{j=n_1}^{n_2} K_{ij}, \quad B = \bigcup_{i=k_1}^{k_2} \bigcup_{j=l_1}^{l_2} K_{ij}.$$

1) Описать в этом эксперименте наименьшую алгебру и σ-алгебру тех подмножеств $\mathbb{R}^2$, для которых определена вероятность попадания в них точки в данном эксперименте.

2) Построить пополнение σ-алгебры из предыдущего пункта.

3) Найти условные вероятности: $\mathrm{P}(A|B)$ и $\mathrm{P}(B|A)$.

№ п/п	m_1	m_2	n_1	n_2	k_1	k_2	l_1	l_2	R
1	0	2	1	3	1	3	2	4	2
2	–1	2	0	2	0	2	0	4	1
3	1	4	1	2	3	5	0	3	2
4	0	1	0	5	–2	3	2	3	3
5	1	2	1	4	1	3	3	4	2
6	0	1	0	5	0	3	4	5	3
7	0	2	0	2	0	4	1	2	2
8	2	3	0	4	0	3	3	4	3
9	1	5	1	4	1	6	1	2	4
10	1	2	1	4	2	6	1	2	3

Задание 2.2. Из N студентов, находящихся в аудитории, k_1 изучают английский, k_2 – французский и k_3 – немецкий язык. Одновременно английский и французский изучают q_1 студентов, английский и немецкий – q_2, французский и немецкий – q_3 студентов. Все три языка изучают q студентов. Один из студентов вышел из аудитории. Рассмотрим три события:

E = {вышедший знает английский};

F = {вышедший знает французский};

D = {вышедший знает немецкий}.

1) В каких парах события являются независимыми: (E, F), (E, D), (F, D)?

2) Являются ли события E, F, D независимыми в совокупности?

3) Какие элементарные события в этом эксперименте и чему равны их вероятности?

№ п/п	N	k_1	k_2	k_3	q_1	q_2	q_3	q
1	36	24	16	12	8	6	4	2
2	44	30	12	20	6	10	4	2
3	30	12	9	24	3	8	6	2
4	24	12	16	11	6	8	3	2
5	24	10	12	15	4	5	6	2
6	27	15	24	10	12	10	8	8
7	26	18	19	16	12	8	9	2
8	25	15	20	12	10	6	8	2
9	60	40	36	25	24	10	9	2
10	58	20	48	45	16	15	36	12

Задание 2.3. Прямоугольник

$$\Pi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 < m, 0 \le x_2 < n\}$$

разбит на равные квадраты

$$K_{ij} = \{x = (x_1, x_2) : i \le x_1 < i+1, j \le x_2 < j+1\} \quad i = 0, 1, ..., m-1; \quad j = 0, 1, ..., n-1.$$

Точка случайным образом брошена на плоскость $\mathbb{R}^2$. Вероятность попадания в прямоугольник Π равна p. Если же точка попала в прямоугольник Π, то вероятность ее попадания в квадрат K_{ij} равна p_{ij} ($\sum p_{ij} = 1$). Если же точка попала в квадрат K_{ij}, то вероятность ее попадания в область $G \subseteq K_{ij}$ равна площади этой области. Определить вероятность попадания точки в область $V \subseteq \Pi$.

№ п/п	p	m	n	p_{ij}	$(x_1, x_2) \in V$
1	1/2	3	4	$(i+j)/30$	$1 \le x_1 < 3$, $0 \le x_2 < 2x_1/3$
2	1/3	4	3	$ij/18$	$0 \le x_1 < 4$, $x_1/2 \le x_2 < 3$
3	1/4	5	2	$(i^2+j^2)/85$	$2 \le x_1 < 4$, $0 \le x_2 < 2x_1/5$
4	1/5	2	5	$\|i-j\|/17$	$0 \le x_1 < 2$, $x_1 \le x_2 < 2 + x_1/2$
5	1/6	4	2	$\|i^2-j^2\|/26$	$1 \le x_1 < 4$, $0 \le x_2 < 2(x_1-1)/3$
6	2/3	2	4	$\|i^2-j\|/10$	$0 \le x_1 < 2$, $x_1/2+1 \le x_2 < 4-x_1$
7	3/4	3	3	$(\|i-1\|+\|j-1\|)/12$	$0 \le x_1 < 3$, $0 \le x_2 < x_1/3$
8	2/5	4	4	$\|i-j\|/20$	$0 \le x_1 < 4$, $0 \le x_2 < x_1/4+1$
9	3/5	2	2	$(1+(i+j)^2)/10$	$1 \le x_1 < 2$, $x_1^2 \le x_2 < 2$
10	4/5	2	3	$(1+ij)/9$	$1 \le x_1 < 2$, $0 \le x_2 < 3x_1^3/8$

Задание 2.4. В магазин поступили телевизоры с трех заводов: n_1, n_2 и n_3 телевизоров соответственно. Вероятность брака на этих заводах p_1, p_2 и p_3. Покупатель выбрал телевизор, но он оказался бракованным и его отослали обратно на завод.

1) Найти вероятность того, что бракованный телевизор принадлежит первому (второму, третьему) заводу.

2) Найти вероятность выбора покупателем исправного телевизора из оставшихся в магазине. Насколько увеличилась эта вероятность по сравнению с вероятностью выбора исправного телевизора при первой попытке?

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_1	20	30	20	10	10	20	30	10	20	60
n_2	30	40	30	30	40	30	40	30	50	50
n_3	50	50	40	60	50	60	60	70	70	10
p_1	0,05	0,04	0,05	0,04	0,03	0,05	0,04	0,02	0,08	0,03
p_2	0,06	0,07	0,06	0,06	0,09	0,07	0,03	0,08	0,09	0,04
p_3	0,07	0,02	0,08	0,09	0,08	0,09	0,08	0,09	0,07	0,05

Задание 2.5. Производится n независимых испытаний. В каждом испытании возможны два исхода: либо с вероятностью p происходит событие A («успех»), либо с вероятностью $1-p$ не происходит («неуспех»). Пусть μ – число «успехов» в данных n испытаниях.

1) Найти $P(m_1 \le \mu \le m_2)$.

2) Найти $P(m_1 \le \mu \le m_2)$, используя локальную предельную теорему Пуассона.

3) Найти $P(m_1 \le \mu \le m_2)$, используя локальную предельную теорему Муавра – Лапласа.

4) Найти $P(m_1 \le \mu \le m_2)$, используя интегральную предельную теорему Муавра – Лапласа.

Сравнить полученные результаты.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
p	9/10	1/2	1/80	1/90	1/100	1/110	1/120	1/200	1/500	1/1000
m_1	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
m_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

Задачи

1. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, $B \in \mathscr{A}$, $P(B) > 0$. Обозначим $P_B(A) = P(A \mid B)$ для $A \in \mathscr{A}$. Доказать, что функция $P_B : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ является вероятностью.

2. Обозначим $\mathscr{A}_B = \mathscr{A} \cap B = \{A \cap B : A \in \mathscr{A}\}$. Доказать, что $(B, \mathscr{A}_B, P_B)$ – вероятностное пространство, где P_B из предыдущей задачи.

3. Игральная кость бросается n раз. Найти вероятность того, что последовательность выпавших очков монотонно убывает.

4. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что на обоих выпали пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на 5.

5. Бросают три кости. Какова вероятность того, что на одной из них выпадает единица, если на всех трех костях выпали разные грани?

6. Из колоды карт (36 карт) вынимают три карты. Найти вероятность того, что они красные, если среди них присутствует ровно одна дама.

7. Из 100 карточек с числами 00, 01, ..., 99 случайно выбирается одна. Пусть η_1 и η_2 – соответственно сумма и произведение цифр на выбранной карточке. Найти $P(\eta_1 = k \mid \eta_2 = 0)$, $k = 0, ..., 18$.

8. Даны $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap C)$, $P(A \cap B \cap C)$. Найти $P(C|A \cap B)$.

9. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпала «1», если известно, что на второй кости выпало число очков больше, чем на первой?

10.* Разыскивая специальную книгу, студент решил обойти три библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в ее фондах книга или нет. И если книга есть, то одинаково вероятно, занята она другим читателем или нет. Что более вероятно – достанет студент книгу или нет, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

11.* Учителю и учащимся некоторого класса задаются вопросы. Вероятность того, что ответ учителя будет правильным, равна α. Вероятность правильного ответа учащегося равна β или γ, в зависимости от того, кто отвечал – мальчик или девочка. Вероятность того, что ответ случайно выбранного учащегося совпадет с ответом учителя, равна 1/2. Найти отношение числа мальчиков к числу девочек в классе.

12.* В урне находятся n белых и m черных шаров, а рядом с урной – ящик с черными шарами. Из урны наугад вынимается пара шаров; если они оказались одноцветными, то черный шар из ящика перекладывается в урну; если разноцветными, то белый шар возвращается в урну. Операция повторяется до тех пор, пока в урне останется один шар. Какова вероятность того, что он будет черный?

13. В квадрате $\{(x_1,x_2):0\le x_1,x_2\le 1\}$ выбирается случайная точка $\xi=(\xi_1,\xi_2)$. Пусть

$$A_1=\{\xi_1\le 1/2\},\ A_2=\{\xi_2\le 1/2\},\ A_3=\{(\xi_1-1/2)(\xi_2-1/2)\le 0\}.$$

Независимы ли события A_1, A_2, A_3 в совокупности? Попарно?

14. Доказать, что если A и B независимы, то независимы A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

15. Доказать, что если $0<\mathrm{P}(B)<1$ и $\mathrm{P}(A\,|\,B)=\mathrm{P}(A\,|\,\overline{B})$, то события A и B независимы.

16. Пусть A и B независимы, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\Delta B)=p$ и $\mathrm{P}(A\setminus B)<p$. Найти $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$ и $\mathrm{P}(A\setminus B)$.

17. Пусть событие A таково, что оно не зависит от самого себя. Показать, что $\mathrm{P}(A)$ равно 0 или 1.

18. Пусть событие A таково, что $\mathrm{P}(A)$ равно 0 или 1. Показать, что A и любое событие B независимы.

19. Пусть A и B – независимые события и $\mathrm{P}(A\cup B)=1$. Доказать, что либо A, либо B имеет вероятность равную 1.

20. Пусть A и B – независимые события. Доказать, что если $A\cup B$ и $A\cap B$ независимы, то либо $\mathrm{P}(A)=1$, либо $\mathrm{P}(B)=1$, либо $\mathrm{P}(A)=0$, либо $\mathrm{P}(B)=0$.

21. События A и B несовместны. Будут ли они независимыми?

22. Подбрасываются три игральные кости. Событие A состоит в том, что одинаковое число очков выпало на первой и второй костях, событие B – одинаковое число очков на второй и третьей костях, C – на первой и третьей. Будут ли события A, B и C: а) попарно независимы; б) независимы в совокупности?

23. Пусть A и B – независимые события, а событие C не зависит от событий $A \bigcap B$ и $A \bigcup B$. Обязаны ли события A, B и C быть попарно независимыми?

24. Пусть события A и B_1, а также события A и B_2 независимы. Доказать, что события A и $B_1 \bigcup B_2$ независимы тогда и только тогда, когда события A и $B_1 \bigcap B_2$ независимы.

25. Вытекает ли из равенства $\mathrm{P}(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2) \cdot \mathrm{P}(A_3)$ попарная независимость A_1, A_2 и A_3?

26. Пусть A_1, ..., A_n – независимые в совокупности события. Доказать, что

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\overline{A}_k).$$

27. Пусть A и B – независимые события. В терминах вероятностей этих событий выразить вероятности событий, состоящих в том, что произойдет в точности k, по меньшей мере k и самое большее k из событий A и B $(k = 0,\ 1,\ 2)$.

28. Имеются три попарно независимых события, которые, однако, вместе произойти не могут. Пусть все они имеют одинаковую вероятность p. Найти наибольшее возможное значение p.

29.* Пусть события A и B независимы. Верно ли, что $\mathrm{P}(A \bigcap B \mid C) =$ $= \mathrm{P}(A \mid C)\mathrm{P}(B \mid C)$, где C произвольное событие, имеющее ненулевую вероятность?

30.* Предположим, что $A, B, C_1, ..., C_n$ – события некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Пусть для любого $i = 1, 2, ..., n$ имеются неравенства $\mathrm{P}(C_i) > 0$, $\mathrm{P}(A \mid C_i) \ge \mathrm{P}(B \mid C_i)$, причем $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i = \Omega$. Верно ли, что $\mathrm{P}(A) \ge \mathrm{P}(B)$?

31.* Привести пример четырех зависимых событий A_1, A_2, A_3 и A_4, таких, что любые три из них являются независимыми в совокупности.

32.* Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ – вероятностное пространство, $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{A}$ – σ-алгебра, содержащая все множества нулевой вероятности из $\mathscr{A}$, событие $A \in \mathscr{A}$. Для каждого события B, независимого с σ-алгеброй $\mathscr{F}$, события A и B независимы. Верно ли, что $A \in \mathscr{F}$?

33.* Отрезок $[0;1]$ случайной точкой делится на две части, из которых выбирается одна. Пусть η – длина выбранной части. Найти $\mathrm{P}(\eta \le x)$, $x \in \mathbb{R}$.

34. Монета бросается n раз. Событие A состоит в том, что герб выпадет не более одного раза. Событие B состоит в том, что герб и решка выпадает не менее одного раза каждый. Покажите, что:

1) при $n = 2$ события A и B зависимы;

2) при $n = 3$ события A и B независимы;

3) при $n = 4$ события A и B зависимы.

35. При раздаче колоды в 52 карты четырем игрокам (по 13 карт каждому) один из них три раза подряд не получил тузов. Есть ли у него основание жаловаться на невезение? (Будем считать, что основание есть, если описанное событие имеет вероятность менее 0,01.)

36. Сколько нужно взять случайных цифр (предполагается, что каждая цифра может быть выбрана с одинаковой вероятностью), чтобы вероятность появления среди них цифры 5 была не меньше 0,9?

37. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятности того, что:

1) первый студент взял «хороший» билет;

2) второй студент взял «хороший» билет;

3) оба студента взяли «хорошие» билеты.

38. Из урны, содержащей N_1 белых шаров, N_2 черных и N_3 красных, последовательно без возвращения извлекают шары до тех пор, пока не появится красный шар. Найти вероятность следующих событий:

1) вынуто n_1 белых шаров и n_2 черных;

2) не появилось ни одного белого шара;

3) вынуто всего k шаров.

39. Из урны, содержащей 5 белых и 4 черных шара, наугад переложено 2 шара в урну, содержащую 2 белых и 2 черных шара. Найти вероятность вынуть наугад после этого из второй урны белый шар.

40. В первой урне находится 1 белый и 9 черных шаров, а во второй – 5 белых и 1 черный. Из каждой урны удалили по одному шару, а оставшиеся ссыпали в третью урну. Найти вероятность, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

41. В стройотряде 70 % первокурсников и 30 % студентов второго курса. Среди первокурсников 10 % девушек, а среди студентов второго курса – 5 %. Девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.

42. Имеется n урн, в каждой из которых a белых и b черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, затем из второй в третью один шар и т. д. Затем из последней урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.

43. Имеется 5 урн. В 1-й, 2-й и 3-й урнах находится по 2 белых и 3 черных шара; в 4-й и 5-й – по 1 белому и 1 черному шару. Случайно выбирается урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность того, что выбрана 4-я или 5-я урна, если извлеченный шар оказался белым?

44. В сосуд, содержащий n шаров (шары белые и черные; с вероятностью $1/(n+1)$ белых шаров ровно k, $k = 0, ..., n$), опущен белый шар. Найти вероятность вынуть после этого белый шар из данного сосуда.

45. В первой урне N_1 белых и M_1 черных шаров, во второй – N_2 белых и M_2 черных шаров и в третьей урне – N_3 белых и M_3 черных. Из первой урны наудачу извлекают один шар и перекладывают во вторую урну. Затем перекладывают один шар из второй урны в третью и, наконец, из третьей в первую. С какой вероятностью состав шаров в первой урне останется прежним?

46. Орудийная батарея состоит из четырех орудий: два орудия попадают в цель при одном выстреле с вероятностью 0,6, а два других – с вероятностью 0,7. Для поражения цели достаточно двух попаданий, а при одном попадании вероятность поражения цели равна 0,8. Одно из орудий стреляло дважды. Найти вероятность поражения цели.

47. Три охотника одновременно выстрелили по волку. Вероятности попадания каждым из охотников одинаковы и равны 0,4. Найти вероятность того, что волк будет убит, если известно, что при одном попадании охотники убивают волка с вероятностью 0,2; при двух – с вероятностью 0,5; при трех – с вероятностью 0,8.

48. Каждую секунду с вероятностью p независимо от других моментов времени по дороге проезжает автомашина. Пешеходу для перехода дороги необходимо три секунды. Какова вероятность того, что подошедший к дороге пешеход будет ожидать возможности перехода: а) три секунды; б) четыре секунды; в) пять секунд?

49. Сообщение, передаваемое по каналу связи, составляется из трех знаков A, B, C. Из-за помех каждый знак принимается правильно с вероятностью 0,6 и принимается ошибочно за любой из двух знаков с вероятностью 0,2. Для увеличения вероятности правильного приема каждый знак передается пять раз. За переданный знак принимается знак, который чаще всего встречается в принятой пятерке знаков. Если наиболее частых знака два, то из них выбирается равновероятно один. Найти вероятность правильного приема знака при указанном способе передачи.

50. По самолету производятся четыре независимых выстрела. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,1. Чтобы вывести самолет из строя, достаточно трех попаданий. При одном попадании вероятность вывода самолета из строя равна 0,6, при двух – 0,8. Найти вероятность того, что самолет будет выведен из строя.

51. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0,6, стрелок B – с вероятностью 0,5 и стрелок C – с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени, и две пули попали в цель. Что вероятнее: попал стрелок C в мишень или нет?

52. Из множества чисел $\{1, 2, ..., N\}$ по схеме случайного выбора без возвращения выбираются три числа. Найти вероятность того, что третье число попадет в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.

53. Известно, что 5 % всех мужчин и 0,25 % всех женщин – дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Найти вероятность того, что это мужчина.

54. По каналу связи передается одна из последовательностей *AAAA*, *BBBB*, *CCCC* с вероятностями 0,3, 0,4, 0,3 соответственно. Каждая передаваемая буква принимается правильно с вероятностью 0,6 и с вероятностями 0,2 и 0,2 принимается за две другие буквы. Буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана *AAAA*, если принята *ABCA*.

55. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно, 1 – плохо. В экзаменационных билетах 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на 20 вопросов, хорошо подготовленный студент – на 16 вопросов, посредственно подготовленный студент – на 10 вопросов, плохо подготовленный студент – на 5 вопросов. Вызванный студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен: 1) отлично; 2) хорошо; 3) посредственно; 4) плохо.

56. В урне первоначально находилось N белых и M черных шаров. Один шар потерян, и цвет его неизвестен. Из урны без возвращения извлечены два шара и оба оказались белыми. Определить вероятность того, что потерян белый шар.

57. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна $1-\beta$. Вероятность принять здорового человека за больного равна α. Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна γ. Найти вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании.

58. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1, втором – с вероятностью p_2, третьем – с вероятностью p_3. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, закинул удочку три раза, а рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

59. При приеме партии подвергается проверке половина изделий. Условия допускают не более двух процентов бракованных изделий. Найти вероятность того, что партия из ста изделий, содержащая 5 % брака, будет принята.

60. В партии из пятидесяти деталей число бракованных не превосходит двух, причем все значения 0, 1, 2 равновероятны. Зная, что пять наугад взятых деталей оказались годными, найти вероятность того, что все оставшиеся детали также годны.

61. Два игрока независимым образом подбрасывают (каждый свою) симметричные монеты. Показать, что вероятность того, что у каждого после n подбрасываний будет одно и то же число гербов, равна

$$2^{-2n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2.$$

Вывести равенство

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2.$$

62. Игрок A бросает 6 игральных костей и выигрывает, если выпадает хотя бы одна единица; игрок B бросает 12 игральных костей и выигрывает, если выпадают хотя бы две единицы. У кого больше вероятность выиграть?

63. В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что из 10 точек, брошенных внутрь круга, 4 попадут в квадрат, 3 – в один сегмент и по одной – в оставшиеся 3 сегмента?

64. В семье 10 детей. Вероятности рождения мальчика и девочки равны 1/2. Найти вероятность того, что число мальчиков заключено между 3 и 8.

65. Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях ровно два раза выпадет по две единицы.

66. В автобусе едут n пассажиров. На следующей остановке каждый из них выходит с вероятностью p; кроме того, в автобус с вероятностью p_0 не входит ни один новый пассажир; с вероятностью $(1-p_0)$ – один новый пассажир. Найти вероятность того, что, когда автобус снова тронется в путь после следующей остановки, в нем будет по-прежнему n пассажиров.

67. Найти вероятность того, что в $2n$ испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p и неудачи $1-p$ появится $m+n$ успехов и все испытания с четными номерами закончатся успехом.

68. В одном из матчей на первенство мира по шахматам между двумя участниками игралось несколько партий, и игра шла до тех пор, пока один из участников матча не набрал 6 очков (выигрыш – 1 очко, проигрыш и ничья – 0 очков). Считая участников матча одинаковыми по силе, а результаты отдельных игр независимыми, найти вероятность того, что при таких правилах в момент окончания матча проигравший набирает k очков, $k = 0, 1, \ldots, 5$.

69. Двое по очереди бросают монету. Выигрывает тот, у кого первым выпадет герб. Найти вероятность событий: а) игра заканчивается до четвертого бросания; б) выигрывает начавший игру (первый игрок); в) выигрывает второй игрок.

70. В схеме Бернулли p – вероятность исхода 1, $q = 1-p$ – вероятность исхода 0. Найти вероятность того, что при бесконечном числе испытаний цепочка 00 появится ранее цепочки 01.

71. При прохождении одного порога байдарка не получает повреждений с вероятностью p_1, полностью ломается с вероятностью p_2, получает серьезные повреждения с вероятностью p_3 $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$. Два серьезных повреждения приводят к поломке. Найти вероятность того, что при прохождении n порогов байдарка не будет полностью сломана.

72. Какова вероятность получить каждое число очков дважды при бросании 12 игральных костей?

73. На механико-математическом факультете обучается 1200 студентов. Считая, что день рождения случайно выбранного студента приходится на один определенный день года из 365 дней с вероятностью 1/365. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 5 марта.

74. Десять раз бросается игральная кость. Какова вероятность того, что шестерка выпадает ровно три раза, а пятерка – хотя бы один раз?

75. На отрезок AB длиной c брошены наудачу независимо одна от другой шесть точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от A на расстоянии меньшем a, одна – на расстоянии $a < r < b < c$, а три точки – на расстоянии большем b.

76. Имеется группа из k космических объектов, каждый из которых независимо от других обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью p. За группой объектов ведут наблюдение независимо друг от друга m радиолокационных станций. Найти вероятность того, что не все объекты, входящие в группу, будут обнаружены.

77.* При переливании крови надо учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно переливать кровь любой группы, человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно переливать только кровь первой группы. Среди населения 35,7 % имеет первую, 34,5 % – вторую, 21,9 % – третью и 7,9 % – четвертую группы крови.

1) Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

2) Найти вероятность того, что переливание можно осуществить, если имеется n случайных доноров, группы крови которых известны.

78.* Из множества $S=\{1,2,...,N\}$ выбираются два подмножества A_1 и A_2 так, что каждый элемент из S независимо от других элементов и независимо от i включается в подмножество A_i с вероятностью p, а с вероятностью $1-p$ не включается. Найти вероятность того, что: а) $A_1 \bigcap A_2 = \varnothing$; б) $A_1 \bigcap A_2$ содержит ровно k элементов, $0 \le k \le N$.

79.* Семь шаров случайным образом распределяются по семи ящикам. Известно, что ровно два ящика оказались пустыми. Найти вероятность того, что в одном из ящиков окажется три шара.

80.* Задача о пьянице. Пьяница стоит на расстоянии одного шага от края утеса. Он шагает случайным образом либо к краю утеса, либо от него. На каждом шаге вероятность отойти от края равна p, а шаг к краю утеса имеет вероятность $q=1-p$. Чему равна вероятность того, что пьяница не избежит падения?

81. В урне M шаров, из которых M_1 белого цвета. Рассматривается выборка объемом n. Пусть B_j – событие, состоящее в том, что извлеченный на j-ом шаге шар белого цвета, а A_k – событие, состоящее в том, что в выборке объема n имеется ровно k белых шаров. Покажите, что как для выбора с возвращением, так и для выбора без возвращения

$$\mathrm{P}(B_j \mid A_k) = \frac{k}{n}.$$

82. Докажите, что в теореме Пуассона имеет место следующая скорость сходимости:

$$\sup_k \left| P_n(k) - \frac{a^k e^{-a}}{k!} \right| \le \frac{2a^2}{n}.$$

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Понятие случайной величины – одно из основных в теории вероятностей. Интуитивно случайная величина – это величина, принимающая те или иные значения в зависимости от случая. Примеры случайных величин: число очков, выпадающих при однократном подбрасывании игральной кости, число бракованных среди взятых наугад n изделий, число попаданий в цель при n выстрелах и т. д. Следующее определение формализует интуитивные представления.

О п р е д е л е н и е 1. *Пусть* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ *– произвольное вероятностное пространство. Случайной величиной называется такая функция* $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, *что для любого* $c \in \mathbb{R}$

$$\{\omega \in \Omega\colon \xi(\omega) \le c\} \in \mathscr{A}. \tag{1}$$

Таким образом, случайная величина – это числовая измеримая функция. Напомним, что условие (1) – условие измеримости функции.

В дальнейшем будем использовать также другое определение случайной величины, эквивалентное приведенному выше.

О п р е д е л е н и е 2. *Случайной величиной называется такая функция* $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, *что для любого борелевского множества* $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\xi^{-1}(B) \in \mathscr{A}. \tag{2}$$

Здесь по определению

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega\colon \xi(\omega) \in B\}.$$

П р и м е р 1. Бросается симметричная монета. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ зададим таким образом: $\Omega = \{\text{г}, \text{р}\}$, где $\{\text{г}\}$ – событие, состоящее в том, что выпал герб; $\{\text{р}\}$ – событие, состоящее в том, что выпала решка. В таком случае $\mathscr{A} = \{\varnothing, \Omega, \{\text{г}\}, \{\text{р}\}\}$ и $\mathrm{P}(\{\text{г}\}) = \mathrm{P}(\{\text{р}\}) = 1/2$. На этом вероятностном пространстве определим функцию $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\xi(\text{г}) = 0$, $\xi(\text{р}) = 1$. Убедимся, что ξ – случайная величина. Несложно видеть, что для любых $c < 0$

$$\{\omega \in \Omega:\ \xi(\omega) \le c\} = \varnothing \in \mathscr{A},$$

если $0 \le c < 1$, то

$$\{\omega \in \Omega:\ \xi(\omega) \le c\} = \{\text{г}\} \in \mathscr{A},$$

и, наконец, для любых $c \ge 1$

$$\{\omega \in \Omega:\ \xi(\omega) \le c\} = \Omega \in \mathscr{A},$$

т. е. выполняется условие измеримости (1). Следовательно, ξ – случайная величина.

В качестве модельных вероятностных пространств рассматриваемого примера могут быть взяты различные вероятностные пространства. Рассмотрим два примера:

1) $\Omega = [0;\,1]$, $\{\text{г}\} = [0; 1/2]$, $\{\text{р}\} = (1/2;\,1]$, P – мера Лебега на $[0;\,1]$;

2) $\Omega = [0;\,1]$, $\{\text{г}\} = [1/4;\,3/4]$, $\{\text{р}\} = [0;\,1/4) \bigcup [3/4;\,1]$, P – мера Лебега на $[0;\,1]$.

В этих примерах случайная величина ξ является числовой функцией, принимающей значения 0 и 1 на множествах $\{\text{г}\}$ и $\{\text{р}\}$ соответственно. Тогда график функции (случайной величины) ξ можно изобразить двумя способами (рис. 6).

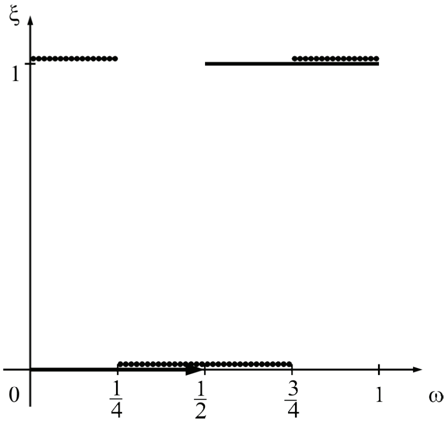

Рис. 6

Более того, если учесть, что в качестве множества $\{\text{г}\}$ можно взять любое подмножество отрезка $[0;\,1]$, мера Лебега которого равна $1/2$, а в качестве $\{\text{р}\}$ – его дополнение: $\{\text{р}\} = [0;\,1] \setminus \{\text{г}\}$, то придем к тому, что одна и та же случайная величина ξ как числовая функция может иметь бесконечное число графиков в зависимости от способа ее моделирования. Заметим также, что множество $\{r\}$ на отрезке $[0;1]$ выбирается случайным образом (в силу специфики исходной задачи), поэтому элемент случайности присущ и самим графикам.

Подытоживая все вышесказанное, приходим к выводу: функция ξ – числовая измеримая функция, значения которой в силу случайного расположения элементов из области определения Ω являются случайными числами.

П р и м е р 2. На отрезок $[0;1]$ числовой прямой наугад бросают частицу, причем считают, что все положения частицы одинаково возможны.

Вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ зададим стандартным образом: $\Omega = [0;1]$, $\mathscr{A} = \mathscr{B}([0;1])$ – борелевская σ-алгебра на $[0;1]$, P – мера Лебега.

Определим функцию $\xi:\ \Omega \to \mathbb{R}$ следующим образом: $\xi(\omega) = \omega$ для любых $\omega \in \Omega$. Заметим, что

$$\{\omega \in \Omega:\ \xi(\omega) \le c\} = \begin{cases} \varnothing \in \mathscr{A}, & c < 0, \\ [0;c] \in \mathscr{A}, & 0 \le c < 1, \\ \Omega \in \mathscr{A}, & c \ge 1, \end{cases}$$

т. е. ξ – случайная величина.

П р и м е р 3. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ – произвольное вероятностное пространство, A – некоторое случайное событие $(A \in \mathscr{A})$ и

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Так как

$$\{\omega \in \Omega:\ \xi(\omega) \le c\} = \begin{cases} \varnothing, & c < 0, \\ \overline{A}, & 0 \le c < 1, \\ \Omega, & c \ge 1, \end{cases}$$

то $\{\omega \in \Omega:\ \xi(\omega) \le c\} \in \mathscr{A}$ для любых $c \in \mathbb{R}$, т. е. I_A – случайная величина.

Случайную величину I_A называют *индикатором случайного события* A.

Можно показать, что если в примере 3 $A \notin \mathscr{A}$, то функция I_A не является случайной величиной.

О п р е д е л е н и е 3. *Функцией распределения случайной величины* ξ *называется функция* $F_\xi:\ \mathbb{R} \to [0;1]$ *такая, что для любых* $x \in \mathbb{R}$

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega:\ \xi(\omega) \le x\}). \qquad (3)$$

Корректность определения 3 непосредственно вытекает из условия (1). Отметим, что функция распределения случайной величины – неслучайная числовая функция.

П р и м е р 4. Найдем функцию распределения случайной величины ξ из примера 1 и построим ее график. Несложно видеть, что для $x<0$

$$\{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) \le x\} = \varnothing,$$

если же $0 \le x < 1$, то

$$\{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) \le x\} = \{\text{г}\},$$

и, наконец, для $x \ge 1$

$$\{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) \le x\} = \Omega,$$

поэтому по определению функции распределения имеем

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty;\, 0), \\ 1/2, & x \in [0;\, 1), \\ 1, & x \in [1;\, +\infty). \end{cases}$$

График функции $F_\xi(x)$ имеет следующий вид (рис. 7).

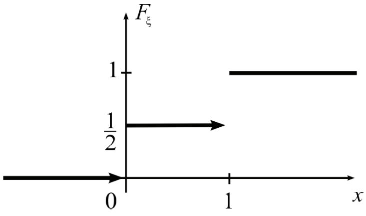

Рис. 7

Для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, справедливы следующие равенства:

1) $\mathrm{P}(a < \xi \le b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$;

2) $\mathrm{P}(\xi < b) = F_\xi(b-0)$;

3) $\mathrm{P}(\xi > b) = 1 - F_\xi(b)$;

4) $\mathrm{P}(\xi \ge b) = 1 - F_\xi(b-0)$;

5) $\mathrm{P}(a \le \xi \le b) = F_\xi(b) - F_\xi(a-0)$;

6) $\mathrm{P}(\xi = a) = F_\xi(a) - F_\xi(a-0)$;

7) $\mathrm{P}(a \le \xi < b) = F_\xi(b-0) - F_\xi(a-0)$;

8) $\mathrm{P}(a < \xi < b) = F_\xi(b-0) - F_\xi(a)$.

В следующих теоремах приводятся свойства функции распределения.

Теорема 1. *Функция распределения* $F_\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *обладает следующими свойствами*:

1) F_ξ *– монотонно неубывающая функция*;

2) $F_\xi(x)$ *непрерывна справа для любых* $x \in \mathbb{R}$;

3) $F_\xi(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$;

4) $F_\xi(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$.

Теорема 2. *Если функция* F *удовлетворяет свойствам* 1)–4) *функции распределения, то она является функцией распределения некоторой случайной величины.*

В некоторых случаях удобно пользоваться следующей характеристикой случайной величины.

Определение 4. *Распределением вероятностей случайной величины* ξ *называется такая функция*

$$P_\xi : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0; 1],$$

что для любого $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$P_\xi(B) = \mathrm{P}(\xi \in B).$$

Пример 5. Найдем распределение вероятностей случайной величины из примера 1:

1) пусть $\{0\} \in B$, $\{1\} \in B$, тогда $P_\xi(B) = 1$;

2) если $\{0\} \in B$, $\{1\} \notin B$, то $P_\xi(B) = 1/2$;

3) в случае, когда $\{0\} \notin B$, $\{1\} \in B$, $P_\xi(B) = 1/2$;

4) если $\{0\} \notin B$, $\{1\} \notin B$, то $P_\xi(B) = 0$.

Теорема 3. *Распределение вероятностей* P_ξ *однозначно определяется по функции распределения* F_ξ.

Всюду в дальнейшем по определению будем считать, что *задать случайную величину* – это значит задать ее функцию распределения или распределение вероятностей. Таким образом, каждая случайная величина дает такое отображение $\xi = \xi(\omega)$ множества Ω в числовую прямую R, которое порождает новое вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), P_\xi)$, поэтому в дальнейшем природа вероятностного пространства нас интересовать не будет.

Определение 5. *Говорят, что случайная величина* ξ *имеет распределение* Q, *если* $Q(B) = P_\xi(B)$ *при любом* $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. *Случайная величина* η *называется вырожденной, если существует такая константа* $c \in \mathbb{R}$, *что* $\mathrm{P}(\eta = c) = 1$.

Множество всех случайных величин можно разбить на три класса в зависимости от типа их распределения.

Дискретные случайные величины (распределения)

Определение 6. *Случайная величина* ξ *называется дискретной, если с вероятностью 1 она принимает не более чем счетное число значений.*

Задание такой случайной величины по определению равносильно заданию *закона распределения*:

$$\begin{matrix} \xi: & x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots, \\ \mathrm{P}: & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots, \end{matrix} \tag{4}$$

где $p_n = \mathrm{P}(\xi = x_n)$, $\sum\limits_n p_n = 1$.

Закон распределения и функция распределения взаимно-однозначно определяют друг друга. Пусть ξ имеет закон распределения (4), причем

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots .$$

Тогда по определению функции распределения имеем

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < x_1, \\ p_1, & \text{если} \quad x_1 \le x < x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{если} \quad x_2 \le x < x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3, & \text{если} \quad x_3 \le x < x_4, \\ \dots . \end{cases}$$

Следующий график (рис. 8) дает представление о найденной функции $F_\xi(x)$.

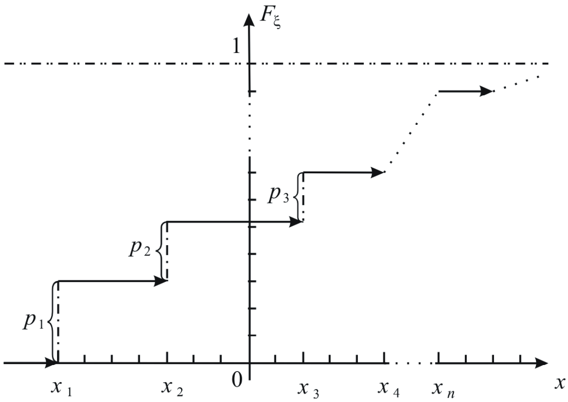

Рис. 8

Пусть теперь известна функция распределения дискретной случайной величины ξ. Тогда, учитывая, что $\mathrm{P}(\xi = x) = F_\xi(x) - F_\xi(x-0)$, легко восстанавливаем закон распределения:

$$\begin{array}{llllll} \xi: & x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots, \\ \mathrm{P}: & F_\xi(x_1) - F_\xi(x_1 - 0) & F_\xi(x_2) - F_\xi(x_2 - 0) & \dots & F_\xi(x_n) - F_\xi(x_n - 0) & \dots . \end{array}$$

Пример 6. Найдем закон распределения случайной величины, если известна функция распределения этой величины

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Закон распределения будет иметь вид

$$\begin{array}{lll} \xi: & 0 & 1, \\ \mathrm{P}: & 1/2 = F_\xi(0) - F_\xi(0-0) & 1/2 = F_\xi(1) - F_\xi(1-0). \end{array}$$

Примеры дискретных случайных величин (распределений)

1. Случайная величина Бернулли (распределение Бернулли). Закон распределения имеет вид

$$\begin{array}{llll} \xi: & 0 & 1, & \\ \mathrm{P}: & 1-p & p & (0 < p < 1). \end{array}$$

Такому распределению соответствует бросание, вообще говоря, несимметричной монеты, на одной стороне которой – 0, а на второй – 1.

2. Биномиальная случайная величина (биномиальное распределение). Закон распределения запишется следующим образом:

$$\begin{array}{llllll} \xi: & 0 & 1 & \dots & k & \dots & n, \\ \mathrm{P}: & P_n(0) & P_n(1) & \dots & P_n(k) & \dots & P_n(n), \end{array}$$

где $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Число успехов в n испытаниях схемы Бернулли имеет биномиальное распределение.

3. Случайная величина Пуассона (распределение Пуассона с параметром λ). Закон распределения задается следующим образом:

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

где $\lambda > 0$ – параметр.

Распределение Пуассона носит название *закона редких событий*, поскольку оно всегда появляется там, где производится большое число испытаний, в каждом из которых с малой вероятностью происходит «редкое» событие. По закону Пуассона распределены, например, число вызовов, поступивших на телефонную станцию, число распавшихся нестабильных частиц и т. д.

4. Геометрическая случайная величина (геометрическое распределение). Закон распределения имеет вид

$$\mathrm{P}(\xi = k) = p(1-p)^k, \ 0 < p < 1, \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots .$$

Пусть производятся независимые испытания, причем в каждом испытании возможны два исхода – «успех» с вероятностью p или «неуспех» с вероятностью $1-p$, $0 < p < 1$. Обозначим через ξ число испытаний до первого появления «успеха», тогда ξ будет геометрической случайной величиной.

5. Гипергеометрическая случайная величина (гипергеометрическое распределение). Закон распределения имеет вид

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \frac{C_L^k C_{N-L}^{n-k}}{C_N^n}, \ L \le N, \ n \le N, \max(0, n+L-N) \le k \le \min(L, n).$$

Пусть имеется множество, состоящее из N элементов. Предположим, что L из них обладают нужным свойством. Оставшиеся $N-L$ элементов этим свойством не обладают. Из данного множества случайным образом выбирается группа из n элементов. Пусть ξ – случайная величина, равная количеству выбранных элементов, обладающих нужным свойством, тогда ξ будет гипергеометрической случайной величиной.

Абсолютно непрерывные случайные величины (распределения)

Определение 7. *Распределение случайной величины ξ называется абсолютно непрерывным, а сама случайная величина – абсолютно непрерывной случайной величиной, если для любого $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$*

$$P_\xi(B) = \int_B p_\xi(x)dx, \tag{5}$$

где $p_\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – интегрируемая по Лебегу функция. Функция $p_\xi(x)$ называется плотностью распределения случайной величины ξ.

Теорема 4. *Чтобы случайная величина ξ была абсолютно непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt. \tag{6}$$

Из представления (6) видно, что функция распределения абсолютно непрерывной случайной величины является абсолютно непрерывной функцией.

Свойства плотности распределения

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(t)dt = 1$ (вытекает из того, что $F_\xi(+\infty) = 1$).

2) $p_\xi(t) \geq 0$ почти всюду по мере Лебега на прямой (следует из того, что F_ξ – монотонно неубывающая функция).

3) $F'_\xi(x) = p_\xi(x)$ почти всюду по мере Лебега на прямой (следует из представления (6)).

Теорема 5. Чтобы функция $p = p(x)$ была плотностью распределения некоторой случайной величины ξ необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла свойствам 1) и 2) плотности.

Примеры абсолютно непрерывных случайных величин (распределений)

1. Нормальная случайная величина, или случайная величина Гаусса (нормальное распределение). Случайная величина ξ имеет *нормальное распределение* (*распределение Гаусса*), если ее плотность распределения имеет вид

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Если $a = 0$, $\sigma = 1$, то данное распределение называется *стандартным нормальным распределением*.

Важная роль этого распределения объясняется тем, что оно обычно возникает в явлениях, подверженных действию большого числа малых случайных явлений. Так, математическая теория выборочного метода в статистике для расчета некоторых показателей (ошибка выборки, доверительный интервал, связь между признаками) широко использует нормальное распределение.

2. Экспоненциальная (показательная) случайная величина (экспоненциальное распределение). Случайная величина ξ имеет *экспоненциальное* (*показательное*) *распределение с параметром* λ $(\lambda > 0)$, если ее плотность имеет вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Экспоненциальному распределению подчиняется время распада атомов различных элементов. Оно обладает важным свойством – *отсутствием последействия*. Несложно убедиться в том, что вероятность распада атома за время x_2 при условии, что перед этим он уже прожил время x_1, совпадает с безусловной вероятностью распада того же самого атома за время x_2. Именно это свойство и представляет собой отсутствие последействия.

3. Равномерная на $[a; b]$ случайная величина (равномерное на отрезке $[a; b]$ распределение). *Равномерно распределенная на отрезке* $[a; b]$ *случайная величина* ξ имеет плотность распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a; b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a; b]. \end{cases}$$

Равномерное распределение реализует принцип геометрической вероятности при бросании точки на отрезок $[a; b]$.

4. Случайная величина Коши (распределение Коши). Случайная величина ξ имеет *распределение Коши*, если ее плотность представима в виде

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{c}{(x-a)^2 + c^2}, \quad c > 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если $a = 0$, $c = 1$, то данное распределение называется *стандартным распределением Коши*.

Распределение вероятностей отношения ξ_1 / ξ_2, где ξ_1, ξ_2 – независимые стандартные нормальные случайные величины, совпадает со стандартным распределением Коши. Если случайная величина α равномерно распределена на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$, то случайная величина $a + c\,\mathrm{tg}\,\alpha$ имеет распределение Коши.

5. Случайная величина Лапласа (распределение Лапласа). Случайная величина ξ имеет *распределение Лапласа*, если ее плотность представима в виде

$$p_\xi(x) = \frac{\lambda}{2} \cdot e^{-\lambda|x-a|}, \quad \lambda > 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если η – равномерно распределенная на отрезке $[0; 1]$ случайная величина, то распределение случайной величины $\xi = a - \lambda^{-1}\,\mathrm{sgn}(\eta - 0{,}5) \ln \eta$ совпадает с распределением Лапласа с параметрами λ и a. Кроме того, разность двух независимых экспоненциальных величин с одинаковым параметром λ имеет распределение Лапласа с параметрами 0 и λ.

Сингулярные случайные величины (распределения)

Точку $x \in \mathbb{R}$ называют *точкой роста* функции распределения $F_\xi(x)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$F_\xi(x + \varepsilon) - F_\xi(x - \varepsilon) > 0.$$

О п р е д е л е н и е 8. *Случайная величина* ξ *имеет сингулярное распределение, если ее функция распределения – непрерывная функция, множество точек роста которой имеет нулевую меру Лебега.*

Примером такой случайной величины является случайная величина, функция распределения которой равна 0 на $(-\infty, 0)$, равна 1 на $(1, +\infty)$ и совпадает с функцией Кантора *на отрезке* $[0, 1]$.

Таким образом, множество случайных величин (распределений) можно разбить на три класса: дискретные, абсолютно непрерывные и сингулярные величины (распределения). Любая случайная величина является комбинацией случайных величин из этих классов, что подтверждается теоремой Лебега.

Теорема 6 (теорема Лебега). *Любая функция распределения* $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *единственным образом представима в виде*

$$F(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + a_3 F_3(x),$$

где $F_1(x)$ *– дискретная функция распределения,* $F_2(x)$ *– абсолютно непрерывная функция распределения,* $F_3(x)$ *– сингулярная функция распределения,* $a_i \geq 0$ *и* $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

Функция $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *борелевской функцией*, если из того, что $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$, следует, что $g^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Например, любая непрерывная функция является борелевской.

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– борелевская функция,* ξ *– случайная величина, тогда* $g(\xi)$ *также является случайной величиной.*

Рассмотрим несколько примеров, в которых требуется найти функцию распределения функции от случайной величины.

П р и м е р 7. Пусть функция распределения случайной величины ξ равна F_ξ. Найдем функцию распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$F_\eta(x) = \mathrm{P}(\eta \leq x) = \mathrm{P}(\xi^2 \leq x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ \mathrm{P}(-\sqrt{x} \leq \xi \leq \sqrt{x}), \ x \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x} - 0), \ x \geq 0. \end{cases}$$

Если случайная величина ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x)$, то плотность распределения η равна

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}[p_\xi(\sqrt{x}) + p_\xi(-\sqrt{x})], \ x \ge 0. \end{cases}$$

Пример 8. Пусть ξ – случайная величина с непрерывной и строго монотонной функцией распределения F_ξ. Найдем функцию распределения случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$.

Решение. Так как при всех $x \in \mathbb{R}$ $0 \le F_\xi(x) \le 1$, то $F_\eta(x) = 0$ при $x < 0$ и $F_\eta(x) = 1$ при $x \ge 1$. Пусть $0 \le x \le 1$ и обозначим через z точку $z = F_\xi^{-1}(x)$ такую, что $F_\xi(z) = x$. Событие $\{\eta = F_\xi(\xi) \le x\}$ произойдет тогда и только тогда, когда произойдет событие $\{\xi \le z\}$. Следовательно,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, \ \text{если} \ \ x < 0, \\ x, \ \text{если} \ \ 0 \le x < 1, \\ 1, \ \text{если} \ \ x \ge 1. \end{cases}$$

Таким образом, случайная величина η имеет равномерное на отрезке $[0; 1]$ распределение.

Пример 9. Пусть ξ равномерно распределена на отрезке $[0; 1]$. Найдем функцию распределения случайной величины $\eta = [-\ln \xi]$.

Решение. Так как $-\ln \xi > 0$, если $\xi \in (0; 1)$, то $\mathrm{P}(\xi \le x) = 0$ при $x < 0$. Случайная величина $[-\ln \xi]$ принимает целые неотрицательные значения n:

$$\mathrm{P}([-\ln \xi] = n) = \mathrm{P}(-\ln \xi \in [n; n+1)) = \mathrm{P}(\xi \in [e^{-n-1}; e^{-n})) =$$

$$= e^{-n} - e^{-n-1} = (1 - e^{-1})e^{-n}.$$

Следовательно, η имеет геометрическое распределение с параметром $p = 1 - e^{-1}$.

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ – произвольное вероятностное пространство, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – случайные величины, заданные на этом вероятностном пространстве.

Определение 9. *Упорядоченный набор*

$$\overline{\xi}(\omega) = (\xi_1(\omega), \ \xi_2(\omega), \ \ldots, \ \xi_n(\omega))$$

называется n-мерной случайной величиной (*случайным вектором*).

Определение 10. Функция $\overline{\xi}: \Omega \to \mathbb{R}^n$ такая, что для любого $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\overline{\xi}^{-1}(B) \in \mathscr{A}$$

называется n-мерной случайной величиной (*случайным вектором*).

Определения 9 и 10 эквивалентны.

Пример 10. Пусть бросаются две игральные кости. Тогда двумерной случайной величиной является вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, где ξ_i – число очков, выпавших на i-й кости, $i = 1, 2$.

Пример 11. На квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$ бросается частица. Декартовы координаты (ξ_1, ξ_2) точки образуют двумерную случайную величину.

Определение 11. *Функция*

$$F_{\overline{\xi}} : \mathbb{R}^n \to [0; 1]$$

называется функцией распределения n-мерной случайной величины (*случайного вектора*) $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *если для любого вектора* $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$F_{\overline{\xi}}(\overline{x}) = \mathrm{P}(\omega \in \Omega : \ (\xi_1(\omega) \le x_1) \cap (\xi_2(\omega) \le x_2) \cap \ldots \cap (\xi_n(\omega) \le x_n)).$$

Функцию распределения n-мерной случайной величины также называют *многомерной функцией распределения*.

Свойства многомерной функции распределения

1) $F_{\overline{\xi}}$ *монотонно не убывает по каждой переменной.*

2) $F_{\overline{\xi}}$ *непрерывна справа по каждой переменной.*

3) $F_{\overline{\xi}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, -\infty, x_{k+1}, \ldots, x_n) = 0$ *для любого* $k = \overline{1, n}$.

4) *Свойство согласованности функции распределения*:

$$F_{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n)}(x_1, \ldots, x_{k-1}, +\infty, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= F_{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

для любого $k = \overline{1, n}$.

Для одномерных случайных величин этих свойств было достаточно, чтобы функция, обладающая ими, была функцией распределения. Для n-мерных случайных величин, когда $n > 1$, этих свойств недостаточно. Необходимо еще одно свойство, которое мы сейчас рассмотрим.

Обозначим $I_k = (a_k; b_k]$, $\Delta_{I_k}^k$ – преобразование, применение которого к функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ дает

$$\Delta_{I_k}^k g(x_1, ..., x_n) = g(x_1, \ldots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) -$$

$$-g(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

5) *Для любых интервалов* I_k, $k = \overline{1,n}$,

$$\Delta_{I_n}^n \ldots \Delta_{I_1}^1 F_{\bar{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = \Delta_{I_n}^n (\Delta_{I_{n-1}}^{n-1} \ldots (\Delta_{I_1}^1 F_{\bar{\xi}}(x_1, \ldots, x_n))) \geq 0.$$

Теорема 7. *Если функция* $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет свойствам* 1)–5), *то она является функцией распределения некоторой n-мерной случайной величины.*

О п р е д е л е н и е 12. *Функция*

$$P_{\bar{\xi}}: \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0; 1]$$

называется распределением вероятностей n-мерной случайной величины $\bar{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_n)$, *если для любого* $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$

$$P_{\bar{\xi}}(B) = \mathrm{P}(\omega \in \Omega: \bar{\xi}(\omega) \in B).$$

Функция $P_{\bar{\xi}}$ является вероятностной мерой на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$.

Теорема 8. *Распределение вероятностей однозначно определяется функцией распределения* $F_{\bar{\xi}}$. *Причем*

$$P_{\bar{\xi}}(B) = \int_B dF_{\bar{\xi}}(\bar{x}), \ \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Как и случайные величины, случайные векторы можно разбить на три класса.

Дискретные случайные векторы

Случайный вектор называется *дискретным*, если он принимает с вероятностью 1 не более чем счетное число значений.

Задать дискретный случайный вектор значит указать его *закон распределения*, т. е. задать вероятности $\mathrm{P}(\bar{\xi} = \bar{x})$ для всех возможных значений $\bar{x}$ случайного вектора $\bar{\xi}$.

П р и м е р 12. П о л и н о м и а л ь н ы й з а к о н р а с п р е д е л е н и я с п а р а м е т р а м и (N, p). Распределение случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется *полиномиальным с параметрами* N, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, если

$$k_i = \overline{0,N}, \ \ i = \overline{1,n}; \ \ \sum_{i=1}^{n} k_i = N; \ \ \mathrm{P}(\xi_1 = k_1 \cap \ldots \cap \xi_n = k_n) = \frac{N!}{k_1! \ldots k_n!} p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n}.$$

При $n = 2$ получаем двумерную случайную величину

$$\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2), \quad p_{lm} = \mathrm{P}((\xi_1 = x_l) \bigcap (\xi_2 = y_m)), \quad \sum_{l,m=1}^{\infty} p_{lm} = 1, \; p_{lm} \geq 0,$$

тогда закон распределения случайного вектора $\overline{\xi}$ (его также называют *совместным законом распределения случайных величин* ξ_1 и ξ_2) можно представить в виде табл. 1

Таблица 1

$\xi_2 \backslash \xi_1$	x_1	x_2	$\ldots$	x_l	$\ldots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\ldots$	p_{l1}	$\ldots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\ldots$	p_{l2}	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\ldots$	p_{lm}	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Пример 13. Пусть случайный вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ имеет приведенный в табл. 1 закон распределения. Найдем законы распределения координат ξ_1, ξ_2. Сначала рассмотрим случай, когда закон распределения имеет следующий вид:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

Несложно видеть, что

$$\mathrm{P}(\xi_1 = 0) = \mathrm{P}((\xi_1 = 0) \bigcap ((\xi_2 = 0) \sqcup (\xi_2 = 1))) =$$

$$= \mathrm{P}(((\xi_1 = 0) \bigcap (\xi_2 = 0)) \sqcup ((\xi_1 = 0) \bigcap (\xi_2 = 1))) =$$

$$= \mathrm{P}((\xi_1 = 0) \bigcap (\xi_2 = 0)) + \mathrm{P}((\xi_1 = 0) \bigcap (\xi_2 = 1)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

поэтому законы распределения ξ_1 и ξ_2 имеют вид

$$\begin{array}{lll} \xi_1: & 0 & 1, \\ \mathrm{P}: & 1/2 & 1/2; \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \xi_2: & 0 & 1, \\ \mathrm{P}: & 1/2 & 1/2. \end{array}$$

В общем случае, используя данные табл. 1, получаем

$$\begin{array}{lllll} \xi_1: & x_1 & x_2 \; \ldots & x_l & \ldots, \\ \mathrm{P}: & \sum\limits_{i=1}^{m} p_{1i} & \sum\limits_{i=1}^{m} p_{2i} \; \ldots & \sum\limits_{i=1}^{m} p_{li} & \ldots; \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} \xi_2: & y_1 & y_2 \; \ldots & y_m & \ldots, \\ \mathrm{P}: & \sum\limits_{i=1}^{l} p_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{l} p_{i2} \; \ldots & \sum\limits_{i=1}^{l} p_{im} & \ldots . \end{array}$$

В общем случае, зная только законы распределения случайных величин ξ_1, ξ_2, нельзя найти закон распределения вектора $\overline{\xi} = (\xi_1; \xi_2)$ (совместный закон распределения). Для этого нужно знать связь между ξ_1 и ξ_2.

Абсолютно непрерывные случайные векторы

Определение 13. *Распределение вероятностей n-мерной случайной величины (случайного вектора) $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется абсолютно непрерывным распределением, а сама случайная величина $\overline{\xi}$ – абсолютно непрерывной n-мерной случайной величиной, если для любого множества $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$*

$$P_{\overline{\xi}}(B) = \int \underset{B}{\ldots} \int p_{\overline{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n, \tag{7}$$

где $p_{\overline{\xi}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – интегрируемая по Лебегу функция.

Функция $p_{\overline{\xi}}$ называется *плотностью распределения n-мерной случайной величины* или *многомерной плотностью распределения.*

Функция распределения абсолютно непрерывной n-мерной случайной величины для любых $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ допускает представление

$$F_{\overline{\xi}}(\overline{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\overline{\xi}}(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n. \tag{8}$$

Свойства многомерной плотности распределения

1) $p_{\overline{\xi}}(\overline{x}) \geq 0$ *для почти всех* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

2) $\int\limits_{R^n} p_{\overline{\xi}}(\overline{x}) d\overline{x} = 1.$

3) *Для почти всех* $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$p_{\overline{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\overline{\xi}}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}.$$

4) *Для любого* $k = \overline{1, n}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\overline{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) dx_k = p_{(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Чтобы функция $p(\overline{x})$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, *была плотностью распределения некоторой n-мерной случайной величины* $\overline{\xi}$, *необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла свойствам* 1) *и* 2).

Пример 14. Равномерное распределение на борелевском множестве G из $\mathbb{R}^n$. Распределение вероятностей n-мерной случайной величины $\overline{\xi}$ называется *равномерным на множестве* G, а величина $\overline{\xi}$ – *равномерно распределенной на* G, если для любых $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$

$$P_{\overline{\xi}}(B) = \frac{|B \cap G|}{|G|},$$

где $|A|$ – мера Лебега борелевского множества A, $0 < |G| < \infty$.

В этом случае плотность распределения $\overline{\xi}$ имеет вид

$$p_{\overline{\xi}}(x_1, \ \ldots, \ x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{|G|}, & \text{если} \quad (x_1, \ \ldots, \ x_n) \in G, \\ 0, & \text{если} \quad (x_1, \ \ldots, \ x_n) \notin G. \end{cases}$$

Пример 15. Многомерное нормальное распределение с параметрами $(\overline{a}, \ \sigma^2)$. Распределение вероятностей n-мерной случайной величины называется *многомерным нормальным распределением с параметрами*

$$\overline{a} = (a_1, \ \ldots, \ a_n) \ \text{ и } \ \sigma^2 = [\sigma_{ij}]_{i,j=1}^n$$

(симметричная неотрицательно определенная матрица), если для любых $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$

$$P_{\overline{\xi}}(B) = \frac{(\det A)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int_B \exp\left\{\frac{1}{2}(x-a)A(x-a)^T\right\} dx,$$

где $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, $\sigma^2 = A^{-1}$, $xAx^T = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, $\det A$ – определитель матрицы A.

Сингулярные случайные векторы

Определение 14. *Распределение вероятностей n-мерной случайной величины* (*случайного вектора*) $\overline{\xi} = (\xi_1, \ \ldots, \ \xi_n)$ *называется сингулярным, а сама случайная величина* $\overline{\xi}$ – *сингулярной n-мерной случайной величиной* (*сингулярным вектором*), *если*:

1) $F_{\overline{\xi}}$ – *непрерывная функция*;

2) *существует такое множество* $S \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ *нулевой меры Лебега, что* $\mathrm{P}(\overline{\xi} \in S) = 1$.

П р и м е р 16. Пусть случайная величина ξ_1 имеет непрерывную функцию распределения $F_{\xi_1}(x)$, $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывная, строго монотонно возрастающая функция, g^{-1} – обратная функция, кроме того, $\xi_2 = g(\xi_1)$. Тогда случайный вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ будет сингулярным, так как

$$F_{(\xi_1,\xi_2)}(x_1, x_2) = \mathrm{P}(\xi_1 \le x_1 \cap \xi_2 \le x_2) = \mathrm{P}(\xi_1 \le x_1 \cap g(\xi_1) \le x_2) =$$

$$= \mathrm{P}(\xi_1 \le x_1 \cap \xi_1 \le g^{-1}(x_2)) = \mathrm{P}(\xi_1 \le \min(x_1;\, g^{-1}(x_2))) =$$

$$= F_{\xi_1}(\min(x_1;\, g^{-1}(x_2))) \text{ – непрерывная функция.}$$

Рассмотрим множество

$$S = \{(x_1, x_2):\ x_i \in R,\ i = 1,\ 2,\ x_2 = g(x_1)\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2).$$

Множество S – кривая в $\mathbb{R}^2$, мера Лебега которой равна 0 и

$$\mathrm{P}((\xi_1, \xi_2) \in S) = \mathrm{P}((\xi_1, g(\xi_1)) \in S) = 1.$$

Понятие независимости случайных величин представляет собой перенос понятия независимости случайных событий на случайные величины и отражает отсутствие связи между случайными величинами. Иными словами, независимость случайных величин ξ и η можно охарактеризовать следующим образом: знание значений, которые приняла случайная величина ξ, не дает никакой новой информации о распределении случайной величины η.

О п р е д е л е н и е 15. *Сигма-алгебра* (σ-*алгебра*)

$$\mathscr{A}_\xi = \xi^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

называется сигма-алгеброй, порожденной случайной величиной ξ.

О п р е д е л е н и е 16. *Случайные величины* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *называются независимыми, если независимы* σ-*алгебры* $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$, *порожденные этими случайными величинами, т. е. для любых* $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ *имеет место равенство*

$$\mathrm{P}(\xi_1 \in B_1 \cap \xi_2 \in B_2 \cap \ldots \cap \xi_n \in B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\xi_k \in B_k). \tag{9}$$

Определение независимости случайных векторов дается аналогичным образом. Кроме того, дальнейшие утверждения независимости остаются справедливыми при замене случайных величин на случайные вектора.

Теорема 9 (критерий независимости). *Случайные величины* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *независимы тогда и только тогда, когда для любых* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$F_{(\xi_1, \ldots, \xi_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{\xi_k}(x_k). \tag{10}$$

Теорема 10. *Пусть случайные величины* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *абсолютно непрерывны и существует плотность распределения* $p_{(\xi_1, \ldots, \xi_n)}(x_1, \ldots, x_n)$ *случайного вектора* $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Они независимы тогда и только тогда, когда для почти всех $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$p_{(\xi_1, \ldots, \xi_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} p_{\xi_k}(x_k). \tag{11}$$

Требование существования плотности случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ является необходимым только для доказательства независимости указанных случайных величин. В обратную сторону ее существование вытекает из того, что случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и абсолютно непрерывны.

Теорема 11. *Дискретные случайные величины* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *независимы тогда и только тогда, когда для любых возможных значений* $x_1, \ldots, x_n$ *случайных величин* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *соответственно выполнено равенство*

$$\mathrm{P}(\xi_1 = x_1 \cap \xi_2 = x_2 \cap \ldots \cap \xi_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\xi_k = x_k). \tag{12}$$

Независимость случайных величин сохраняется при функциональных преобразованиях.

Утверждение 2. *Если* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *– независимые случайные величины,* $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = \overline{1, n},$ *– борелевские функции, то случайные величины* $g_1(\xi_1), \ldots, g_n(\xi_n)$ *также независимы.*

Пример 17. Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ задано следующим образом: $\Omega = [0; 1]$, $\mathscr{A} = \mathscr{B}([0; 1])$, P – мера Лебега. Рассмотрим на этом вероятностном пространстве случайную величину $\xi(\omega) = \omega$. Найдем все случайные величины η, независимые с ξ на данном вероятностном пространстве.

Используя утверждение 2, несложно показать, что только тривиальные (вырожденные) случайные величины η, будут независимы с ξ.

Данный пример показывает, что необходимо с должной осторожностью относиться к фразе «пусть на произвольном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ заданы независимые случайные величины ξ и η (произвольные!)».

Для такой конструкции вероятностное пространство должно быть достаточно «обширным». На самом деле, для любых данных распределений случайных величин ξ и η можно построить вероятностное пространство и задать на нем случайные величины ξ и η так, что они будут независимы и иметь данные распределения. Поэтому приведенную выше фразу следует понимать в том смысле, что пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ уже достаточно «обширно» и на нем заданы независимые случайные величины, распределения которых совпадают с данными.

Пусть задана дискретная случайная величина ξ с законом распределения

$$\begin{aligned} &\xi: \ x_1 \ \dots \ x_n \ \dots, \\ &p: \ p_1 \ \dots \ p_n \ \dots, \quad p_i > 0, \quad \sum_i p_i = 1. \end{aligned}$$

Функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – борелевская. Тогда очевидно, что закон распределения случайной величины $g(\xi)$ имеет вид

$$\begin{array}{lllllll} g(\xi): & g(x_1) & g(x_2) & \dots & g(x_n) & \dots, & \\ \mathrm{P}: & p_1 & p_1 & \dots & p_n & \dots, & p_i > 0, \quad \sum_i p_i = 1, \end{array}$$

при этом если некоторые из значений $g(x_i)$ совпадают, то они записываются один раз, а вероятности их появления равны суммам вероятностей тех возможных значений x_i, при которых функция g принимает одно и то же значение.

Многомерный случай описывается аналогично.

Пусть $\overline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – n-мерная абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения

$$p_{\overline{\xi}}(\overline{x}), \quad \overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим случайный вектор $\overline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, где $\eta_i = g_i(\xi_i)$, $i = \overline{1, n}$. Функции $g_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывные, для которых существуют обратные преобразования

$$\xi_i = g_i^{-1}(\eta_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Обозначим

$$g(\overline{x}) = (g_1(\overline{x}), \dots, g_n(\overline{x})), \quad g^{-1}(\overline{x}) = (g_1^{-1}(\overline{x}), \dots, g_n^{-1}(\overline{x})).$$

Теорема 12. *Если случайный вектор* $\overline{\xi}$ *имеет плотность распределения* $p_{\overline{\xi}}$, $\overline{\eta} = g(\overline{\xi})$, *где функция* $g = (g_1, \dots, g_n)$ *непрерывно дифференцируема, а* *ее обратная функция* $g^{-1} = (g_1^{-1}, \ldots, g_n^{-1})$, *то случайный вектор* η *имеет плотность распределения* $p_{\overline{\eta}}$, *которая определяется по формуле*

$$p_{\overline{\eta}}(\overline{x}) = p_{\xi}(g^{-1}(\overline{x}))\left|Ig^{-1}(\overline{x})\right|,$$

где

$$Ig^{-1}(\overline{x}) = \left[\frac{\partial g_i^{-1}(\overline{x})}{\partial x_j}\right]_{i,j=1}^{n},$$

а $|A|$ *– определитель матрицы* A.

Пусть даны две случайные величины ξ и η, тогда по теореме 8

$$F_{\xi+\eta}(z) = \iint\limits_{x+y\le z} dF_{(\xi,\,\eta)}(x,\,y). \tag{13}$$

Если ξ и η независимы, то из (13) имеем

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi}(z-y)\,dF_{\eta}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{\eta}(z-y)\,dF_{\xi}(y). \tag{14}$$

Если случайная величина ξ произвольна, а случайная величина η абсолютно непрерывна и они независимы, то существует плотность $p_{\xi+\eta}$ и она равна

$$p_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\eta}(t-y)\,dF_{\xi}(y),\ t\in\mathbb{R}. \tag{15}$$

Если обе случайные величины ξ и η абсолютно непрерывны и независимы, то

$$p_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\eta}(t-y)\,p_{\xi}(y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(t-y)\,p_{\eta}(y)\,dy. \tag{16}$$

Формулы (13)–(16) называют формулами композиции или свертками.

Определение 17. *Математическим ожиданием случайной величины* ξ *называется число*

$$\mathrm{M}\xi = \int\limits_{\Omega}\xi(\omega)\,d\mathrm{P}(\omega) = \int\limits_{\Omega}\xi(\omega)\,\mathrm{P}(d\omega).$$

Математическое ожидание случайной величины ξ – это интеграл Лебега от этой величины по вероятностной мере.

Свойства математического ожидания – это свойства интеграла Лебега.

1) *Если* $\mathrm{P}(\xi = c) = 1,$ *то* $\mathrm{M}\xi = c.$

2) *Если* ξ *– интегрируемая неотрицательная случайная величина, то* $\mathrm{M}\xi \geq 0.$

3) *Если* $|\xi| \leq c,$ *то* $\mathrm{M}\,|\xi| \leq c.$

4) *Если* $|\xi| \leq \eta$ *и* η *интегрируема, то* ξ *также интегрируема и*

$$\mathrm{M}\,|\xi| \leq \mathrm{M}\,\eta.$$

5) *Если* ξ *и* η *– интегрируемые случайные величины, то для любых* $a,\ b \in \mathbb{R}$ *случайная величина также интегрируема и*

$$\mathrm{M}(a\xi + b\eta) = a \cdot \mathrm{M}\xi + b \cdot \mathrm{M}\eta.$$

6) *Случайные величины* ξ *и* $|\xi|$ *одновременно интегрируемы, и*

$$|\mathrm{M}\xi| \leq \mathrm{M}\,|\xi|.$$

7) **Теорема о монотонной сходимости.** *Пусть* $\{\xi_n\},\ \ n \geq 1,$ *– последовательность неотрицательных интегрируемых случайных величин таких, что* $\xi_n \uparrow \xi$ *поточечно при* $n \to \infty$*. Если* $\sup\limits_n \mathrm{M}\xi_n < \infty,$ *то* ξ *также интегрируема и*

$$\mathrm{M}\xi = \lim_{n \to \infty} \mathrm{M}\xi_n.$$

8) **Теорема о мажорируемой сходимости (Лебега).** *Если для почти всех* $\omega \in \Omega$

$$\xi_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \xi,$$

$|\xi_n| \leq \eta,\ \ n = 1,\ 2,\ \ldots,$ *и* $\mathrm{M}\eta < \infty,$ *то*

$$\mathrm{M}\xi = \lim_{n \to \infty} \mathrm{M}\xi_n.$$

9) **Свойство мультипликативности математических ожиданий.** *Пусть* $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ *– независимые случайные величины,* $\mathrm{M}\xi_i < \infty,\ \ i = \overline{1, n}.$ *Тогда существует* $\mathrm{M}(\xi_1\xi_2 \ldots \xi_n)$ *и*

$$\mathrm{M}(\xi_1\xi_2 \ldots \xi_n) = \mathrm{M}\xi_1 \cdot \mathrm{M}\xi_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{M}\xi_n.$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

10) **Формула замены переменных в интеграле Лебега. Пусть** $\overline{\xi} = (\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$ *– случайный вектор,* $g:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *борелевская функция, тогда*

$$\mathrm{M}\,g(\overline{\xi}) = \int\limits_{\Omega} g(\overline{\xi}(\omega))\,d\,\mathrm{P}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\overline{x})\,dF_{\xi}(\overline{x}). \tag{17}$$

Если в этой формуле существует один из интегралов, то существует второй и они равны.

Из свойства 10 и соответствующих свойств интеграла Лебега – Стилтьеса вытекают следующие утверждения.

Утверждение 3. *Пусть* ξ *– абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения* $p_\xi(x)$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– борелевская функция. Тогда*

$$\mathrm{M}\, g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_\xi(x) dx.$$

Утверждение 4. *Пусть* ξ *– дискретная случайная величина с законом распределения*

$$\begin{array}{llllll} \xi: & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots, \\ \mathrm{P}: & p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots, \end{array}$$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– борелевская функция. Тогда*

$$\mathrm{M}\, g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n) p_n.$$

Пример 18. Пусть случайная величина ξ принимает конечное число различных значений $a_1, a_2, \ldots, a_m$; $p_k = \mathrm{P}(\xi = a_k)$, $k = \overline{1, m}$. Будем повторять n раз эксперимент, в котором наблюдается величина ξ. Через $x_1, \ldots, x_n$ обозначим наблюдаемые значения этой случайной величины. Тогда среднее значение наблюдаемых чисел равно

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{k_i}{n},$$

где k_i – число появлений события $\{\xi = a_i\}$ в этой серии экспериментов, т. е.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{m} a_i \nu_n(\xi = a_i), \tag{18}$$

где $\nu_n(A)$ – частота появления события A в n испытаниях. Заметим, что при $n \to \infty$

$$\nu_n(A) \to \mathrm{P}(A),$$

(см., напр., [16, с. 32]), т. е.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \to \mathrm{M}\xi.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины ξ можно трактовать как *вероятностное среднее* этой величины.

П р и м е р 19. Математическое ожидание дискретной случайной величины имеет аналог в теоретической механике. Пусть на прямой расположена система материальных точек с массами p_n и пусть x_n – координата n-й точки. Тогда центр тяжести системы будет иметь координату

$$\overline{x} = \frac{\sum_n x_n p_n}{\sum_n p_n} = \frac{\sum_n x_n p_n}{1} = \sum_n x_n p_n,$$

совпадающую с математическим ожиданием случайной величины ξ, имеющей закон распределения

$$\begin{array}{llllll} \xi: & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots, \\ \mathrm{P}: & p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots . \end{array}$$

Для натуральных m величина $\mathrm{M}\xi^m$, если она определена, называется моментом *m-го порядка* случайной величины ξ. В частности, момент первого порядка ξ – это ее математическое ожидание. Величина $\mathrm{M}|\xi|^m$ называется *абсолютным моментом m-го порядка* случайной величины ξ. Моменты (абсолютные моменты) случайной величины $(\xi - \mathrm{M}\xi)$ называются *центральными моментами* (*абсолютными центральными моментами*) случайной величины ξ.

О п р е д е л е н и е 18. *Дисперсией случайной величины* ξ *называется число*

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2,$$

число $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ *называется среднеквадратическим отклонением случайной величины* ξ.

О п р е д е л е н и е 19. Ковариацией случайных величин ξ и η называется число

$$\mathrm{cov}(\xi,\ \eta) = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)(\eta - \mathrm{M}\eta).$$

Свойства дисперсии

1) $\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2$.

2) $\mathrm{D}\xi \geq 0$.

3) $\mathrm{D}(\xi + c) = \mathrm{D}\xi$, *где* $c \in \mathbb{R}$.

4) $\mathrm{D}(c\xi) = c^2\mathrm{D}\xi$, *где* $c \in \mathbb{R}$.

5) $\mathrm{D}\xi = 0$ *тогда и только тогда, когда существует константа* $c \in \mathbb{R}$ *такая, что* $\mathrm{P}(\xi = c) = 1$.

6) $\mathrm{D}(\xi+\eta) = \mathrm{D}\xi + \mathrm{D}\eta + 2\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)$.

7) *Если случайные величины* ξ *и* η *независимы, то*

$$\mathrm{D}(\xi+\eta) = \mathrm{D}\xi + \mathrm{D}\eta.$$

Воспользовавшись свойством 10 математического ожидания, можно доказать, что:

1)
$$\mathrm{M}\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_\xi(x),$$

$$\mathrm{M}|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF_\xi(x),$$

$$\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathrm{M}\xi)^k dF_\xi(x),$$

$$\mathrm{M}\,|\xi-\mathrm{M}\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mathrm{M}\xi|^k dF_\xi(x), \ \ k = 1, 2, \ldots;$$

2) если случайная величина ξ абсолютно непрерывна с плотностью распределения p_ξ, то

$$\mathrm{M}\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_\xi(x)dx,$$

$$\mathrm{M}|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k p_\xi(x)dx,$$

$$\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathrm{M}\xi)^k p_\xi(x)dx,$$

$$\mathrm{M}|\xi-\mathrm{M}\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mathrm{M}\xi|^k \ p_\xi(x)dx, \ \ k = 1, 2, \ldots;$$

3) если случайная величина ξ дискретна с законом распределения

$$\begin{array}{llllll} \xi: & x_1 & \ldots & x_n & \ldots, \\ \mathrm{P}: & p_1 & \ldots & p_n & \ldots, \end{array}$$

то

$$\mathrm{M}\xi^k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k p_n,$$

$$\mathrm{M}|\xi|^k = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^k p_n,$$

$$\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)^k=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-\mathrm{M}\xi)^k p_n,$$

$$\mathrm{M}|\xi-\mathrm{M}\xi|^k=\sum_{n=1}^{\infty}|x-\mathrm{M}\xi|^k\ p_n,\ \ k=1,2,\ldots .$$

П р и м е р 20. Пусть ξ – случайная величина, имеющая дисперсию $\mathrm{D}\xi$. Введем новую случайную величину $\eta=\xi-a$. Найдем число a, доставляющее минимум $\mathrm{M}\eta^2$. Воспользовавшись свойствами дисперсии, имеем

$$\mathrm{M}\eta^2=\mathrm{D}\eta+(\mathrm{M}\eta)^2=\mathrm{D}\xi+(\mathrm{M}\xi-a)^2.$$

Первое слагаемое от a не зависит, а второе принимает минимальное значение при $a=\mathrm{M}\xi$. Таким образом, в качестве a следует взять $\mathrm{M}\xi$, а минимальное значение $\mathrm{M}\eta^2$ совпадает с дисперсией $\mathrm{D}\xi$.

П р и м е р 21. Бросаются две игральные кости. Пусть ξ_1 – число очков, выпавших на одной кости, а ξ_2 – на другой. Рассмотрим случайные величины $\eta_1=\xi_1+\xi_2$ (сумма очков на обеих костях), $\eta_2=\xi_1-\xi_2$ (разность очков). Тогда

$$\operatorname{cov}(\eta_1,\eta_2)=\mathrm{M}((\xi_1+\xi_2)-\mathrm{M}(\xi_1+\xi_2))((\xi_1-\xi_2)-\mathrm{M}(\xi_1-\xi_2))=$$
$$=\mathrm{M}((\xi_1-\mathrm{M}\xi_1)^2-(\xi_2-\mathrm{M}\xi_2)^2)=\mathrm{D}\xi_1-\mathrm{D}\xi_2.$$

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 одинаково распределены, значит, $\mathrm{D}\xi_1=\mathrm{D}\xi_2$ и $\operatorname{cov}(\eta_1,\eta_2)=0$. Однако случайные величины η_1 и η_2 зависимы, поскольку, например, из равенства $\eta_1=2$ обязательно следует равенство $\eta_2=0$. Таким образом, в свойстве 7 дисперсии обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Н е р а в е н с т в о Ч е б ы ш е в а. *Если* $g=g(x)$ *– положительная неубывающая на* $[0;\infty)$ *функция, то для любого* $\varepsilon>0$

$$\mathrm{P}(|\xi|\ge\varepsilon)\le\frac{\mathrm{M}g(|\xi|)}{g(\varepsilon)}. \tag{19}$$

С л е д с т в и е. *Для любого* $\varepsilon>0$

$$\mathrm{P}(|\xi|\ge\varepsilon)\le\frac{\mathrm{M}|\xi|}{\varepsilon},\qquad \mathrm{P}(|\xi-M\xi|\ge\varepsilon)\le\frac{\mathrm{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

Н е р а в е н с т в о И е н с е н а. *Пусть* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *– выпуклая вниз (вверх) функция и* $\mathrm{M}|\xi|<\infty$, *тогда*

$$\mathrm{M}g(\xi)\ge g(\mathrm{M}\xi)\,(g(\mathrm{M}\xi)\ge\mathrm{M}g(\xi)).$$

Неравенство Ляпунова. *Для любых положительных* $\alpha < \beta$

$$(M|\xi|^{\alpha})^{1/\alpha} \le (M|\xi|^{\beta})^{1/\beta}.$$

Из неравенства Ляпунова следует, что если конечен момент порядка k, то конечны и все моменты порядка меньше k, $k \in N$.

Неравенство Гёльдера. *Если*

$$p > 1,\ \ q > 1,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \ M|\xi|^p < \infty,\ \ M|\eta|^q < \infty,$$

то

$$M|\xi\eta| \le (M|\xi|^{p})^{1/p}(M|\eta|^{q})^{1/q}.$$

Неравенство Гёльдера для $p = q = 2$ называется неравенством Коши – Буняковского или неравенством Шварца и имеет вид

$$M|\xi\eta|^{q} \le \sqrt{M\xi^2 M\eta^2}.$$

Неравенство Минковского. *Если*

$$M|\xi|^p < \infty,\ \ M|\eta|^p < \infty,\ \ p \ge 1,$$

то

$$M|\xi + \eta|^p < \infty$$

и

$$(M|\xi + \eta|^p)^{1/p} \le (M|\xi|^p)^{1/p} + (M|\eta|^p)^{1/p}.$$

Определение 20. *Коэффициентом корреляции случайных величин* ξ *и* η *с конечными ненулевыми дисперсиями называется число*

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}.$$

Свойства коэффициента корреляции

1) $|\rho(\xi, \eta)| \le 1$.

2) *Если случайные величины* ξ *и* η *независимы, то* $\rho(\xi, \eta) = 0$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

В случае, когда $\rho(\xi, \eta) = 0$, случайные величины ξ и η называются *некоррелированными*.

3) $|\rho(\xi, \eta)| = 1$ *тогда и только тогда, когда существуют такие константы* $a \ne 0$ *и* b, *что* $P(\eta = a\xi + b) = 1$.

Из свойства 3) следует, что коэффициент корреляции является мерой линейной зависимости случайных величин. Чем ближе $|\rho(\xi, \eta)|$ к единице, тем ближе к прямой размещаются в среднем значения случайного вектора (ξ, η).

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ – произвольное вероятностное пространство, $\mathscr{F}$ – σ-алгебра такая, что $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$, ξ – случайная величина, заданная на $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ и имеющая конечное математическое ожидание.

Определение 21. *Условным математическим ожиданием случайной величины* ξ *относительно* σ-*алгебры* $\mathscr{F}$ *называется* $\mathscr{F}$-*измеримая случайная величина* $\mathrm{M}(\xi \mid \mathscr{F})$ *такая, что для любых* $A \in \mathscr{F}$

$$\int_A \xi(\omega)\mathrm{P}(d\omega) = \int_A (\xi \mid \mathscr{F})(\omega)\mathrm{P}(d\omega).$$

Существование и единственность с точностью до событий нулевой вероятности условного математического ожидания вытекает непосредственно из теоремы Радона – Никодима.

Предположим, что на данном вероятностном пространстве задана еще одна случайная величина η. Через $\mathscr{A}_\eta$ обозначим σ-алгебру, порожденную случайной величиной η. Напомним, что по определению $\mathscr{A}_\eta = \eta^{-1}(\mathscr{B}(R))$.

Определение 22. *Условное математическое ожидание* $\mathrm{M}(\xi \mid \mathscr{A}_\eta)$ *называется условным математическим ожиданием случайной величины* ξ *относительно случайной величины* η *и обозначается* $\mathrm{M}(\xi \mid \eta)$.

Будем говорить, что случайное событие имеет место *почти наверное* (*п. н.*), если его вероятность равняется 1.

Свойства условного математического ожидания:

1) *Если* $\mathrm{P}(\xi = C) = 1$, $C \in \mathbb{R}$, *то* $\mathrm{M}(\xi \mid \mathscr{F}) = C$ *п. н.*

2) *Если* $\mathrm{M}|\xi_i| < \infty$; $i = 1, 2$; $a, b \in \mathbb{R}$, то

$$\mathrm{M}(a\,\xi_1 + b\,\xi_2 \mid \mathscr{F}) = a\mathrm{M}(\xi_1 \mid \mathscr{F}) + b\mathrm{M}(\xi_2 \mid \mathscr{F}) \text{ п. н.}$$

3) *Если* $\xi_1 \le \xi_2$ *и* $\mathrm{M}|\xi_2| < \infty$, *то*

$$\mathrm{M}(\xi_1 \mid \mathscr{F}) \le \mathrm{M}(\xi_2 \mid \mathscr{F}) \text{ п. н.}$$

4) *Если* $\xi_n \ge 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *и* $\xi_n \uparrow \xi$ *при* $n \to \infty$, *причем* $\mathrm{M}\xi < \infty$, *то*

$$\mathrm{M}(\xi_n \mid \mathscr{F}) \underset{n\to\infty}{\uparrow} \mathrm{M}(\xi \mid \mathscr{F}) \text{ п. н.}$$

5) *Если случайная величина* ξ *независима с* σ-*алгеброй* $\mathscr{F}$ и $\mathrm{M}\,|\xi| < \infty$, *то*

$$\mathrm{M}(\xi \mid \mathscr{F}) = \mathrm{M}\xi.$$

6) *Если* $\mathrm{M}\,|\xi| < \infty$ *и* σ-*алгебра* $\mathscr{G}$ *такая, что* $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$, то

$$\mathrm{M}(\mathrm{M}(\xi \mid \mathscr{G}) | \mathscr{F})) = \mathrm{M}(\xi | \mathscr{F}) \text{ п. н.}$$

В частности,

$$\mathrm{M}(\mathrm{M}(\xi \mid \mathscr{F})) = \mathrm{M}\xi.$$

7) *Если* $\mathrm{M}|\xi| < \infty$, *то для любой ограниченной* $\mathscr{F}$*-измеримой случайной величины* η

$$\mathrm{M}(\xi\eta \mid \mathscr{F}) = \eta \mathrm{M}(\xi \mid \mathscr{F}) \text{ п. н.}$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Пусть случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0; 1]$. Тогда случайная величина $-\ln(\xi)$ имеет: 1) экспоненциальное распределение; 2) распределение Коши; 3) пуассоновское распределение; 4) нормальное распределение; 5) биномиальное распределение.

2. Пусть случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда случайная величина $\mathrm{tg}(\xi)$ имеет: 1) экспоненциальное распределение; 2) распределение Коши; 3) пуассоновское распределение; 4) нормальное распределение; 5) биномиальное распределение.

3. Случайная величина имеет пуассоновское распределение. Ошибочно ли следующее утверждение: 1) ее математическое ожидание равно дисперсии; 2) ее математическое ожидание положительно; 3) случайная величина имеет дискретный закон распределения; 4) ее математическое ожидание отрицательно?

4. Случайная величина ξ стандартно нормально распределена. Тогда $\mathrm{M}\xi^{2009}$ равно: 1) 2009; 2) –2009; 3) 1; 4) 1004,5; 5) 0.

5. Случайная величина ξ стандартно нормально распределена. Тогда $\mathrm{M}(\xi + 3)$ равно: 1) 1,5; 2) 6; 3) 1; 4) 3; 5) 0.

6. Закон распределения биномиальной случайной величины имеет следующий вид: $\mathrm{P}(\xi = k) = C_{50}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$, $k = 0, 1, ..., 50$. Тогда $\mathrm{M}\xi$ равно: 1) 0; 2) 1; 3) 25; 4) 50; 5)100.

7. Закон распределения биномиальной случайной величины имеет следующий вид: $\mathrm{P}(\xi = k) = C_{50}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$, $k = 0, 1, ..., 50$. Тогда $\mathrm{D}\xi$ равна: 1) 0; 2) 1; 3) 25; 4) 50; 5) 12,5.

8. Независимые случайные величины ξ и η имеют следующие законы распределения: $P(\xi = k) = C_{50}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$, $k = 0, 1, ..., 50$; $P(\eta = i) = C_{150}^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{150}$, $i = 0, 1, ..., 150$. Тогда случайная величина $\xi + \eta$ имеет закон распределения: 1) $P(\xi + \eta = k) = C_{200}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{200}$, $k = 0, 1, ..., 200$; 2) $P(\xi + \eta = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, ...$; 3) $\xi + \eta$ не яляется случайной величиной.

9. Из равенства $M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta$ следует: 1) независимость случайных величин ξ, η; 2) $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$; 3) абсолютная непрерывность случайных величин ξ, η; 4) сингулярность случайных величин ξ, η; 5) дискретность случайных величин ξ, η.

10. Из равенства $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$ следует: 1) независимость случайных величин ξ, η; 2) $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$; 3) абсолютная непрерывность случайных величин ξ, η; 4) сингулярность случайных величин ξ, η; 5) дискретность случайных величин ξ, η.

11. Из равенства $D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta$ следует: 1) независимость случайных величин ξ, η; 2) $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$; 3) абсолютная непрерывность случайных величин ξ, η; 4) сингулярность случайных величин ξ, η; 5) дискретность случайных величин ξ, η.

12. Из равенства $\rho(\xi, \eta) = 0$ следует: 1) независимость случайных величин ξ, η; 2) $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$; 3) абсолютная непрерывность случайных величин ξ, η; 4) сингулярность случайных величин ξ, η; 5) дискретность случайных величин ξ, η.

13. Из равенства $|\rho(\xi, \eta)| = 1$ следует: 1) независимость случайных величин ξ, η; 2) $P(\xi = a\eta + b) = 1$, $a \neq 0$; 3) абсолютная непрерывность случайных величин ξ, η; 4) сингулярность случайных величин ξ, η; 5) дискретность случайных величин ξ, η.

14. Из следующих утверждений верным является: 1) случайные величины ξ и $D\xi$ независимы; 2) у сингулярных случайных величин не существует математическое ожидание; 3) дискретные случайные величины независимы; 4) вырожденная случайная величина абсолютно непрерывна; 5) из равенства нулю дисперсии и математического ожидания следует абсолютная непрерывность случайной величины.

15. Независимые случайные величины имеют следующие законы распределения: $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, ...,$ и $P(\eta = i) = \frac{\mu^i}{i!}e^{-\mu}$, $i = 0, 1, ...$.

Тогда случайная величина $\xi+\eta$ имеет следующий закон распределения: 1) $P(\xi+\eta=k)=C_{200}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{200}$, $k=0,1,...,200$; 2) $\xi+\eta$ не является случайной величиной; 3) $P(\xi+\eta=k)=\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}e^{-\lambda-\mu}$, $k=0,1,...$.

16. Функция распределения случайной величины непрерывна. Тогда: 1) случайная величина сингулярна; 2) случайная величина абсолютно непрерывна; 3) функция распределения не содержит дискретной компоненты; 4) функция распределения содержит дискретную и абсолютно непрерывную компоненты.

17. Дана случайная величина, которая является абсолютно непрерывной. Тогда ошибочным является утверждение: 1) у нее есть функция распределения; 2) для нее всегда существует математическое ожидание; 3) ее функция распределения непрерывна; 4) для такой случайной величины существует плотность распределения вероятностей.

18. Если случайная величина дискретна и принимает лишь конечное число значений, то ошибочным для нее является утверждение: 1) у нее есть функция распределения; 2) для нее всегда существуют математическое ожидание и дисперсия; 3) ее функция распределения непрерывна справа; 4) для такой случайной величины существует плотность распределения вероятностей.

19. Имеется дискретная случайная величина, принимающая ровно три значения. Тогда порожденная ей сигма-алгебра содержит: 1) 3 элемента; 2) 4 элемента; 3) 8 элементов; 4) 16 элементов.

20. Известно, что случайные величины независимы. Можно ли утверждать, что $P(\xi=\eta)=0$?

Ответы к тестовым заданиям

1. 1). **2.** 2). **3.** 4). **4.** 5). **5.** 4). **6.** 3). **7.** 5). **8.** 1). **9.** 2). **10.** 2). **11.** 2). **12.** 2). **13.** 2). **14.** 1). **15.** 3). **16.** 3). **17.** 2). **18.** 4). **19.** 3). **20.** Вообще говоря, нет.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3

(6 часов)

Тема: Случайные величины и их числовые характеристики

Необходимые понятия и теоремы: случайная величина; борелевская функция от случайной величины; σ-алгебра, порожденная случайной величиной; функция распределения; распределение вероятностей; дискретные и абсолютно непрерывные распределения; плотность распределения вероятностей; многомерные распределения; независимость случайных величин; критерии независимости; математическое ожидание; дисперсия; моменты высших порядков; ковариация; коэффициент корреляции; формулы для вычисления математического ожидания; условное математическое ожидание; неравенства Чебышева, Йенсена, Ляпунова, Гёльдера, Минковского.

Литература: [3] с. 43–95; [5] с. 49–100, 109–118; [6] с. 116–152, 158–180; [8] с. 50–66; [10] с. 21–64; [12] с. 18–22, 42–52; [16] с. 59–114; [21] с. 41–61, 84–115; [23] с. 37–59, 62–104; [26] с. 44–56, 184–190, 250–262.

Задание 4.1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей:

1) распределение Бернулли;
2) биномиальное распределение;
3) распределение Пуассона;
4) геометрическое распределение;
5) гипергеометрическое распределение;
6) равномерное на отрезке $[a; b]$ распределение;
7) нормальное (Гаусса) распределение;
8) показательное (экспоненциальное) распределение;
9) распределение Лапласа;
10) распределение Коши.

Задание 4.2. Совместный закон распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 задается таблицей.

1	$\xi_1 \setminus \xi_2$	–1	0	1	6	$\xi_1 \setminus \xi_2$	–1	0	1
	–1	1/8	1/4	1/8		–1	1/8	1/4	1/8
	1	1/16	1/16	3/8		0	1/16	1/16	3/8
2	$\xi_1 \setminus \xi_2$	–1	0	1	7	$\xi_1 \setminus \xi_2$	–2	–1	0
	0	1/8	1/4	1/8		–1	1/8	1/4	1/8
	1	1/16	1/16	3/8		0	1/16	1/16	3/8
3	$\xi_1 \setminus \xi_2$	0	1	2	8	$\xi_1 \setminus \xi_2$	–2	0	1
	0	1/8	1/4	1/8		–1	1/8	1/4	1/8
	1	1/16	1/16	3/8		1	1/16	1/16	3/8
4	$\xi_1 \setminus \xi_2$	–2	0	2	9	$\xi_1 \setminus \xi_2$	–1	0	1
	1	1/8	1/4	1/8		1	1/8	1/4	1/8
	2	1/16	1/16	3/8		–1	1/16	1/16	3/8
5	$\xi_1 \setminus \xi_2$	1	0	–1	10	$\xi_1 \setminus \xi_2$	–1	0	1
	0	1/16	1/16	1/16		–1	1/4	1/2	1/16
	1	1/16	1/4	1/2		1	1/16	1/16	1/16

1) Найти и построить графики $F_{\xi_1}(x), F_{\xi_2}(x)$. Проверить, выполняются ли для данных функций свойства функции распределения.

2) Вычислить $M\xi_1, M\xi_2, D\xi_1, D\xi_2, \rho(\xi_1,\xi_2)$.

3) Выяснить, являются ли случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимыми.

4) Найти совместный закон распределения случайных величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$.

5) Вычислить $M\eta_1, M\eta_2, D\eta_1, D\eta_2, \rho(\eta_1,\eta_2)$.

Задание 4.3. Пусть ξ и η – независимые случайные величины с плотностями $p_\xi(x) = p_\xi(x, C_1)$ и $p_\eta(x) = p_\eta(x, C_2)$ соответственно (C_1, C_2 – константы).

1) Найти значения констант C_1, C_2.

2) Найти функции распределения случайных величин ξ и η.

3) Найти функцию распределения случайной величины $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$.

4) Вычислить $M\xi, M\eta, M\zeta, D\xi, D\eta, D\zeta$.

№ п/п	$p_\xi(x)$	$p_\eta(x)$	$\zeta = \zeta(\xi,\eta)$
1	$\begin{cases} C_1 e^{-x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 / x^2, & x \ge 1, \\ 0, & x < 1 \end{cases}$	$\max(\xi,\eta)$
2	$\begin{cases} C_1 e^{-2x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-4x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\min(\xi,\eta)$
3	$\begin{cases} C_1, & x \in [0;2], \\ 0, & x \notin [0;2] \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\xi - 2\eta$
4	$\begin{cases} 4C_1 e^{-4x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2C_2, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$	$2\xi + \eta$
5	$\begin{cases} C_1 e^{-2x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\max(2\xi,\eta)$
6	$\begin{cases} C_1 e^{-x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 /(2x^2), & x \ge 1, \\ 0, & x < 1 \end{cases}$	$\min(\xi^3,\eta)$
7	$\dfrac{C_1}{1+x^2}$	$C_2 e^{-x^2}$	$3 + 2\xi$
8	$C_1 e^{-x^2}$	$\dfrac{C_2}{4+x^2}$	$4 - 2\eta$
9	$\begin{cases} C_1 e^{-x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-2x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	ξ / η
10	$\begin{cases} C_1 e^{-x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-4x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\xi \cdot \eta$

Задание 4.4. Дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, где $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ – алгебра борелевских множеств на плоскости, а вероятность P определяется следующим образом: для заданного множества $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ и заданной точки $C \in \mathbb{R}^2$ верны равенства $\mathrm{P}(H) = 2/3$, $\mathrm{P}(C) = 1/3$, причем на множестве H вероятность распределена равномерно. Найти функцию распределения и математическое ожидание заданной случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.

№ п/п	$\omega = (\omega_1, \omega_2) \in H$	C	$\xi = \xi(\omega)$
1	$0 \le \omega_1 \le 1$, $0 \le \omega_2 \le 1$	(2,2)	$2\omega_1 + \omega_2$
2	$\omega_2 = 2\omega_1$, $0 \le \omega_1 \le 1$	(1,0)	$\omega_1 + \omega_2$
3	$0 \le \omega_1 + \omega_2 \le 1$, $\omega_1 \ge 0, \omega_2 \ge 0$	(1,1)	$\begin{cases} \omega_2 / \omega_1, & \omega_1 \ne 0, \\ 1, & \omega_1 = 0 \end{cases}$
4	$\omega_1 + \omega_2 = 1$, $\omega_1 \ge 0, \omega_2 \ge 0$	(0,0)	$\begin{cases} \omega_2 / \omega_1, & \omega_1 \ne 0, \\ 1, & \omega_1 = 0 \end{cases}$
5	$\lvert\omega_1\rvert + \lvert\omega_2\rvert \le 1$	(0,2)	$(\omega_1 + \omega_2)^2$
6	$\lvert\omega_1\rvert + \lvert\omega_2\rvert = 1$	(0,0)	$(\omega_1 + \omega_2)^2$
7	$\omega_1^2 + \omega_2^2 \le 1$	(2,0)	$(\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2)^2$
8	$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1$	(0,0)	$\omega_1 + \omega_2$
9	$\lvert\omega_1\rvert + \lvert\omega_2\rvert = 1$	(1,1)	$\omega_1 + \omega_2$
10	$\lvert\omega_1\rvert + \lvert\omega_2\rvert \le 1$	(2,0)	$\omega_1 - \omega_2$

Задание 4.5. Известна плотность распределения $p_\xi(x)$ случайной величины ξ. Выразить плотность распределения случайной величины η, если

1	$\eta = \xi^3$	6	$\eta = \ln \xi, \quad \xi \ge 0$
2	$\eta = \xi^{-1}$	7	$\eta = \operatorname{arctg} \xi$
3	$\eta = \sqrt{\xi}, \quad \xi \ge 0$	8	$\eta = \cos \xi$
4	$\eta = \exp \xi$	9	$\eta = \operatorname{tg} \xi$
5	$\eta = \lvert\xi\rvert$	10	$\eta = \xi^2$

Задачи

1. Проверьте следующие свойства индикаторов $I_A = I_A(\omega)$:

$$I_\varnothing \equiv 0,\ \ I_\Omega \equiv 1,\ \ I_A + I_{\bar{A}} \equiv 1,\ \ I_A I_B = I_{A \cap B},\ \ I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B},$$

$$I_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - I_{A_k}), \quad I_{\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}} = \prod_{k=1}^{n}(1 - I_{A_k}),$$

$$I_{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k} = \sum_{k=1}^{n} I_{A_k}, \quad I_{A \Delta B} = (I_A - I_B)^2.$$

2. Доказать, что функции $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = -\min\{x, 0\}$, $|x| = x^+ + x^-$ являются борелевскими.

3. Пусть $|\xi|$ – случайная величина. Будет ли ξ случайной величиной?

4. Пусть ξ – случайная величина. Является ли функция $(\xi + |\xi|)/2$ случайной величиной?

5. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F_\xi(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = (\xi + |\xi|)/2$.

6. Пусть $\xi^+ = \max\{\xi, 0\}$, $\xi^- = -\min\{\xi, 0\}$. Выразить функции распределения ξ^+ и ξ^- через функцию распределения ξ.

7. Пусть ξ – абсолютно непрерывная случайная величина. Является ли $\xi + 3$ абсолютно непрерывной случайной величиной?

8. Если $p(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – плотность распределения, то может ли быть функция $(p(x))^2$, $x \in \mathbb{R}$, плотностью распределения?

9. Верно ли равенство $F_{\xi^2}(x) = (F_\xi(x))^2$?

10. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – функции распределения. Будет ли функция $\theta F_1(x) + (1-\theta) F_2(x)$, $\theta \in [0; 1]$, функцией распределения?

11. Показать, что если $\mathrm{P}(\xi = x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$, то случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения. Верно ли обратное утверждение?

12. Пусть $\overline{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$ – двумерная случайная величина, являющаяся непрерывной, т. е. $\mathrm{P}(\overline{\xi} = x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Верно ли, что ее функция распределения непрерывна?

13.* Пусть ξ гауссовская случайная величина с матожиданием 0 и дисперсией 1. Доказать, что $P(|\xi| \geq x) \leq e^{-x^2/2}$ для любого $x \geq 0$.

14. Доказать, что если функция распределения непрерывна, то она равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

15.* Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – функции распределения. Найти необходимые и достаточные условия того, что $H(x) = F(G(x))$ – функция распределения.

16. Показать, что случайная величина ξ не зависит от самой себя в том и только в том случае, когда найдется число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\mathrm{P}(\xi = c) = 1$.

17.* Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ – вероятностное пространство, $\boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{A}$ – тривиальная σ-алгебра, т. е. $\mathrm{P}(G) = 0$ или $\mathrm{P}(G) = 1$ для всех $G \in \mathscr{G}$. Пусть случайная величина ξ является $\mathscr{G}$-измеримой. Доказать, что ξ вырожденная случайная величина, т. е. принимает одно значение с вероятностью 1.

18. Являются ли случайные величины ξ и $\mathrm{M}\xi$ независимыми?

19. Пусть случайные величины I_A , I_B и I_C независимы. Будут ли независимы случайные величины I_A и $I_B + I_C$?

20.* Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ – вероятностное пространство, $\mathscr{F} \subseteq \boldsymbol{A}$ – σ-алгебра, содержащая все множества нулевой вероятности из $\boldsymbol{A}$, ξ – случайная величина. Известно, что для каждой случайной величины η, независимой с σ-алгеброй $\mathscr{F}$, случайные величины ξ и η независимы. Верно ли, что ξ является $\mathscr{F}$-измеримой?

21.* Пусть ξ – случайная величина такая, что $\mathrm{P}(\xi \neq 0) > 0$. Предположим, что для некоторых чисел a и b функции распределения случайных величин $a\xi$ и $b\xi$ совпадают.

1) Верно ли, что $a = b$?

2) Верно ли то же при дополнительном предположении $a, b \geq 0$?

22.* На некотором вероятностном пространстве заданы случайные величины ξ, η и τ, причем η стохастически мажорирует ξ, т. е. $\mathrm{P}(\xi \leq x) \geq \mathrm{P}(\eta \leq x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

1) Следует ли отсюда, что $\eta + \tau$ стохастически мажорирует $\xi + \tau$?

2) Верно ли предыдущее утверждение при условии, что ξ и τ независимы, а также η и τ независимы?

23. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на [–1; 1]. Вычислить вероятность того, что корни уравнения $x^2 + \xi x + \eta = 0$ вещественны.

24. В каком случае вероятнее истратить более трех минут на ожидание транспорта: если ехать на автобусе (интервал движения 4 минуты) или дважды садиться в поезд метро (интервал движения 2 минуты)? Считать время ожидания равномерно распределенным в интервалах.

25. Совместная функция распределения случайных величин ξ и η имеет вид

$$F_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти $\mathrm{P}(\xi \leq \eta)$.

26. Случайная величина ξ имеет следующий закон распределения:

$$\begin{array}{lcc} \xi: & 0 & 1, \\ p: & 1/2 & 1/2, \end{array}$$

а $\eta = 2\xi$. Найти вероятность $P(\xi > \eta) = 1$.

27.* При каких условиях на ξ случайные величины ξ и $\sin\xi$ независимы?

28. На отрезке $[0; a]$ независимо друг от друга берут две точки с равномерным распределением. Найти функцию и плотность распределения расстояния между ними.

29. На прямоугольнике $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ случайно с равномерным распределением берется точка. Доказать, что ее координаты $(\xi; \eta)$ независимы.

30. В круге $x^2 + y^2 \le R^2$ случайно с равномерным распределением берется точка. Показать, что ее координаты $(\xi; \eta)$ зависимы.

31.* Пусть ξ и η – независимые нормальные случайные величины с параметрами $(0, \sigma^2)$. Доказать, что $\zeta = \xi^2 + \eta^2$ и $\kappa = \xi/\eta$ также независимы.

32. Доказать, что если величины ξ и η независимы и распределены по закону χ^2 с параметрами m и n, то величины $\zeta = \xi + \eta$, $\kappa = \xi/\eta$ также независимы.

33. Пусть ξ и η – независимые абсолютно непрерывные случайные величины с известными плотностями распределения. Доказать, что плотности распределения случайных величин $\xi\eta$ и ξ/η задаются следующими формулами:

$$p_{\xi\eta}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi\left(\frac{z}{y}\right) p_\eta(y)\frac{dy}{|y|} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x) p_\eta\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{|x|},$$

$$p_{\xi/\eta}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(zy) p_\eta(y)\,|y|dy = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x) p_\eta\left(\frac{x}{z}\right)|x|\frac{dx}{z^2}..$$

34. Пусть ξ – случайная величина с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $F(\xi)$.

35. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения $f(x)$. Найти плотность распределения случайной величины

$$\int_{-\infty}^{\xi} f(x)dx.$$

36. Длины сторон ξ и η треугольника – независимые случайные величины с функциями распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$. Найти функцию распределения третьей стороны, если угол между сторонами равен постоянному числу α.

37. Число заказов ξ, поступающих на фирму за день, распределено по закону Пуассона с параметром λ. Каждый заказ выполняется с вероятностью $p = 0{,}95$ независимо от остальных. Найти распределение случайной величины η, равной числу выполненных за день заказов.

38. Пусть X, Y, Z, ξ, η – независимые случайные величины, причем $P(\xi=-1) = P(\xi=1) = 1/2$, $P(\eta=-1) = P(\eta=1) = 1/2$. Доказать, что законы распределения (функции распределения) случайных величин $|X+\xi|Y+\eta Z||$ и $||X+\xi Y|+\eta Z|$ совпадают.

39.* Пусть X, Y и Z – независимые строго положительные случайные величины. Доказать, что для любого числа $x > 0$ верно неравенство $\mathrm{P}(X/Z < x, Y/Z < x) \geq \mathrm{P}(X/Z < x)\mathrm{P}(Y/Z < x)$.

40. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые случайные величины и

$$\xi_{\min} = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ \xi_{\max} = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Показать, что

$$\mathrm{P}(\xi_{\min} > x) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\xi_k > x), \ \mathrm{P}(\xi_{\max} \leq x) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\xi_k \leq x), \ x \in \mathbb{R}.$$

41.* Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $n \geq 1$, независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $p(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (если она существует); $\xi^- = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi^+ = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\overline{\xi} = \xi^+ - \xi^-$. Доказать, что

$$F_{(\xi^+,\,\xi^-)}(x, y) = \begin{cases} (F(x))^n - (F(x) - F(y))^n, & x > y, \\ (F(x))^n, & x \leq y; \end{cases}$$

$$p_{(\xi^+,\,\xi^-)}(x, y) = \begin{cases} n(n-1)[F(x) - F(y)]^{n-2} p(x)p(y), & x > y, \\ 0, & x \leq y; \end{cases}$$

$$F_{\overline{\xi}}(x) = \begin{cases} n\int\limits_{-\infty}^{\infty} [F(y) - F(y-x)]^{n-1}\, dF(y), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$

$$p_{\overline{\xi}}(x) = \begin{cases} n(n-1)\int\limits_{-\infty}^{\infty} [F(y) - F(y-x)]^{n-2} p(y-x)p(y)\, dy, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

42. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $n \geq 2$, независимы и одинаково распределены с функцией распределения F и плотностью p. Упорядочив их по возрастанию, образуем «вариационный» ряд $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \ldots \leq \xi_{(n)}$.

Найти плотность распределения $\xi_{(k)}$, $k=\overline{1,n}$, и двумерную плотность распределения $(\xi_{(k)}, \xi_{(l)})$, $1 \le k < l \le n$.

43. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одинаковую непрерывную функцию распределения F. Упорядочив их по возрастанию, образуем «вариационный» ряд $\xi_{(1)} \le \xi_{(2)} \le \ldots \le \xi_{(n)}$. Найти плотность распределения случайной величины

$$\eta = \frac{F(\xi_{(n)}) - F(\xi_{(2)})}{F(\xi_{(n)}) - F(\xi_{(1)})}.$$

44. Случайные величины ξ и η независимы, их плотности распределения соответственно равны

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \ |x|<1; \ p_\eta(x) = xe^{-x^2/2}, \ x>0.$$

Доказать, что величина $\xi \cdot \eta$ нормально распределена.

45. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные экспоненциальные случайные величины с параметром λ, $\lambda > 0$. Доказать, что

$$p_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

46. Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и экспоненциально распределены с параметром $\lambda = 1$. Найти плотность распределения случайной величины η, если

$$\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}.$$

47. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[\theta - 1/2; \theta + 1/2]$. Показать, что разность $\xi_1 - \xi_2$ имеет распределение, не зависящее от θ, и найти ее плотность распределения вероятности.

48. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, $\mathrm{P}(\xi_1 = 0) = 1/2$, $\mathrm{P}(\xi_1 = 1) = 1/2$, ξ_2 равномерно распределена на отрезке [0; 1]. Найти плотность $p_{\xi_1+\xi_2}(x)$.

49. Отрезок $[a; b]$ разбивается на две части точкой, имеющей равномерное на этом отрезке распределение. Случайная величина ξ равна отношению l_1/l_2 короткой части l_1 к длинной части l_2. Найти распределение ξ.

50. Пусть плотность двумерного случайного вектора (ξ, η) имеет вид $p_{(\xi,\eta)}(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$. Через $(R; \varphi)$ обозначим представление (ξ, η) в полярных координатах. Доказать, что:

1) случайные величины R и φ независимы;

2) φ равномерно распределена на отрезке $[0; 2\pi]$;

3) плотность распределения R равна $2\pi r f(r)$.

51. Случайные величины ξ и η обладают следующими свойствами: ξ положительна, т. е. $P(\xi > 0) = 1$, и имеет непрерывную плотность p; η при фиксированном ξ равномерно распределена на отрезке $[0; \xi]$. Доказать, что если η и $\xi - \eta$ независимы, то

$$p(x) = a^2 x e^{-ax}, \ x > 0, \ a > 0.$$

52. Пусть независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ имеют равномерные на отрезке [0; 1] распределения. Показать, что распределение величины $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot ... \cdot \xi_n$ имеет вид

$$P(\eta \le s) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^s t (\ln t)^n \, dt.$$

Указание. Либо вычислить непосредственно, либо ввести новые переменные $\zeta_i = \exp(-\xi_i)$.

53.* Пусть $\xi_0, \xi_1, ...$ – последовательность независимых двумерных случайных векторов равномерно распределенных в прямоугольнике $[a; b] \times [0; c]$, а $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ – некоторая плотность распределения, ограниченная константой c. Пусть $\tau = \min\{n \in N : \xi_n^2 \le f(\xi_n^1)\}$ – первый момент, когда ξ_n лежит ниже графика функции f. Доказать, что τ – случайная величина с геометрическим распределением с параметром $((b-a)c)^{-1}$, а плотность распределения случайной величины ξ_τ^1 равна f. (Этот факт может быть использован для моделирования случайной величины с данной плотностью распределения.)

54. Пусть закон распределения случайной величины ξ имеет вид

$$\begin{array}{lcc} \xi: & -1 & 1, \\ p: & 1/2 & 1/2, \end{array}$$

а $\eta = \xi^2$. Найти $\rho(\xi, \eta + 1)$.

55. Что больше: $D(\xi - 2\eta)$ или $D(\xi + 2\eta)$, если $\rho(\xi, \eta) = -1$?

56. Правомерно ли следующее рассуждение: «От дома до работы 1км. Я хожу в среднем со скоростью 5 км/ч, следовательно, в среднем на дорогу у меня будет уходить 12 минут»?

57. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ независимы и одинаково распределены. Найти $\rho(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_4 + \xi_5)$.

58. Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 одинаково распределены и имеют конечные вторые моменты. Показать, что случайные величины $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$ некоррелированы.

59. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с $p = \frac{1}{2}$. Найти $\mathrm{M}\eta$, где $\eta = \sin\frac{\pi\xi}{2}$.

60. В N телефонах-автоматах независимо ведутся разговоры, которые начались в одно и то же время. Длительность разговора, измеряемая в секундах, имеет геометрическое распределение с математическим ожиданием μ. Найти среднее время ожидания до первого освобождения какого-либо телефона-автомата.

61. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0; 2\pi]$, $\eta_1 = \cos\xi$, $\eta_2 = \sin\xi$. Найти $\rho(\eta_1, \eta_2)$. Являются ли случайные величины η_1, η_2 независимыми?

62. Дано $\mathrm{M}\xi = 0$, $\mathrm{M}|\xi| = 1$. Найти $\mathrm{M}\max(0,\xi)$, $\mathrm{M}\min(0,\xi)$.

63.* Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $\mathrm{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n = 0) = 0$. Найти

$$\mathrm{M}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k}{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}\right), \quad 1 \le k \le n.$$

64. Пусть ξ – нетривиальная случайная величина, $\mathrm{D}\xi < \infty$. Показать, что

$$\mathrm{P}\left(-3{,}2 < \frac{\xi - \mathrm{M}\xi}{\sqrt{\mathrm{D}\xi}} < 3{,}2\right) > 0{,}9 \text{ и } \mathrm{P}\left(-2 < \frac{\xi - a}{b} < 2\right) > 0{,}999,$$

где $a = \mathrm{M}\xi$, $b = (\mathrm{M}(\xi - a)^{10})^{\frac{1}{10}} < \infty$.

65.* Пусть ξ – неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Показать, что

$$\mathrm{M}\xi = \int_0^\infty (1 - F(x))\,dx$$

и для любой неотрицательной константы c

$$\mathrm{M}\min(\xi, c) = \int_0^c (1 - F(x))\,dx.$$

66. Найти $\mathrm{M}\xi_i$, $\mathrm{D}\xi_i$ и $\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)$ в полиномиальном законе распределения.

67. Случайные величины ξ, η – координаты точки, равномерно распределенной в круге $x^2 + y^2 \le R^2$. Найти коэффициент корреляции ξ и η.

68. Пусть случайные величины $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ независимы и одинаково распределены, причем $\mathrm{M}(\xi_i - \mathrm{M}\xi_i)^3 = 0.$ Доказать, что случайные величины $\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ и $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2$ некоррелированы.

69. Пусть ξ – стандартная случайная величина Коши. Найти $\mathrm{M}\min(|\xi|,\ 1)$.

70. Колесу, ось которого горизонтальна, придается вращение, которое затухает вследствие трения. Останавливаясь, фиксированный радиус образует с горизонтом случайный угол φ, который равномерно распределен в пределах от 0° до 360°. Найти среднее значение и дисперсию расстояния a от конца радиуса до горизонтального диаметра.

71. Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – n независимых равномерно распределенных на $[0;\ t]$ случайных величин. Найти математическое ожидание и дисперсию их минимума.

72. Число происшествий за неделю на некотором производстве является случайной величиной со средним μ и дисперсией σ^2. Количество травм, полученных в результате различных происшествий, представляет собой независимые величины с одинаковым средним ν и дисперсиями τ^2. Показать, что среднее число травм за неделю равно $\mu\nu$, а дисперсия числа травм за неделю равна $\sigma^2\nu^2 + \mu\tau^2$.

73. Пусть случайный вектор (ξ, η) имеет равномерное распределение в эллипсе

$$\left\{(x, y) : \frac{(x+y)^2}{a^2} + \frac{(x-y)^2}{b^2} \le 1\right\}.$$

Вычислить ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

74. Случайные величины ξ и η независимы и нормально распределены с одними и теми же параметрами a и σ^2. Доказать, что

$$\mathrm{M}\max(\xi, \eta) = a + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

75. Пусть случайная величина ξ принимает конечное число неотрицательных значений $x_1, \ldots, x_k$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{M}\xi^{n+1}}{\mathrm{M}\xi^n} = \max(x_1,\ ...,\ x_k),\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mathrm{M}\xi^n} = \max(x_1,\ ...,\ x_k).$$

76. Случайные величины $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$ независимы и равномерно распределены в $(0; 1)$. Пусть ν – случайная величина, равная такому k, при котором впервые сумма $\xi_1 + \ldots + \xi_k$ превосходит 1. Показать, что $\mathrm{M}\nu = e$.

77. Пусть случайная величина ξ принимает целые неотрицательные значения и $\mathrm{M}|\xi| < \infty$. Показать, что

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(\xi \geq k).$$

78. Пусть ξ и η – независимые случайные величины, принимающие целые неотрицательные значения и $\mathrm{M}|\xi| < \infty$. Доказать, что

$$\mathrm{M}\min(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(\xi \geq k)\mathrm{P}(\eta \geq k).$$

79. Показать, что дискретные случайные величины ξ и η, принимающие только по два значения, некоррелированы тогда и только тогда, когда они независимы.

80. Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2 имеют совместное нормальное распределение. Показать, что они независимы тогда и только тогда, когда некоррелированы.

81. Имеется n писем различным людям, адреса которых написаны на конвертах в случайном порядке. Пусть ξ – число писем, которые будут получены теми, кому они предназначены. Показать, что $\mathrm{M}\xi = 1$.

82. Пусть $\mathrm{M}\xi^2 < \infty$. Показать, что для любого числа $c \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{M}(\xi - c)^2 \geq \mathrm{D}\xi.$$

83.* Каково максимально возможное значение дисперсии случайной величины, принимающей значения:

1) из множества $\{0, 1, \ldots, N\}$;

2) из отрезка $[0; 1]$?

84. Пусть ξ и η – случайные величины с конечными моментами второго порядка. Доказать, что для любых a, $b \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{M}(\eta - a\xi - b)^2 \geq \mathrm{M}(\eta - a_0\xi - b_0)^2 = (1 - \rho^2(\xi, \eta))\mathrm{D}\eta,$$

где

$$a_0 = \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\mathrm{D}\xi},\ b_0 = \mathrm{M}\eta - a_0\mathrm{M}\xi;$$

если $\mathrm{D}\xi = 0$, то $a_0 = 0$.

85. Пусть ξ – положительная невырожденная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Показать, что

$$\frac{1}{\mathrm{M}\xi} \leq \mathrm{M}\frac{1}{\xi}.$$

86.* Найти $\lim\limits_{x \to \infty} x^k P(|\xi| > x)$, если $\mathrm{M}|\xi|^k < +\infty$.

87. Пусть ξ – случайная величина с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Доказать, что

$$\mathrm{M}|\xi| \le \frac{1}{2}(\mathrm{D}\xi + 1).$$

88. Пусть ξ и η – независимые случайные величины с конечными дисперсиями. Доказать, что $\mathrm{D}(\xi \cdot \eta) \ge \mathrm{D}\xi \cdot \mathrm{D}\eta.$

89.* Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$ принимает значения в $\mathbb{R}^k$, имеет математическое ожидание $m \in \mathbb{R}^k$, конечную матрицу ковариаций $B = \|\sigma_{ij}\|$, и существует такой набор $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k) \ne (0, 0, ..., 0)$, что $\mathrm{P}(\alpha_1\xi_1 + ... + \alpha_k\xi_k + \alpha_0 = 0) = 1.$ Доказать, что:

1) матрица B неотрицательно определена, т. е. $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} a_i a_j = \langle a, Ba\rangle \ge 0$ для любого $a \in \mathbb{R}^k$;

2) $B(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)^T = 0;$

3) если ранг B равен r, то существует r-мерное подпростанство $L_r \subset \mathbb{R}^k$, для которого $P\{\xi \in L_r\} = 1.$

90.* Вычислить дисперсию определителя $\det(\xi_{ij}),$ элементы которого ξ_{ij}, $i, j = \overline{1, n},$ – независимые случайные величины, для которых $\mathrm{M}\xi_{ij} = 0$ и $\mathrm{D}\xi_{ij} = \sigma^2.$

91.* Пусть $\xi_1, ..., \xi_n$ – случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Все эти величины одинаково коррелированны, т. е. $\rho(\xi_i, \xi_j) = \dfrac{\mathrm{M}(\xi_i - \mathrm{M}\xi_i)(\xi_j - \mathrm{M}\xi_j)}{\sqrt{\mathrm{D}\xi_i \mathrm{D}\xi_j}} = c$ для любых $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \ne j.$ Доказать, что $c \ge -\dfrac{1}{n-1}.$

92.* Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ – независимые случайные величины Бернулли. Положим

$$\eta_i \equiv \xi_i + \xi_{i+1} (\mathrm{mod}\ 2),\ \eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i.$$

Найти $\mathrm{M}\eta$ и $\mathrm{D}\eta.$

93. Пусть Ω – множество всех перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Вероятность P равномерно распределена на Ω. Для перестановки ω через

$\xi(\omega)$ обозначим число неподвижных точек ω. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

94. Пусть ξ_n – число неподвижных точек в случайной перестановке из n элементов (см. предыдущую задачу). Найти закон распределения ξ_n. Что произойдет при $n \to \infty$?

95.* Восемь мальчиков и семь девочек купили билеты на 15-местный ряд в кинотеатре. Считая, что все 15! их возможных расположений по этим местам равновероятны, найти математическое ожидание числа пар соседей противоположного пола. (Например, при расположении «м, м, м, м, м, м, м, д, м, д, д, д, д, д, д» имеется 3 пары соседей противоположного пола.) Решить эту же задачу в предположении, что мальчиков m и девочек n.

96.* В n-местный вагон купили билеты n пассажиров. При этом каждому пассажиру было выделено свое место. Первые $n-1$ пассажиров расселись в вагоне случайным образом так, что все $n!$ вариантов рассадки равновероятны. Однако n-й пассажир решил занять именно свое место. При этом он просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято), тот в результате просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято), и т. д. Найти математическое ожидание числа потревоженных пассажиров (n-й пассажир не входит в их число).

97. Из колоды в 52 карты извлекаются (без возвращения) карты до момента появления туза черви. Найти:

1) математическое ожидание этого момента (например, если туз черви лежит на первом месте, то этот момент равен 1);

2) математическое ожидание момента появления первого туза;

3) математическое ожидание момента появления первой карты черви.

98.* Пусть ξ – случайная величина, а f и g – возрастающие ограниченные функции. Доказать, что случайные величины $f(\xi)$ и $g(\xi)$ положительно коррелированны, т. е. их ковариация неотрицательна.

99.* Пусть ξ и η – независимые случайные величины, причем $\mathrm{M}|\xi+\eta|<\infty$. Верно ли, что $\mathrm{M}|\xi|<\infty$?

100. Пусть случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет непрерывное распределение, т. е. $\mathrm{P}(\xi = x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что случайная величина $\xi+\eta$ непрерывно распределена?

101.* Пусть ξ – случайная величина с $\mathrm{M}\xi^2 < \infty$. Найти $\inf \mathrm{M}(\xi\eta)$ по всем неотрицательным случайным величинам η таким, что $\mathrm{M}\eta^2 \le 1$.

102.* 1) Пусть X – ограниченная случайная величина на некотором вероятностном пространстве, λ – некоторое число из полуинтервала $(0; 1]$. Обозначим $u_\lambda(X) = \inf \mathrm{M}(ZX)$, где $\inf$ берется по множеству D_λ случайных величин Z таких, что $0 \le Z \le \lambda^{-1}$ и $\mathrm{M}Z = 1$. Доказать, что существует случайная величина $Z_+ \in D_\lambda$ такая, что $\mathrm{M}(Z_+ X) = u_\lambda(X)$.

2) Пусть X, Y – независимые невырожденные ограниченные случайные величины, λ – число из полуинтервала $(0; 1)$ (напомним, что случайная величина X называется вырожденной, если существует константа c такая, что $X = c$ п. в.). Верно ли, что $u_\lambda(X+Y) > u_\lambda(X) + u_\lambda(Y)$?

103.* Пусть X, Y и Z – независимые одинаково распределенные случайные векторы в R^n, принимающие конечное число значений. Обозначим через L (случайное) линейное подпространство R^n, порожденное векторами X и Y. Обозначим через $d(L)$ его размерность. Верно ли, что $\mathrm{P}(Z \in L \,|\, d(L) = 2) \ge \mathrm{P}(Z \in L \,|\, d(L) = 1)$.

104.* Пусть ξ – равномерно распределенная на отрезке $[0; \pi]$ случайная величина. Найти $\mathrm{M}(\xi \,|\, \sin\xi)$.

105.* Пусть ξ и η – независимые гауссовские случайные величины со средним 0 и дисперсией 1. Найти $\mathrm{M}(\xi \,|\, \xi\eta)$.

106.* Пусть случайные величины ξ и η такие, что:

1) $\mathrm{M}\xi^2 < \infty$, $\mathrm{M}\eta^2 < \infty$;

2) $\mathrm{M}|\xi| < \infty$, $\mathrm{M}|\eta| < \infty$;

3) $\mathrm{M}(\xi \,|\, \eta) = \eta$, $\mathrm{M}(\eta \,|\, \xi) = \xi$.

Доказать, что $\xi = \eta$ почти наверное.

107.* Пусть ξ – ограниченная случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{G}_n \subset \mathscr{H}_n$ – три последовательности σ-алгебр, лежащих в $\mathscr{A}$. Известно, что существует случайная величина η такая, что $\mathrm{M}(\xi \,|\, \mathscr{F}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \eta$ и $\mathrm{M}(\xi \,|\, \mathscr{H}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \eta$. Доказать, что тогда $\mathrm{M}(\xi \,|\, \mathscr{G}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \eta$.

108.* Пусть ξ и η – независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями, а $\mathscr{F}$ – некоторая σ-алгебра. Верно ли, что $\mathrm{M}(\xi\eta \,|\, \mathscr{F}) = \mathrm{M}(\xi \,|\, \mathscr{F})\mathrm{M}(\eta \,|\, \mathscr{F})$ почти наверное?

109.* Существует ли вероятностное пространство и последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин на нем со свойствами:

1) все ξ_n являются гауссовскими со средним 0 и дисперсией 1;

2) $\xi_n I(\xi_n \le 0) = \xi_m I(\xi_m \le 0)$ для всех n, m;

3) случайные величины $I(\xi_n \in [a_n; b_n])$, $n \in \mathbb{N}$, независимы в совокупности при произвольном выборе $a_n, b_n \ge 0$?

110.* Пусть ξ и η – случайные величины на одном вероятностном пространстве такие, что функции распределения величин $\xi+\eta$ и ξ равны.

1) Следует ли отсюда, что $\eta = 0$ почти наверное?

2) Тот же вопрос, что и в 1), если известно, что $\eta \geq 0$.

3) Тот же вопрос, что и в 1), если известно, что ξ и η независимы.

111.* 100 паровозов выехали из города по одноколейке, каждый с постоянной скоростью. Когда движение установилось, то из-за того, что быстрые догнали идущих впереди более медленных, образовалось несколько караванов (групп, движущихся рядом со скоростью лидера каравана). Найти среднее и дисперсию их числа. Скорости различных паровозов независимы и одинаково распределены, а функция распределения скорости непрерывна.

112.* Какова мощность множества всех функций распределения?

113.* Пете каждый день необходимо принести домой ведро воды объемом 1. Зачерпнув из колодца полное ведро, он по дороге домой разливает долю воды, равномерно распределенную на отрезке $[0;1]$. Сколько в среднем раз в день ему приходится ходить за водой?

114.* Пусть ξ и η – случайные величины с конечными математическими ожиданиями, причем для некоторого $z>0$ справедливы следующие неравенства: $\mathrm{M}\xi^+/\mathrm{M}\xi^- \geq z$ и $\mathrm{M}\eta^+/\mathrm{M}\eta^- \geq z$. Здесь, как обычно, $t^+ = \max\{t,0\}$ и $t^- = -\min\{t,0\}$.

1) Верно ли, что тогда $\mathrm{M}(\xi+\eta)^+/\mathrm{M}(\xi+\eta)^- \geq z$?

2) Та же задача, но в предположении, что ξ и η независимы.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ К ГЛАВЕ 1

7. Применим формулу включения-исключения:

$$1 \ge \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) + \mathrm{P}(A_4) - \sum_{1 \le j < k \le 4} \mathrm{P}(A_j \cap A_k) +$$

$$+ \sum_{1 \le j < k < i \le 4} \mathrm{P}(A_j \cap A_k \cap A_i) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \ge$$

$$\ge \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) + \mathrm{P}(A_4) - \sum_{1 \le j < k \le 4} \mathrm{P}(A_j \cap A_k) = 2 - \sum_{1 \le j < k \le 4} \mathrm{P}(A_j \cap A_k).$$

Откуда

$$\sum_{1 \le j < k \le 4} \mathrm{P}(A_j \cap A_k) \ge 1.$$

Так что хотя бы одно из слагаемых в левой части последнего неравенства не меньше чем 1/6.

Чтобы показать неулучшаемость оценки, рассмотрим следующий пример: вероятностное пространство $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где все шесть исходов равновероятны, и события $A_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $A_2 = \{\omega_1, \omega_4, \omega_5\}$, $A_3 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $A_4 = \{\omega_3, \omega_5, \omega_6\}$.

22. Число всех возможностей расстановки 8 ладей на шахматной доске равно $|\Omega| = C_{64}^8 = 4\,426\,165\,368$.

Найдем количество требуемых расстановок ладей. Для этого заметим, что ни одна ладья не бьет другую, если, и только если, все они стоят на разных вертикалях и горизонталях шахматной доски. Таким образом, на каждой вертикали и горизонтали должно быть ровно по одной ладье. Обозначим через A множество таких расстановок ладей, при которых все они стоят на разных вертикалях и горизонталях шахматной доски, а через A_k, $k = 1, 2, \ldots, 8$, подмножество A, содержащее расстановки, в которых одна из ладей находится в k-й вертикали и k-й горизонтали. Тогда множество искомых расстановок имеет вид $A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8)$. Применяя формулу включения-исключения, имеем

$$|A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8)| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8| = |A| - \sum_{i=1}^{8} |A_i| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 8} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| -$$

$$- \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 8} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \ldots + |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_8|.$$

Заметим, что $|A| = 8!$ и $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (8-k)!$, тогда

$$|A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8)| = 8! - \sum_{i=1}^{8} 7! + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 8} 6! - \ldots + 0! =$$

$$= \sum_{k=0}^{8} (-1)^k C_8^k (8-k)! = \sum_{k=0}^{8} (-1)^k \frac{8!}{k!} = 14\,833.$$

Тогда искомая вероятность

$$\frac{|A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8)|}{|\Omega|} = \frac{\sum_{k=0}^{8} (-1)^k \frac{8!}{k!}}{C_{64}^8} = \frac{14\,833}{4\,426\,165\,368} \approx 0{,}00000335121.$$

23. Количество вариантов извлечь 13 карт из колоды в 52 карты равно $|\Omega| = C_{52}^{13} = 635\,013\,559\,600$.

Обозначим через A_k, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, множество выборок, содержащих ровно k пар «туз-король» одной масти. Тогда

$$|A_k| = C_4^k \sum_{m=0}^{4-k} C_{4-k}^m 2^m C_{44}^{13-m-2k}.$$

Здесь множитель C_4^k – количество возможностей выбрать k мастей из 4 для пар «туз-король». Сумма – количество способов выбрать оставшиеся $13-2k$ карт таким образом, чтобы среди них не было пар «туз-король» одной масти. Индекс m показывает, сколько среди этих карт непарных тузов или королей. Число C_{4-k}^m показывает количество вариантов выбора масти m непарных тузов или королей, а 2^m – количество способов выбрать для каждой из этой масти одну из карт: туза или короля. Множитель $C_{44}^{13-m-2k}$ равен количеству способов выбрать недостающие карты, которые не будут тузами или королями. Тогда вероятности равны

$$\frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{C_4^k \sum_{m=0}^{4-k} C_{4-k}^m 2^m C_{44}^{13-m-2k}}{C_{52}^{13}}.$$

Значения $|A_k|$ и соответствующих вероятностей приведены в табл.

Таблица

k	$\lvert A_k \rvert$	$\mathrm{P}(A_k)$
0	495 448 231 528	0,7802167749616035
1	129 927 627 648	0,2046060681441864
2	9 426 859 728	0,0148451313920573
3	209 754 688	0,0003303152898532
4	1 086 008	0,0000017102122995

37. Вычислим указанные вероятности. Для этого заметим, что $X^2 - Y^2$ четно тогда и только тогда, когда оба числа X и Y либо четны, либо нечетны. Тогда

$$P_2 = \frac{\left[\frac{N}{2}\right]^2 + \left(N - \left[\frac{N}{2}\right]\right)^2}{N^2},$$

здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Аналогично $X^2 - Y^2$ делится на 3 тогда и только тогда, когда оба числа X и Y либо кратны 3, либо не кратны 3. Поэтому

$$P_3 = \frac{\left[\frac{N}{3}\right]^2 + \left(N - \left[\frac{N}{3}\right]\right)^2}{N^2}.$$

Откуда несложно получить, что $P_3 > P_2$ при $N \geq 4$.

38. Производящей функцией для чисел последовательности чисел a_0, a_1, ..., a_k, ... называется формальный степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots .$$

Найдем, например, производящую функцию для количества способов представить число N в виде суммы n слагаемых, каждое из которых равно одному из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Заметим, что при разложении выражения $(x^{k_1} + x^{k_2} + \ldots + x^{k_m})^n$ по степеням x коэффициентом при x^N окажется искомое количество способов. Взяв $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, ..., $k_m = m-1$ и обозначив число способов получить сумму N, складывая n слагаемых, каждое из которых равно одному из чисел $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, ..., $k_m = m-1$, через $C_m(n, N)$, получим

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{m-1})^n = \sum_{N=0}^{nm-n} C_m(n, N) x^N.$$

С другой стороны, воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии и разложением в ряд Тейлора, получим

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{m-1})^n = \frac{(1 - x^m)^n}{(1 - x)^n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{mk} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+n-1}^{n-1} x^k.$$

Откуда получаем, что

$$C_m(n, N) = \sum_k (-1)^k C_n^k C_{n+N-km-1}^{n-1},$$

где суммирование ведется по всем k от 0 до $\min(n, [N/m])$.

Чтобы найти число счастливых билетов, заменим последние 3 цифры этих счастливых билетов их дополнениями до 9. Например, вместо 615 372 возьмем 615 627. Тогда получится билет, сумма цифр которого равна 27 (в примере, 6 + 1 + 5 + 6 + 2 + 7 = 27). Так как цифры в билете принимают значения от 0 до 9, число цифр в каждом номере равно 6, а их сумма равна 27, то подсчет счастливых билетов сводится к отысканию значения $C_{10}(6, 27)$. Поэтому

$$C_{10}(6,27)=\sum_{k=0}^{2}(-1)^k C_6^k C_{32-10k}^5 = C_{32}^5 - C_6^1 C_{22}^5 + C_6^2 C_{12}^5 = 55\,252.$$

Итак, найдено количество счастливых билетов среди 1 000 000 билетов. Тогда искомая вероятность равна 0,055252.

40. Если число мужчин не равно числу женщин, то искомая вероятность равна 0. Пусть среди гостей n женщин и n мужчин. Занумеруем места по кругу. Для подсчета искомой вероятности воспользуемся формулой

$$\mathrm{P}(A\bigcup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\bigcap B),$$

где событие A состоит в том, что пары занимают места $(1,2),(3,4),\ldots,(2n-1,2n)$, а событие B – пары занимают места $(2,3)$, $(4,5)$, ..., $(2n,1)$. Найдем вероятность события A. Количество всех равновозможных исходов равно числу различных способов разместить n мужчин на $2n$ местах, т. е. C_{2n}^n. Теперь посчитаем количество благоприятных исходов для события A. Место мужчины в первой паре можно выбрать двумя способами, во второй паре тоже двумя и т. д. Таким образом, по правилу умножения получим, что число благоприятных исходов равно 2^n.

Таким образом, $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2^n}{C_{2n}^n}$. Аналогично находим $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2^n}{C_{2n}^n}$. Событие $A\bigcap B$ заключается в том, что мужчины занимают либо все четные места, либо все нечетные. Тогда $\mathrm{P}(A\bigcap B)=\dfrac{2}{C_{2n}^n}$. В итоге искомая вероятность для случая, когда среди гостей одинаковое число мужчин и женщин, равна $\dfrac{2^n}{C_{2n}^n}+\dfrac{2^n}{C_{2n}^n}-\dfrac{2}{C_{2n}^n}=\dfrac{2^{n+1}-2}{C_{2n}^n}$.

41. Будем считать, что в тот момент, когда вынутый коробок оказывается пустым, математик наполняет его снова (практически это можно осуществить, например, заменив пустой коробок новым полным) и продолжает и далее брать спички наудачу из того или другого коробка. Условимся считать, что это последовательное извлечение спичек прекращается после извлечения $(2n + 1)$-й спички; так как первоначально в обоих коробках было $2n$ спичек, то ясно, что к этому моменту хотя бы один из коробков будет пуст (и заполнен снова). Извлечение в первый раз $(n + 1)$-й спички из одного из коробков означает, что математик нашел коробок пустым.

Занумеровав коробки, например числами 1 и 2, можем описать все извлечения при помощи последовательностей длиной $2n + 1$, состоящих из цифр 1 и 2. Таких последовательностей 2^{2n+1}.

Для первого пункта задачи благоприятными будут те последовательности, у которых из первых $2n - r$ членов ровно n единиц и $n - r$ двоек, а $(2n - r + 1)$-й член последовательности равен 1, либо у которых из первых $2n - r$ членов ровно n двоек и $n - r$ – единиц, а $(2n - r + 1)$-й член последовательности равен 2. Количество таких последовательностей равно $2C_{2n-r}^n\cdot 2^r=2^{r+1}C_{2n-r}^n$. Отсюда искомая вероятность $p_1=\dfrac{2^{r+1}C_{2n-r}^n}{2^{2n+1}}=\dfrac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r}}$.

Аналогично для второго пункта задачи имеем $p_2=\dfrac{2^{r+2}C_{2n-r-1}^{n-1}}{2^{2n+1}}=\dfrac{C_{2n-r-1}^{n-1}}{2^{2n-r-1}}$.

В третьем пункте задачи благоприятными исходами являются последовательности, у которых количество единиц и двоек отличается на единицу, причем на последних двух местах стоят одинаковые числа. Количество таких последовательностей равно $2C_{2n-1}^{n}$. Поэтому вероятность равна $p_3 = \dfrac{2C_{2n-1}^{n}}{2^{2n+1}} = \dfrac{C_{2n-1}^{n}}{2^{2n}}$.

42. Весь протокол голосования можно записать в виде последовательности $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r+s}$, где ε_i, $i = 1, \ldots, r+s$ равно $+1$ или -1 в зависимости от того i-й избиратель проголосовал за кандидата R или S соответственно. Причем в каждой такой последовательности ровно r символов $+1$ и s символов -1. Тогда число всех таких протоколов голосования равно C_{r+s}^{r}.

Чтобы подсчитать количество протоколов, в которых кандидат R в течение всех выборов был впереди S, воспользуемся геометрической интерпретацией протоколов. Рассмотрим ортогональную систему координат с осями t и x, причем считаем, что ось t горизонтальна, а ось x – вертикальна. Последовательность $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r+s}$ будем изображать в этой системе координат при помощи ломаной, выходящей из начала координат, в которой i-е звено имеет угловой коэффициент наклона, равный ε_i, а i-я вершина имеет координаты $(i, \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i)$. Пример подобной ломаной изображен на рис. 9 Такие ломаные будут называться путями. Будем называть количество звеньев $r+s$ длиной пути. Заметим, что в данной задаче рассматриваются пути, ведущие из начала координат в точку с координатами $(r+s, r-s)$. Кандидат R лидировал на протяжении всех выборов в том и только том случае, когда $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$, $\ldots, \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{r+s} > 0$, т. е. когда все вершины пути, кроме начальной, лежат выше оси t. Назовем такие пути положительными. Таким образом, для подсчета искомой вероятности необходимо найти число положительных путей. Это число можно вычислить, используя следующий факт, который называется леммой об отражении.

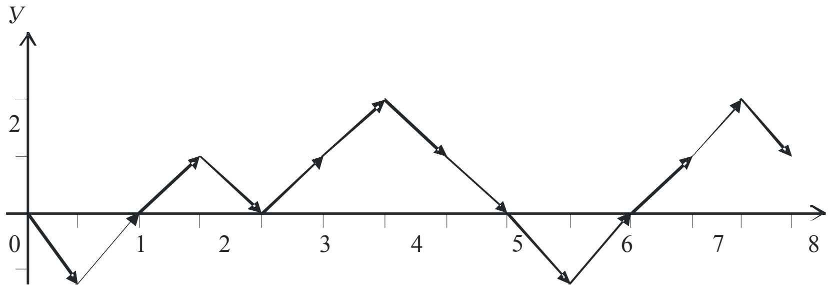

Рис. 9

Пусть $A = (a, \alpha)$ и $B = (b, \beta)$ – точки с целочисленными координатами, причем $b > a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Через $A' = (a, -\alpha)$ обозначим точку, симметричную точке A относительно оси t. Число путей из A в B, которые касаются оси t или пересекают ее, равно количеству всех путей из A' в B.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим путь из A в B, вершины которого находятся в точках с ординатами $s_a = \alpha$, s_{a+1}, $\ldots, s_b = \beta$ и имеют одну или несколько вершин на оси t. Пусть k – абсцисса первой такой вершины, т. е. $s_a > 0$, $s_{a+1} > 0,\ \ldots, s_{k-1} > 0,\ s_k = 0.$ Тогда путь с ординатами $-s_a,\ -s_{a+1},\ \ldots,\ -s_{k-1},\ s_k = 0,$ $s_{k+1},\ s_{k+2},\ \ldots,\ s_b$ ведет из A' в B и имеет первую вершину на оси t, точку $T = (k, 0).$ Звенья AT и $A'T$ – отражения одно другого, поэтому существует взаимно однозначное соответствие между всеми путями из A' в B и такими путями из A в B, которые имеют вершины на оси t.

Вернемся к подсчету количества положительных путей в нашей задаче. Очевидно, их существует столько же, сколько существует путей из точки $(1, 1)$ в точку $(r+s, r-s)$, которые не касаются оси t и не пересекают ее. По лемме об отражении получаем, что искомое число путей

$$C_{r+s-1}^{r-1} - C_{r+s-1}^{r} = \frac{(r+s-1)!}{(r-1)!s!} - \frac{(r+s-1)!}{(s-1)!r!} = C_{r+s}^{r}\,\frac{r-s}{r+s}.$$

Отсюда получаем искомую вероятность $\dfrac{r-s}{r+s}$.

44. Пусть в двух урнах по k шаров. В первой урне m_1 белых шаров и l_1 черных соответственно, во второй урне m_2 белых и l_2 черных шаров $(m_1 + l_1 = m_2 + l_2 = k)$. Вероятность того, что из первой урны при проведении n $(n \geq 3)$ извлечений шаров все они окажутся белыми, равна $\dfrac{m_1{}^n}{k^n}$, а вероятность того, что из второй урны при том же количестве извлечений взяты либо все черные, либо все белые, составит $\dfrac{m_2{}^n + l_2{}^n}{k^n}$. Так как по условию эти вероятности равны, то получим равенство

$$\frac{m_1{}^n}{k^n} = \frac{m_2{}^n + l_2{}^n}{k^n},$$

которое примет вид $m^n{}_1 = m_2{}^n + l_2{}^n$.

Применяя к полученному равенству теорему Ферма (утверждение, заключающееся в том, что для любого натурального числа $n > 2$ уравнение $x^n = y^n + z^n$ не имеет решений в целых ненулевых числах x, y, z), находим число n, которое, согласно этой теореме, может быть равно 1 или 2 (при $n \geq 3$ решений нет).

45. Отметим, что нетривиальный случай в этой задаче только при $r + m \geq n$.

Занумеруем ящики числами от 1 до n. Пусть событие S_i, $i = 1, \ldots, n,$ состоит в том, что ящик с номером i пуст. Тогда для $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n,\ \ k = 1, 2, \ldots, n,$ имеем

$$\mathrm{P}(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_k}) = \frac{(n-k)^r}{n^r}.$$

Через B_n обозначим событие, состоящее в том, что n данных ящиков заняты. Тогда $B_n = \Omega \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n)$ и по формуле включения-исключения

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \frac{(n-i)^r}{n^r}.$$

Искомая вероятность события A, состоящего в том, что останется ровно m пустых ящиков, равна

$$\mathrm{P}(A) = C_n^m \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i C_{n-m}^i \frac{(n-m-i)^r}{(n-m)^r}.$$

46. Отметим, что нетривиальный случай в этой задаче только при $r + m \geq n$.

Занумеруем ящики числами от 1 до n. Поскольку шары неразличимы, каждое разложение шаров по ящикам задается упорядоченным набором $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, где r_k – число шаров в k-м ящике, $\sum_{k=1}^{n} r_k = r$. Теперь подсчитаем количество таких различных упорядоченных наборов.

Рис. 10

Каждое разложение шаров по ящикам удобно представить так, как это показано на рис. 10, где изображена конфигурация из $r = 10$ точек (шаров) и $n - 1 = 4$ отрезков (границ ящиков). Каждая такая конфигурация задает размещение неразличимых шаров по ящикам, и наоборот, если задано состояние системы через упорядоченный набор n чисел, то ему соответствует одна конфигурация. Нарисованной конфигурации соответствует упорядоченный набор чисел $(4, 2, 0, 1, 3)$. Очевидно, что каждая конфигурация определяется положениями внутренних $n - 1$ отрезков, которые могут находиться в $n + r - 1$ позициях. Значит, имеется ровно C_{n+r-1}^{n-1} различных конфигураций и столько же различных разложений шаров по ящикам, т. е. $|\Omega| = C_{n+r-1}^{n-1} = C_{n+r-1}^{r}$.

Число исходов, благоприятных для искомого события A, равно $|A| = C_n^m C_{r-1}^{n-m-1}$.

Заметим, что второй множитель в последнем выражении вычисляется следующим образом: на первом шаге кладем по одному шару в каждый из $n - m$ выбранных ящиков, а остальные $r - (n - m)$ шаров размещаем в тех же ящиках произвольным образом, применяя формулу, найденную для числа всех исходов.

Таким образом,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{C_n^m C_{r-1}^{n-m-1}}{C_{n+r-1}^{r}}.$$

47. Игра более выгодна игроку A. На первом шаге он может расставить числа, например, следующим образом: на первой кости – 18, 10, 9, 8, 7, 5, на второй – 17, 16, 15, 4, 3, 2, а на третьей – 14, 13, 12, 11, 6, 1. Тогда вероятность того, что на первой кости появится число большее, чем на второй, равна 21/36. Аналогично на второй кости выпадет большее число, чем на третьей, с вероятностью 21/36. И вероятность появления на третьей кости числа большего, чем на первой, также равна 21/36. Поэтому при любом выборе игрока B игрок A может выбрать кость, у которой больше шансов победить.

48. Вообще говоря, нет. Рассмотрим следующий пример: в первой черной шляпе 4 билета, 3 из которых выигрышные, а в первой белой шляпе только один билет, который является выигрышным; вторая черная шляпа содержит один билет, который не является выигрышным, а во второй белой шляпе 4 билета и только один выигрышный.

51. Номера мест пассажиров образуют перестановку на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Число потревоженных пассажиров будет на единицу меньше длины цикла этой перестановки, содержащего число n. Таким образом, множество Ω всех элементарных исходов – это множество всех перестановок чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $|\Omega| = n!$. Обозначим через A_m событие, что будет потревожено ровно m пассажиров. Тогда в A_m содержатся все перестановки, у которых длина цикла, содержащего число n, равна $m+1$. Количество вариантов выбрать m чисел, образующих вместе с числом n цикл, равно C_{n-1}^m. Расположить эти числа внутри цикла можно $m!$ способами, а все остальные числа, не входящие в цикл, – $(n-m-1)!$ способом. Поэтому количество элементов в A_m равно $|A_m| = C_{n-1}^m m!(n-m-1)! = (n-1)!$. Значит, вероятность того, что будет потревожено ровно m пассажиров, равна

$$P(A_m) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

52. Если верхние концы уже как-то связаны, то число благоприятных исходов связывания нижних концов, очевидно, одно и то же для всех связываний верхних. Поэтому будем считать, что связка верхних фиксирована. Например, считаем, что связаны травинки номер 1 и 2, номер 3 и 4, номер 5 и 6. Способов связать нижние всего $C_6^2 \cdot C_4^2 = 90$ (на пером шаге выбираем две травинки из шести, на втором две из оставшихся). Вычислим, сколько из этих способов благоприятных. Выбрать первую связываемую пару можно $C_6^2 - 3 = 12$ способами (есть только три пары, которые выбирать нельзя). После этого остается 4 травинки, ровно у двух из которых связаны верхние концы. Поэтому на втором шаге нельзя выбирать вместе ни их, ни две остающиеся, значит, имеем 4 способа. Всего получается 48 способов. Поэтому искомая вероятность равна 48/90 = 8/15.

54. Перенумеруем сидящих за столом по часовой стрелке, начиная с нуля (тот человек, у которого тарелка вначале), и пусть p_k – вероятность, что последним тарелку получит k-й человек, $k = 1, 2, \ldots, 19$. Пусть $m \in \{2, 3, \ldots, 18\}$. Тогда после первой передачи тарелки m-й человек окажется либо в том же положении, в котором до начала передачи был $(m-1)$-й; либо в том, в котором был $(m+1)$-й, причем эти два варианта равновероятны. Следовательно, $p_m = (p_{m-1} + p_{m+1})/2$, т. е. числа p_1, p_2, …, p_{19} образуют арифметическую прогрессию. Очевидно, что $p_1 = p_{19}$, так что все элементы прогрессии равны. Значит, у всех людей, кроме того, у кого тарелка, искомая вероятность наибольшая.

55. Вероятностное пространство задается следующим образом:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, 2, \ldots, 6\}, i = 1, 2, \ldots, 6\},$$

где ω_i равно числу очков, выпавших при i-ом бросании.

Поэтому число всех элементарных исходов $|\Omega| = 6^n$.

Пусть событие A состоит в том, что выпавшая последовательность очков является неубывающей. Вычислим число исходов $|A|$, благоприятствующих событию A. Для каждого благоприятного исхода ω построим вектор $\overline{a}$ следующего вида:

$$\overline{a} = (1, \ldots, 1, 0, 2, \ldots, 2, 0, 3, \ldots, 3, 0, 4, \ldots, 4, 0, 5, \ldots, 5, 0, 6, \ldots, 6).$$

Здесь $\overline{a}$ – вектор размерности $n + 5$, причем только на пяти местах стоят нули, которые разделяют между собой группы из одинаковых чисел.

Таким образом, любой благоприятствующий событию A исход можно записать вектором типа $\overline{a}$. И наоборот, любой вектор типа $\overline{a}$ описывает исход, благоприятствующий событию A. Значит, $|A|$ равно числу способов построить вектор типа $\overline{a}$ или количеству вариантов расставить 5 нулей на $n + 5$ мест, т. е. $|A|= C_{n+5}^5$.

Тогда искомая вероятность равна

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_{n+5}^5}{6^n}.$$

74. Положим $\Omega = [0; 1]$. Тогда $A_x = \{\xi_1 \le x\}$ – подмножество Ω имеет вид

$$A_x = \begin{cases} \varnothing, & x < 0, \\ [0; x] \bigcup [1 - x; 1], & 0 \le x < 1/2, \\ [0; 1], & 1/2 \le x, \end{cases}$$

откуда

$$\mathrm{P}(\xi_1 \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, & 0 \le x < 1/2, \\ 1, & 1/2 \le x. \end{cases}$$

Аналогичным образом вычисляется вероятность $\mathrm{P}(\xi_2 \le x) = \begin{cases} 0, & x < 1/2, \\ 2x - 1, & 1/2 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x. \end{cases}$

75. Обозначим длину отрезка OA через R. Перпендикуляр OD, опущенный из центра O на сторону AB, имеет длину $R/2$.

Пусть событие H_m состоит в том, что треугольник пересекает ровно m окружностей, $m = 0, 1, \ldots, n$, а событие G – в том, что радиус R – целое число. Тогда $\mathrm{P}(G) = 0$, поскольку площадь конечного объединения окружностей равна нулю (учитывая вырожденный случай $R = 0$).

Количество окружностей, пересекающих треугольник, равняется мощности множества $\{k \in \mathbb{N} : R/2 \le k \le R\}, R \le n$. Если радиус R не целый, то эта мощность равняется $[R] - [R/2]$. Таким образом, событию H_m соответствуют точки A, для которых $[R] - [R/2] = m$ (с точностью до точек события G, которое имеет вероятность 0; последние могут как принадлежать H_m, так и не принадлежать). Данное уравнение относительно $R \in [0; n]$ имеет решение

$$\begin{cases} [0;1), \quad m=0, \\ [2m-1;2m+1),\ 1\le m\le (n-1)/2, \\ [n-1;n], \quad 2m=n, n \text{ четно}, \\ \{n\}, \quad 2m-1=n, n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Вычисляя площади соответствующих концентрических областей, получаем значение искомой геометрической вероятности:

$$\mathrm{P}(H_m)=\begin{cases} 1/n^2, \quad m=0, \\ ((2m+1)^2-(2m-1)^2)/n^2,\ 1\le m\le (n-1)/2, \\ (n^2-(n-1)^2)/n^2, \quad 2m=n, n \text{ четно}, \\ 0, \quad \text{иначе}. \end{cases}$$

81. 1) Если Ω конечно, то конечна и σ-алгебра $\mathscr{A}$, а вероятность P принимает конечное число значений, которые образуют замкнутое множество.

Пусть теперь $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$ счетно, а числа $x_n=\mathrm{P}(A_n)\to x\in[0,1]$ при $n\to\infty$. Рассмотрим множество $Z_0:=\mathbb{N}$ и построим по индукции последовательность подмножеств $Z_k\subset\mathbb{N}$ и последовательность чисел n_k, $k=1,2,\ldots$. Допустим, Z_k построено. Представим его в виде $Z_k=Z_{k+1}^0\bigcup Z_{k+1}^1$, где $Z_{k+1}^0=\{n\in Z_k:\omega_{k+1}\notin A_n\}$ и $Z_{k+1}^1=\{n\in Z_k:\omega_{k+1}\in A_n\}$. Тогда одно из подмножеств Z_{k+1}^0 или Z_{k+1}^1 бесконечно. Обозначим его Z_{k+1}^2, выберем произвольное $n_{k+1}\in Z_{k+1}^2$ и положим $Z_{k+1}=Z_{k+1}^2\setminus\{n_{k+1}\}$. По построению для всех $k\ge1$ имеем, что если $\omega_k\in A_{n_k}$, то $\omega_k\in A_{n_j}$ при всех $j\ge k$. А если $\omega_k\notin A_{n_k}$, то $\omega_k\notin A_{n_j}$ при всех $j\ge k$. Поэтому последовательность событий A_{n_k} имеет предел $A=\lim\limits_{k\to\infty}A_{n_k}\in\mathscr{A}$. Свойство непрерывности вероятности (глава 1, свойство 9) дает равенство $\mathrm{P}(A)=\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{P}(A_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x$.

2) Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ можно разложить каждое событие C в конечное дизъюнктное объединение событий A_j, где $\mathrm{P}(A_j)\le\varepsilon$. Заметим, что для любого события A, $\mathrm{P}(A)>0$, существует $B\subset A$, где $0<\mathrm{P}(B)\le\varepsilon$. Действительно, если $\mathrm{P}(A)\le\varepsilon$, то положим $B=A$. Если $\mathrm{P}(A)>\varepsilon$, то найдем $A_1\subset A$, где $0<\mathrm{P}(A_1)<\mathrm{P}(A)$. Либо $\mathrm{P}(A_1)$, либо $\mathrm{P}(A\setminus A_1)$ не превосходят $\mathrm{P}(A)/2$. Если $\mathrm{P}(A)/2\le\varepsilon$, то цель достигнута. В противном случае выберем из A_1 и $A\setminus A_1$ подмножество наименьшей меры и продолжим разбиение. Процесс закончится, поскольку $\mathrm{P}(A)/2^r\le\varepsilon$ при достаточно большом r.

Нам понадобится следующая численная характеристика событий: $S_\varepsilon(A)=$ $=\sup\{\mathrm{P}(B):B\subset A,\mathrm{P}(B)\le\varepsilon\}$. Если $\mathrm{P}(A)>0$, то $0<S_\varepsilon(A)\le\varepsilon$.

По индукции построим следующую последовательность дизъюнктных событий $A_k\subset C$, $k\ge1$. Выберем A_1 так, что $0<\mathrm{P}(A_1)\le\varepsilon$. Если $A_1,\ldots,A_n$ уже выбраны, то выберем A_{n+1} так, что $A_{n+1}\subset\overline{A_1\sqcup\ldots\sqcup A_n}$ и $S_\varepsilon(\overline{A_1\sqcup\ldots\sqcup A_n})/2\le\mathrm{P}(A_{n+1})\le\varepsilon$. В силу дизъюнктности $\sum_k \mathrm{P}(A_k) \le \mathrm{P}(\Omega)$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = 0$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_\varepsilon(\overline{A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n}) = 0$. Поскольку S_ε – монотонная функция множеств, то для $B = \coprod\limits_{n\ge 1} A_n$ имеем $S_\varepsilon(\overline{B}) = 0$. Положим $A_1^* := A_1 \sqcup \overline{B}$. Учитывая, что при N достаточно большом верно неравенство $\mathrm{P}(A_N^*) \le \varepsilon$, где $A_N^* := \coprod\limits_{n\ge N} A_n$, получим требуемое разбиение: $C = A_1^* \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_N^*$.

Пусть $0 < x < 1$. Построим событие A, для которого $\mathrm{P}(A) = x$. Для этого разделим Ω на N_1 дизъюнктных событий $A_{1,j}$ таких, что $0 < P(A_{1,j}) \le x/2$, $1 \le j \le N_1$. Обозначим $x_{1,r} := \mathrm{P}(\coprod\limits_{1\le j\le r} A_{1,j})$, $1 \le r \le N_1$. Тогда x содержится в некотором интервале $[x_{1,r_1}; x_{1,r_1+1})$. Если $x = x_{1,r_1}$, то построение закончено. Если $x_{1,r_1} < x < x_{1,r_1+1}$, то разложим A_{1,r_1+1} в объединение $A_{2,j}$, $1 \le j \le N_2$, для которых $0 < \mathrm{P}(A_{2,j}) \le (x - x_{1,r_1})/2$. Обозначим $x_{2,r} := \mathrm{P}(\coprod\limits_{1\le j\le r_1} A_{1,j} \sqcup \coprod\limits_{1\le j\le r} A_{2,j})$. Тогда x содержится в некотором интервале $[x_{2,r_2}; x_{2,r_2+1})$. Продолжая процесс, получим событие $A = \coprod\limits_{1\le j\le r_1} A_{1,j} \sqcup \ldots \sqcup \coprod\limits_{1\le j\le r_s} A_{s,j} \sqcup \ldots$, для которого $\mathrm{P}(A) = x$.

3) Событие $A \in \mathscr{A}$, для которого $\mathrm{P}(A) > 0$, называется атомом относительно вероятностной меры P, если для каждого $B \subset A$, $B \in \mathscr{A}$ либо $P(B) = 0$, либо $P(B) = P(A)$. Два атома A, A' либо совпадают с точностью до нуль-множества, либо дизъюнктны с точностью до нуль-множества. Значит, можно найти конечное или счетное число атомов $A_k, k \ge 1$, таких, что $\Omega \backslash \coprod\limits_{k\ge 1} A_k$ уже не содержит атомов. Если положить

$$B := \coprod_{k\ge 1} A_k,\ \mu_1(A) = \mathrm{P}(A \cap B),\ \mu_2(A) = \mathrm{P}(A \cap \overline{B}),$$

то $\mathrm{P}(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$. Меру μ_1 можно рассматривать как меру на множестве всех подмножеств некоторого Ω', состоящего из множеств A_k как элементов. В силу пункта 1) образ $F := \{\mu_1(A) : A \in \mathscr{A}\}$ – замкнутое множество. Мера μ_2 – неатомическая. Как в пункте 2), показывается, что $I := \{\mu_2(A) : A \in \mathscr{A}\}$ является некоторым отрезком $[0; d]$. Сумма $F + I = \{x + y : x \in F, y \in I\}$ замкнута. Действительно, пусть $x_n \in F + I$, $x_n = y_n + a_n$, где $y_n \in F$, $a_n \in I$, и пусть $x_n \to x$ при $n \to \infty$. В силу компактности I из (a_n) можно выбрать подпоследовательность $a_{n_k} \to a \in I$. А значит, $y_{n_k} = x_{n_k} - a_{n_k} \to x - a$. Поскольку F замкнуто, то $y := x - a \in F$. Отсюда $x = y + a \in F + I$.

82. Несложно видеть, что для $n = 1, 2, \ldots$ справедливы включения

$$\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subset A_n \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,$$

а поэтому в силу свойства вероятностей

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right) \le \mathrm{P}(A_n) \le \mathrm{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right).$$

В последнем соотношении перейдем к пределу при $n \to \infty$:

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right) \le \varliminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \le$$

$$\le \varlimsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \le \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right).$$

Из того, что $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$, т. е.

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m,$$

приходим к выводу, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\lim_{n\to\infty} A_n).$$

83. Да, можно. Будем говорить, что два натуральных числа m и n эквивалентны друг другу, если для каждого $A \in \mathrm{A}$ либо оба числа m и n принадлежат множеству A, либо оба не принадлежат ему. Тогда множество натуральных чисел разобьется на не более чем счетное число классов эквивалентности $B_1, B_2, \ldots$. Кроме того,

$$B_k = \bigcap_{i\in B_k}\bigcap_{j\notin B_k} A_{ij}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $A_{ij} \in \mathrm{A}$ взято так, что $i \in A_{ij}$, но $j \notin A_{ij}$ (по определению отношения эквивалентности такое множество в A найдется). Продолжим вероятность на одноэлементные подмножества множества натуральных чисел. Если $B_k = \{b_{k1}, b_{k2}, ...\}$, $b_{k1} < b_{k2} < \ldots$, то положим $\mathrm{P}(\{b_{k1}\}) = \mathrm{P}(B_k)$ и $\mathrm{P}(\{b_{kj}\}) = 0$ при $j > 1$. С одноэлементных подмножеств по свойству σ-аддитивности распространим нашу вероятность на все подмножества множества натуральных чисел.

84. Отождествим окружность с интервалом $[0; 2\pi)$. Тогда для любого натурального n имеем $\mathrm{P}\left(\left[0, \frac{2\pi}{n}\right)\right) = \mathrm{P}\left(\left[\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}\right)\right) = \ldots = \mathrm{P}\left(\left[\frac{2\pi(n-1)}{n}, 2\pi\right)\right)$. Поэтому $\mathrm{P}([0; 2\pi q)) = q$ для всех рациональных $q \in [0; 1]$. Откуда следует, что $\mathrm{P}([0; x)) = \frac{x}{2\pi}$ при $x \in [0; 2\pi)$, что влечет требуемое утверждение.

Для доказательства второго утверждения заметим, что для каждого $\beta \in \mathbb{R}$ найдется последовательность натуральных чисел $n(k)$ такая, что $\varphi_{n(k)\alpha} \to \varphi_\beta$ поточечно. Поэтому $\mathrm{P} \circ \varphi_\beta^{-1} = \mathrm{P}$ для всех $\beta \in \mathbb{R}$ и требуемое утверждение вытекает из предыдущих рассуждений.

85. Пусть $d \in \mathbb{N}$. Во множестве $\{1, ..., N\}$ ровно $[N/d]$ чисел кратных d. Таким образом, вероятность того, что оба числа a, b кратны d, равняется $\left(\frac{[N/d]}{N}\right)^2$. Ясно, что $(a, b) = 1$ тогда и только тогда, когда не существует простого числа p, которое бы делило одновременно a и b. Поэтому, откинув все пары, которые делятся одновременно на $p_1 = 2$, $p_2 = 3, ...$ и т. д., получим по формуле включения-исключения

$$1 - P_N = \sum_{p_i}\left(\frac{[N/p_i]}{N}\right)^2 - \sum_{p_i<p_j}\left(\frac{[N/p_ip_j]}{N}\right)^2 + \sum_{p_i<p_j<p_k}\left(\frac{[N/p_ip_jp_k]}{N}\right)^2 - ...$$

(фактически только конечное число слагаемых отлично от нуля). Слагаемые данного ряда имеют пределы при $N \to +\infty$. Мы имеем право переставить взятие предела и суммирование, поскольку данный ряд по модулю ограничен сходящимся рядом, не зависящим от N, а именно

$$1 - P_N \le \sum_{p_i}\left(\frac{N/p_i}{N}\right)^2 + \sum_{p_i<p_j}\left(\frac{N/p_ip_j}{N}\right)^2 + ... \le 1 + \sum_{p_i}\left(\frac{N/p_i}{N}\right)^2 + \sum_{p_i \le p_j}\left(\frac{N/p_ip_j}{N}\right)^2 + ... =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... < +\infty.$$

Здесь равенство немедленно следует из однозначности разложения натуральных чисел на простые множители. Отсюда

$$\lim_{N\to\infty} P_N = 1 - \sum_{p_i}\left(\frac{1}{p_i}\right)^2 + \sum_{p_i<p_j}\left(\frac{1}{p_ip_j}\right)^2 - ... = \prod_{p_i}\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right) = \left(\prod_{p_i}\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right)^{-1}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\prod_{p_i}\left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \right)\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...\right)^{-1} = \zeta(2)^{-1}.$$

Дополнительными рассуждениями можно показать, что $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Ответ: $6/\pi^2$.

86. Свойство Люка докажем, используя следующие три свойства:

1) Соседние числа Фибоначчи взаимно просты. Действительно, в силу рекурентного соотношения $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ имеем

$$(F_{n+1}, F_n) = (F_n, F_{n-1}) = ... = (F_2, F_1) = 1.$$

2) Верно равенство $F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n$. При $n = k = 1$ оно проверяется непосредственно. Шаг индукции по k дается следующим равенством (шаг индукции по n аналогичен):

$$F_{n+(k+1)} = F_{n+k} + F_{n+(k-1)} = (F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n) + (F_{k-1}F_{n+1} + F_{k-2}F_n) =$$

$$= (F_k + F_{k-1})F_{n+1} + (F_{k-1} + F_{k-2})F_n = F_{k+1}F_{n+1} + F_kF_n.$$

3) Если $m > n$, то $(F_m, F_n) = (F_{m-n}, F_n)$. Действительно, пусть $m = n + k$. Тогда

$$(F_{n+k}, F_n) = (F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n, F_n) = (F_k F_{n+1}, F_n) = (F_k, F_n).$$

Применяя несколько раз свойство 3), дойдем до пары вида (F_{kd}, F_d), где $d = (m, n)$. Но $(F_{kd}, F_d) = F_d$, это сразу выводится по индукции из свойства 2). Свойство Люка доказано.

Перейдем к самой задаче. Введем обозначения: $\Psi_d(N)$ – число пар (a, b), где $1 \le a, b \le N$ и $(a, b) = d$; $\Phi(N)$ – число пар (a, b), где $1 \le a, b \le N$ и $(F_a, F_b) = F_{(a,b)} = 1$. Отметим, что $F_{(a,b)} = 1$ тогда и только тогда, когда $(a, b) = 1$ или $(a, b) = 2$. Однако пары (a, b) с наибольшим общим делителем 2 находятся во взаимно однозначном соответствии с парами взаимно простых чисел $(a/2, b/2)$. Таким бразом,

$$\Phi(N) = \Psi_1(N) + \Psi_2(N) = \Psi_1(N) + \Psi_1(N/2).$$

Учитывая результат предыдущей задачи, который можно сформулировать в виде равенства $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\Psi_1(N)}{N^2} = \dfrac{6}{\pi^2}$, имеем

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\Phi(N)}{N^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{\Psi_1(N) + \Psi_1(N/2)}{N^2} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{\Psi_1(N)}{N^2} + \frac{1}{4} \frac{\Psi_1(N/2)}{(N/2)^2} \right) = \frac{5}{4} \frac{6}{\pi^2} = \frac{15}{2\pi^2}.$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ К ГЛАВЕ 2

10. Рассмотрим события A_i = {книга есть в фонде i-й библиотеки}, $P(A_i) = 1/2$, B_i = {книга i-й библиотеки выдана на руки читателю}, $P(B_i|A_i) = 1/2$. Вероятность того, что студент не достанет книгу в i-й библиотеке, есть $P(\overline{A}_i) + P(B_i \mid A_i) P(A_i) = 3/4$. В силу независимости вероятность не достать книгу в трех библиотеках равняется $(3/4)^3 < 1/2$. Таким образом, студент вероятнее всего достанет книгу.

11. Пусть $A :=$ {ответ учащегося совпадает с ответом учителя}, $B_1 :=$ {учащийся – мальчик}, $B_2 :=$ {учащийся – девочка}. Тогда условие принимает вид

$$P(A) = P(A \mid B_1) P(B_1) + P(A \mid B_2) P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

Пусть $q = \dfrac{\text{М}}{\text{Д}}$ – отношение числа мальчиков к числу девочек, тогда

$$P(B_1) = \frac{\text{М}}{\text{М}+\text{Д}} = \frac{q}{q+1}, \quad P(B_2) = \frac{\text{Д}}{\text{М}+\text{Д}} = \frac{1}{q+1}.$$

$P(A \mid B_1) = P${оба ответа верны} + P{оба ответа неверны} $= \alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta)$, $P(A \mid B_2) = \alpha\gamma + (1-\alpha)(1-\gamma)$. Получаем, что

$$(\alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta)) \frac{q}{q+1} + (\alpha\gamma + (1-\alpha)(1-\gamma)) \frac{1}{q+1} = \frac{1}{2}, \text{ т. е.}$$

$$q(1-2\alpha-2\beta+4\alpha\beta)=2\alpha+2\gamma-4\alpha\gamma-1, \text{ т. е.}$$
$$q(2\beta-1)(2\alpha-1)=(1-2\gamma)(2\alpha-1).$$

Отсюда видим, что если $\alpha=\frac{1}{2}$, то q может быть любым; если $\alpha\neq\frac{1}{2}$, но $\beta=\gamma=\frac{1}{2}$, то q также может быть любым; если $\gamma=\frac{1}{2}$, $\beta\neq\frac{1}{2}$, то $q=0$; наконец, при $\gamma\neq\frac{1}{2}$ получаем $q=\frac{1-2\gamma}{2\beta-1}$.

12. Легко видеть, что на всех шагах четность числа белых шаров сохраняется. Поэтому P{последний шар – черный} = $\begin{cases}0, n\equiv 1(\operatorname{mod}2),\\ 1,\ n\equiv 0(\operatorname{mod}2).\end{cases}$

29. Вообще говоря, нет. Рассмотрим двукратное бросание симметричной монеты. Положим A = {выпал герб в первом испытании}, B = {выпал герб во втором испытании}, C = {выпал ровно один герб в двух испытаниях}.

30. Вообще говоря, неверно. Рассмотрим схему геометрической вероятности, где $\Omega=[0;3]\subset\mathbb{R}$. Положим

$$A:=[1;2],\quad B:=[0;\,2/3]\bigcup[7/3;\,3],\quad n=2,\quad C_1:=[0;\,2-1/4],\quad C_2:=[1+1/4;\,3].$$

Тогда

$$\mathrm{P}(A\bigcap C_i)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)>\mathrm{P}(B\bigcap C_i)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3},\quad i=1,\,2,$$

и

$$\mathrm{P}(A\,|\,C_i)=\frac{\mathrm{P}(A\bigcap C_i)}{\mathrm{P}(C_i)}>\frac{\mathrm{P}(B\bigcap C_i)}{\mathrm{P}(C_i)}=\mathrm{P}(B\,|\,C_i),\quad C_1\bigcup C_2=\Omega.$$

Однако

$$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}>\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}.$$

31. Рассмотрим подбрасывание трех симметричных монет. Пусть событие A_k состоит в том, что на k-ой монетке выпал герб, $k=1,\,2,\,3$, а событие A_4 – герб выпал на четном числе монет. Тогда можно убедиться непосредственной проверкой, что события $A_1,\,A_2,\,A_3,\,A_4$ являются зависимыми в совокупности, но каждые три из них – независимы.

32. Вообще говоря, нет. Рассмотрим следующий пример: $\Omega=\{\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3\}$, $\mathscr{F}=\{\varnothing,\{\omega_1\},\{\omega_2,\omega_3\},\Omega\}$, $\mathrm{P}(\{\omega_1\})=\mathrm{P}(\{\omega_2\})=\mathrm{P}(\{\omega_3\})=1/3$, $A=\{\omega_3\}$. Заметим, что событие B независимо с σ-алгеброй $\mathscr{F}$, только если B невозможное или достоверное. Но тогда B будет независимо и с $A\notin\mathscr{F}$.

33. При $x<0$ интересующее нас событие – невозможное, а при $x\geq 1$ – достоверное. Пусть η_1 – длина левой части, η_2 – правой. По схеме геометрической вероятности $P(\eta_1 \le x) = P(\eta_2 \le x) = x$ (хотя эти два события зависимы). Считая, что выбор правой и левой частей равновероятен, т. е. $P(\eta = \eta_1) = P(\eta = \eta_2) = 1/2$, получаем по формуле полной вероятности

$$P(\eta \le x) = P(\eta_1 \le x)\cdot P(\eta = \eta_1) + P(\eta_2 \le x)\cdot P(\eta = \eta_2) = x.$$

Ответ: $P(\eta \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$

77. Пусть p_i – вероятность того, что случайно выбранный человек имеет i-ю группу крови.

1) Пусть событие A_i состоит в том, что больной имеет i-ю группу крови, $P(A_i) = p_i$, а B состоит в том, что больному подошла кровь донора. По формуле полной вероятности получаем ответ

$$p = \sum_{i=1}^{4} P(B \mid A_i)P(A_i) = p_1p_1 + (p_1 + p_2)p_2 + (p_1 + p_3)p_3 + (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)p_4 = 0{,}575.$$

2) Подсчитаем вероятность события C_n – нужной группы крови не найдется среди n доноров:

$$q_n = \sum_{i=1}^{4} P(C_n \mid A_i)P(A_i) = (p_2 + p_3 + p_4)^n p_1 + (p_3 + p_4)^n p_2 + (p_2 + p_4)p_3 + 0\cdot p_4.$$

Искомая вероятность равняется $1 - q_n$.

78. 1) Интересующее нас событие представляет собой пересечение N независимых событий, каждое из которых является дополнительным к $\{j \in A_1\} \cap \{j \in A_2\}$, $j \in S$, и имеет вероятность $1 - p^2$. *Ответ*: $(1 - p^2)^N$.

2) Искомое событие описывается схемой Бернулли с N испытаниями, если считать «успехом» событие $\{j \in A_1\} \cap \{j \in A_2\}$ (происходящее с вероятностью p^2), а «неудачей» – дополнительное событие (происходящее с вероятностью $1 - p^2$). *Ответ*: $C_N^k (p^2)^k (1 - p^2)^{N-k}$.

79. Чтобы получить размещение 7 идентичных шаров по 7 ящикам такое, что ровно 2 ящика пустые, а один содержит 3 шара, необходимо выбрать местоположение 2 пустых ящиков (C_7^2 способов), а затем местоположение 1 ящика с 3 шарами (C_5^1 способов), оставшиеся 4 шара будут размещаться по одному в каждом из 4 оставшихся ящиков.

Чтобы получить размещение 7 идентичных шаров по 7 ящикам такое, что ровно 2 ящика пустые, необходимо выбрать местоположение 2 пустых ящиков (C_7^2 способов), а затем либо местоположение 1 ящика с 3 шарами (C_5^1 способов), либо местоположение 2 ящиков с 2 шарами в каждом (C_5^2 способов).

По определению условной вероятности получаем ответ:

$$\frac{C_7^2 C_5^1}{C_7^2 (C_5^1 + C_5^2)} = \frac{1}{3}.$$

80. Предположим, сначала, что пьяница стоит на дороге. Он может делать шаги влево и вправо сколь угодно долго без падения. Предполагая, что длина его шага постоянна, занумеруем целыми числами положения, в которых он может оказаться. Таким образом, его движение можно представить как случайное блуждание по целым точкам прямой. Положим $\xi_i = +1,$ если он делает i-й шаг вправо и $\xi_i = -1,$ если влево. Тогда $S_k^x = x + \xi_1 + \ldots + \xi_k$ описывает положение пьяницы через k шагов при условии, что сначала он находился в точке x. Кроме того, последовательность $(S_0^x, S_1^x, \ldots, S_n^x, \ldots)$ описывает траекторию его движения. Из условия вытекает, что $\mathrm{P}(\xi_i = 1) = p$ и $\mathrm{P}(\xi_i = -1) = 1 - p = q,$ причем эти события при различных $i = 1, 2, \ldots$ независимы.

Для решения задачи будем считать, что сначала пьяница находится в точке $x = 1,$ а в точке 0 находится край утеса. В тот момент k, когда впервые $S_k^x = 0$ пьяница падает с утеса, хотя само блуждание остается определенным и для дальнейших моментов.

Обозначим через B^x событие, что, начав из точки $x,$ пьяница не избежит падения, а через $\beta(x) = \mathrm{P}(B^x)$ – вероятность этого события. Очевидно, что $\beta(0) = 1.$ По формуле полной вероятности получим

$$\beta(x) = \mathrm{P}(B^x | \xi_1 = 1)\mathrm{P}(\xi_1 = 1) + \mathrm{P}(B^x | \xi_1 = -1)\mathrm{P}(\xi_1 = -1) = p\mathrm{P}(B^{x+1}) + q\mathrm{P}(B^{x-1}).$$

Отсюда вытекает уравнение для нахождения $\beta(x)$:

$$\beta(x) = p\beta(x+1) + q\beta(x-1). \qquad (1)$$

Предположим сначала, что $p \neq q.$ Тогда можно показать, что уравнение (1) имеет общее решение $\beta(x) = a + b(q/p)^x.$ Условие $\beta(0) = 1$ дает одно ограничение на константы a и b: $a + b = 1.$

Если $q > p$, то в силу ограниченности $\beta(x)$ (это вероятность события) сразу получаем, что $b = 0$ и $\beta(x) = 1.$

Если же $q < p,$ то поступим следующим образом. Рассмотрим произвольное натуральное число $N.$ Обозначим через B_N^x событие, что, выходя из точки $0 \le x \le N,$ пьяница раньше достигнет края утеса, чем точки $N,$ а его вероятность обозначим $\beta_N(x).$ Тогда $B^x = \bigcup_{N=x+1}^{\infty} B_N^x,$ $B_N^x \subset B_{N+1}^x$ и $\beta_N(x) \to \beta(x)$ при $N \to \infty.$

Как и выше, можно показать, что для вероятностей $\beta_N(x)$ справедливо уравнение (1) с граничными условиями $\beta_N(0) = 1$ и $\beta_N(N) = 0.$ При их помощи из общего вида решения уравнения (1) получаем

$$\beta_N(x) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N}, \; 0 \le x \le N.$$

Значит,

$$\beta(x) = \lim_{N\to\infty} \beta_N(x) = (q/p)^x.$$

Если $p = q = 1/2$, то общее решение уравнения (1) имеет вид $\beta(x) = a + bx$. Поэтому $\beta_N(x) = 1 - x/N$ и $\beta(x) = 1$.

Таким образом,

$$\beta(x) = \begin{cases} (q/p)^x, & q < p, \\ 1, & q \geq p. \end{cases}$$

В условии задачи $x = 1$, поэтому искомая вероятность равна 1 при $q \geq p$ и q/p при $q < p$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ К ГЛАВЕ 3

13. Неравенство $P(|\xi| \geq x) \leq e^{-x^2/2}$ эквивалентно утверждению о том, что функция $h(x) = e^{x^2/2}\mathrm{P}(|\xi| \geq x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2} dy$ не превосходит 1 при $x \geq 0$. При $x = 0$ имеем равенство $h(0) = 1$, а при $x > 0$ получаем неравенство для производной:

$$h'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(xe^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2} dy - 1 \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{x^2/2} \left(x \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2} dy - \int_x^{+\infty} ye^{-y^2/2} dy \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} (x - y) e^{-y^2/2} dy \leq 0.$$

Таким образом, h не возрастает, что и доказывает требуемое утверждение.

15. Рассматривая всевозможные монотонно убывающие последовательности x_n, имеющие конечный предел, убеждаемся, что свойство функций «быть монотонной и непрерывной справа» сохраняется при композиции. Таким образом, $F(G(x))$ – всегда монотонная и непрерывная справа функция.

Рассмотрим поведение $F(G(x))$ на бесконечности. При $x_n \to +\infty$

$$F(G(x_n)) \to \begin{cases} F(1-), \text{ если } G(x) < 1 \text{ для всех } x, \\ F(1), \text{ если } G(x) = 1 \text{ для некоторого } x. \end{cases}$$

При $x_n \to -\infty$, учитывая непрерывность справа, имеем $F(G(x_n)) = F(0)$.

Таким образом, необходимое условие на F, G имеет вид:

$$F(0) = 0 \ \text{ и } \ \begin{cases} F(1-) = 1, \text{ если } G(x) < 1 \text{ для всех } x, \\ F(1) = 1, \text{ если } G(x) = 1 \text{ для некоторого } x. \end{cases}$$

Как легко видеть, это условие и достаточное.

17. Так как случайная величина ξ является $\mathscr{G}$-измеримой, то $\{\xi \leq x\} \in \mathrm{G}$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому $\mathrm{P}(\xi \leq x) = 0$ или $\mathrm{P}(\xi \leq x) = 1$. Значит, функция распределения случайной величины ξ может принимать только два значения: 0 или 1. Тогда она будет иметь вид

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, x<c,\\ 1, x\ge c\end{cases}$$

для некоторой константы $c\in R$. Откуда вытекает, что $\mathrm{P}(\xi=c)=F(c)-F(c-0)=1$.

20. Вообще говоря, нет. Рассмотрим следующий пример: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, A – множество всех подмножеств Ω, P – равномерная мера, $\mathscr{F}=\{\varnothing,\{\omega_1\},\{\omega_2,\omega_3\},\Omega\}$ и $\xi(\omega)=I(\omega=\omega_3)$. Заметим, что любая случайная величина η, независимая с $\mathscr{F}$, должна быть вырожденной.

21. 1) Вообще говоря, нет. Рассмотрим нормальную случайную величину ξ с параметрами 0 и 1. Тогда $-\xi$ имеет такое же распределение и $a=1$, $b=-1$.

2) Да, верно. Предположим, что $a\ne b$. Не ограничивая общности, можно считать, что $b>a\ne 0$. Пусть F – функция распределения случайной величины ξ. Тогда $F(x)=F\left(\frac{a}{b}x\right)=F\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2x\right)=\ldots=F\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m x\right)$, $m=1, 2, \ldots$. Поэтому $F(x)=1$, если $x>0$ и $F(x)=0$, если $x<0$. Значит $\xi=0$ с вероятностью 1, что противоречит условию.

22. 1) Вообще говоря, нет. Рассмотрим независимые случайные величины ξ и η такие, что $\mathrm{P}(\xi=\pm1)=\mathrm{P}(\eta=\pm1)=1/2$, и положим $\tau=-\xi$.

2) Да, верно. По формуле свертки имеем

$$\mathrm{P}(\xi+\tau\le x)=F_{\xi+\tau}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_\xi(x-z)dF_\tau(z)\ge\int_{-\infty}^{+\infty}F_\eta(x-z)dF_\tau(z)=F_{\eta+\tau}(x)=\mathrm{P}(\eta+\tau\le x).$$

27. Покажем, что условие независимости ξ и $\sin\xi$ влечет вырожденность случайной величины $\sin\xi$. Последнее эквивалентно тому, что ξ принимает значения вида $(-1)^n\alpha+\pi n$, $n\in Z$, где $\alpha\in[-\pi/2;\pi/2)$.

Для произвольного $C\in\mathbb{R}$ рассмотрим множество $D_C=\{x\in\mathbb{R}:\sin x\le C\}$ и событие $A=\{\sin\xi\le C\}=\{\xi\in D_C\}$. В силу независимости

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap A)=\mathrm{P}(\{\sin\xi\le C\}\cap\{\xi\in D_C\})=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(A).$$

Таким образом, функция распределения $\sin\xi$ принимает только значения 0 или 1, т. е. $\sin\xi$ вырождена.

Обратно, если $\sin\xi$ вырождена, то $\sin\xi$ и ξ независимы (так как вырожденная случайная величина порождает σ-алгебру $\{\varnothing,\Omega\}$, независимую от любых других σ-алгебр).

31. Докажем, что $F_{(\zeta,\kappa)}(x,y)=F_\zeta(x)F_\kappa(y)$. Обозначим $K_1=\{(s,t):s^2+t^2\le x\}$ и $K_2=\{(s,t):s/t\le y\}$. Тогда

$$F_{(\zeta,\kappa)}(x,y)=\mathrm{P}(\zeta\le x,\kappa\le y)=\mathrm{P}(\xi^2+\eta^2\le x,\xi/\eta\le y)=\iint\limits_{K_1\cap K_2}p_{(\xi,\eta)}(s,t)\,ds\,dt.$$

Перейдя в последнем интеграле к полярным координатам, с учетом того, что

$$p_{(\xi,\eta)}(s,t)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{s^2+t^2}{2\sigma^2}\right),$$

имеем

$$F_{(\zeta,\kappa)}(x,y)=\int\limits_{0\le r\le x}\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)dr\int\limits_{\operatorname{ctg}\varphi\le y}\frac{1}{2\pi}d\varphi.$$

С другой стороны,

$$F_\zeta(x)F_\kappa(y)=\mathrm{P}(\zeta\le x)\mathrm{P}(\kappa\le y)=\iint\limits_{K_1}p_{(\xi,\eta)}(s,t)dsdt\iint\limits_{K_2}p_{(\xi,\eta)}(s,t)dsdt.$$

Снова переходя к полярным координатам в обоих интегралах, получаем

$$F_\zeta(x)F_\kappa(y)=\int\limits_{0\le r\le x}\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)dr\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{+\infty}\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)dr\int\limits_{\operatorname{ctg}\varphi\le y}\frac{1}{2\pi}d\varphi=$$

$$=\int\limits_{0\le r\le x}\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)dr\int\limits_{\operatorname{ctg}\varphi\le y}\frac{1}{2\pi}d\varphi.$$

Откуда вытекает требуемое.

39. Можно считать, что $x=1$ (иначе умножим Z на x^{-1}). Тогда нужно доказать, что $\mathrm{P}(X<Z,Y<Z)\ge\mathrm{P}(X<Z)\mathrm{P}(Y<Z)$. Через μ обозначим распределение вектора (X,Y). Тогда по теореме Фубини

$$\mathrm{P}(X<Z,Y<Z)-\mathrm{P}(X<Z)\mathrm{P}(Y<Z)=\mathrm{P}(Z>\max(X,Y))-\mathrm{P}(X<Z)\mathrm{P}(Y<Z)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^2}(\mathrm{P}(Z>\max(x,y))-\mathrm{P}(x<Z)\mathrm{P}(y<Z))\mu(dxdy)\ge 0,$$

так как выражение в скобках неотрицательно.

41. В случае $x>y$ имеем

$$F_{(\xi^+,\xi^-)}(x,y)=\mathrm{P}(\{\forall k:\xi_k\le x\}\cap\{\exists k:\xi_k\le y\})=$$

$$=\mathrm{P}(\{\forall k:\xi_k\le x\}\setminus\{\forall k:\xi_k\in(y,x]\})=F(x)^n-(F(x)-F(y))^n.$$

В случае $x\le y$ получаем

$$F_{(\xi^+,\xi^-)}(x,y)=\mathrm{P}(\{\forall k:\xi_k\le x\}\cap\{\exists k:\xi_k\le y\})=\mathrm{P}(\{\forall k:\xi_k\le x\})=F(x)^n.$$

Плотность двумерной случайной величины находим дифференцированием

$$p_{(\xi^+,\xi^-)}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{(\xi^+,\xi^-)}(x,y).$$

Так как $\xi_+\ge\xi_-$, то $F_{\bar\xi}(x)=0$ при $x<0$. Чтобы найти $F_{\bar\xi}(x)$ для $x>0$, воспользуемся формулой свертки:

$$F_{\bar\xi}(x)=\mathrm{P}(\xi_+-\xi_-\le x)=\iint\limits_{z-y\le x}dF_{(\xi^+,\xi^-)}(z,y)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{z-x}^{z}n(n-1)[F(z)-F(y)]^{n-2}dF(y)dF(z)=n\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[F(z)-F(z-x)]^{n-1}dF(z).$$

Плотность $p_{\bar\xi}(x)$ получаем дифференцированием.

53. По определению случайной величины τ имеем

$$\mathrm{P}(\tau=k)=\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k-1}\{\xi_j^2>f(\xi_j^1)\}\bigcap\{\xi_k^2\le f(\xi_k^1)\}\right)=\prod_{j=0}^{k-1}\mathrm{P}(\xi_j^2>f(\xi_j^1))\mathrm{P}(\xi_k^2\le f(\xi_k^1)),$$

где последнее равенство вытекает из независимости векторов $\xi_1,\xi_2,\ldots$. Учитывая то, что ξ_j, $j=1,2,\ldots$, имеет равномерное распределение в прямоугольнике $[a;b]\times[0;c]$, получаем

$$\mathrm{P}(\xi_j^2\le f(\xi_j^1))=((b-a)c)^{-1}\int_a^b\int_0^c I(y\le f(x))dxdy=((b-a)c)^{-1}\int_a^b f(x)dx=((b-a)c)^{-1},$$

где последнее равенство следует из того, что f задана на отрезке $[a;b]$ и является плотностью некоторого распределения.

Значит, $\mathrm{P}(\xi_j^2>f(\xi_j^1))=1-((b-a)c)^{-1}$ и $\mathrm{P}(\tau=k)=(1-((b-a)c)^{-1})^k((b-a)c)^{-1}$, $k=0,1,2,\ldots$. Таким образом, случайная величина τ имеет геометрическое распределение с параметром $((b-a)c)^{-1}$.

Найдем функцию распределения F случайной величины ξ_τ^1.

$$F(x)=\mathrm{P}(\xi_\tau^1\le x)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}(\xi_\tau^1\le x,\tau=k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k-1}\{\xi_j^2>f(\xi_j^1)\}\bigcap\{\xi_k^2\le f(\xi_k^1)\}\bigcap\{\xi_k^1\le x\}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(1-((b-a)c)^{-1})^k((b-a)c)^{-1}\int_a^b f(y)I(y\le x)dy=\int_{-\infty}^{x}f(y)dy.$$

Поэтому, $F(x)=\int_{\infty}^{x}f(y)dy.$ Значит, плотность распределения случайной величины ξ_τ^1 равна f.

63. Обозначим $\mathrm{M}_j:=\mathrm{M}\left(\dfrac{\xi_j}{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}\right)$, $1\le j\le n.$ Тогда

$$\mathrm{M}\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k}{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}\right)=\sum_{1\le j\le k}\mathrm{M}_j\ ,$$

$$\sum_{1\le j\le n}\mathrm{M}_j=\mathrm{M}\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}\right)=\mathrm{M}1=1\,.$$

Однако в силу того, что случайные величины $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ одинаково распределены, имеем $\mathrm{M}_i=\mathrm{M}_j$ для всех i,j. Таким образом, получаем ответ: k/n.

65. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\mathrm{M}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x)=[\xi\ge 0]=\int_{0}^{+\infty}xdF(x)=-x(1-F(x))\big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}(1-F(x))dx.$$

Остается доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-F(x))=0$. Поскольку $\mathrm{M}\xi=\int\limits_0^{+\infty} xdF(x)<\infty$, то $\int\limits_{x\geq t}^{+\infty} xdF(x)\to 0$ при $t\to+\infty$. Но $\int\limits_{x\geq t}^{+\infty} xdF(x)\geq \int\limits_{x\geq t}^{+\infty} tdF(x)=t(1-F(t))$.

Для доказательства второй формулы заметим, что функция распределения случайной величины $\min(\xi, c)$ равна $F(x)$ при $x<c$ и равна 1 при $x\geq c$. Подставляя ее в уже доказанную формулу, получаем требуемое равенство.

83. 2) Если случайная величина ξ принимает значения из отрезка $[0; 1]$, то $2\xi-1$ будет принимать значения из отрезка $[-1; 1]$ и $\mathrm{D}(2\xi-1)=4\mathrm{D}(\xi)$. Поэтому найдем наибольшее значение дисперсии случайной величины η, принимающей значения из отрезка $[-1; 1]$. Для такой случайной величины имеем $\mathrm{D}(\eta)\leq \mathrm{M}(\eta^2)\leq 1$. С другой стороны, если $\mathrm{P}(\eta=\pm 1)=1/2$, то $\mathrm{D}(\eta)=1$. Поэтому наибольшая дисперсия в исходной задаче равна 1/4.

86. Поскольку $\mathrm{M}|\xi|^k=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|\, dF_\xi(y)<+\infty$, то по свойству интеграла Лебега

$$\lim_{x\to+\infty}\int\limits_{|y|\geq x} |y|^k\, dF_\xi(y)=0.$$

Однако по неравенству Чебышева $0\leq x^k\,\mathrm{P}(|\xi|\leq x)\leq \int\limits_{|y|\geq x} |y|^k\, dF_\xi(y)$. *Ответ*: 0.

89. 1) Для $a\in\mathbb{R}^k$ имеем

$$\mathrm{D}\langle a,\xi\rangle=\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^n a_i\xi_i\right]=\mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^n a_i\xi_i-\mathrm{M}\sum_{i=1}^n a_i\xi_i\right]^2=$$

$$=\mathrm{M}[(a_1\xi_1-a_1\mathrm{M}\xi_1)+\ldots+(a_k\xi_k-a_k\mathrm{M}\xi_k)]^2=\sum_{i,j=1}^k a_ia_j\mathrm{M}(\xi_i-\mathrm{M}\xi_i)(\xi_j-\mathrm{M}\xi_j)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^k a_ia_j\sigma_{ij}=\langle a,Ba\rangle\geq 0.$$

2) По условию $\mathrm{P}(\alpha_1\xi_1+\ldots+\alpha_k\xi_k=-\alpha_0)=1$, откуда $\mathrm{D}(\alpha_1\xi_1+\ldots+\alpha_k\xi_k)=0$. Но $\mathrm{D}(\alpha_1\xi_1+\ldots+\alpha_k\xi_k)=\sum\limits_{i,j=1}^k a_ia_j\sigma_{ij}=\langle a,Ba\rangle$, где $a=(\alpha_1, ..., \alpha_k)^T\neq(0, ..., 0)$ (ситуация $\alpha_0\neq 0$, $\alpha_1=...=\alpha_k=0$ невозможна). Так как $B=\|\sigma_{ij}\|$ симметрическая и неотрицательно определенная, то ее можно привести к диагональному виду при помощи некоторой ортогональной матрицы O: $O^TBO=\mathrm{diag}\{d_1, ..., d_k\}$, $d_i\geq 0$. Отсюда $B=ODO^T=(OC)(C^TO^T)$, где $C=\mathrm{diag}\{+\sqrt{d_1},...,+\sqrt{d_k}\}$. Если положить $A=OC$, то для матрицы B получим представление $B=AA^T$. Тогда $\langle a,Ba\rangle=\langle a,AA^Ta\rangle=$ $=\langle A^Ta,A^Ta\rangle$, откуда $A^Ta=0$ и $AA^Ta=Ba=0$.

3) Если $\operatorname{rank}(B)=r$, то существуют такие линейно независимые векторы b_1, ..., $b_{k-r}\in\mathbb{R}^k$, что $Bb_i=0$, $i=\overline{1,k-r}$. Но $\langle b_i,Bb_i\rangle=0=D\langle b_i,\xi\rangle$. Тогда для некоторых констант $c_1,\dots,c_{k-r}$ выполняются равенства $\mathrm{P}(\langle b_i,\xi\rangle=c_i)=1$, т. е. случайный вектор ξ с вероятностью 1 лежит в пересечении $(k-r)$ гиперплоскостей $\langle b_i,\xi\rangle=c_i$, $i=\overline{1,k-r}$, т. е. в некотором r-мерном линейном многообразии L_r.

90. В силу независимости имеем $\mathrm{M}\det(\xi_{ij})=\sum\limits_{\alpha\in S_n}(-1)^{\varepsilon_\alpha}\mathrm{M}(\xi_{1\alpha_1})\dots\mathrm{M}(\xi_{n\alpha_n})=0$. По определению дисперсии $\mathrm{D}\det(\xi_{ij})=\mathrm{M}(\det^2\xi_{ij})$. Но

$$\det{}^2(\xi_{ij})=\sum_{(\alpha,\beta)\in S_n\times S_n}(-1)^{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta}\xi_{1\alpha_1}\dots\xi_{n\alpha_n}-\xi_{1\beta_1}\dots\xi_{n\beta_n}.$$

Поэтому

$$\mathrm{M}(\xi_{1\alpha_1}\dots\xi_{n\alpha_n}\cdot\xi_{1\beta_1}\dots\xi_{n\beta_n})=\begin{cases}0, \text{если существует такое } i, \text{ что } \alpha_i\neq\beta_i,\\ \mathrm{M}(\xi_{1\alpha_1}^2)\dots\mathrm{M}(\xi_{n\alpha_n}^2)=[\sigma^2+\mathrm{M}(\xi_{1\alpha_1})]^n=\sigma^{2n}.\end{cases}$$

Отсюда $\mathrm{D}\det(\xi_{ij})=n!\sigma^{2n}$.

91. По свойствам дисперсии имеем

$$0\le\mathrm{D}(\xi_1+\dots+\xi_n)=\sum_i\mathrm{D}(\xi_i)+\sum_{i\neq j}\mathrm{M}(\xi_i-\mathrm{M}\xi_i)(\xi_j-\mathrm{M}\xi_j)=$$

$$=\sum_i\mathrm{D}(\xi_i)+\sum_{i\neq j}\rho(\xi_i,\xi_j)=n+c(n^2-n).$$

Отсюда получаем требуемое неравенство.

92. Заметим, что $\eta_i=(\xi_i-\xi_{i+1})^2=(\xi_i-\xi_{i+1})^4$. Обозначим $p=\mathrm{P}(\xi_i=1)$. Тогда

$$\mathrm{M}\eta_i=\mathrm{M}(\xi_i-\xi_{i+1})^2=\mathrm{M}(\xi_i^2)+\mathrm{M}(\xi_{i+1}^2)-2(\mathrm{M}\xi_i)(\mathrm{M}\xi_{i+1})=2p-2p^2=2p(1-p).$$

Отсюда $\mathrm{M}\eta=\sum\limits_{1\le i\le n}\mathrm{M}\eta_i=2np(1-p)$. Далее имеем, учитывая независимость,

$$\mathrm{M}(\eta^2)=\mathrm{M}\left(\sum_{1\le i\le n}(\xi_i-\xi_{i+1})^2\right)^2=\sum_{1\le i\le n}\mathrm{M}(\xi_i-\xi_{i+1})^4+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{M}((\xi_i-\xi_{i+1})^2(\xi_j-\xi_{j+1})^2)=$$

$$=\sum_{1\le i\le n}\mathrm{M}(\xi_i-\xi_{i+1})^2+2\sum_{i+1<j}\mathrm{M}(\xi_i-\xi_{i+1})^2\,\mathrm{M}(\xi_j-\xi_{j+1})^2+$$

$$+2\sum_{1\le i\le n-1}\mathrm{M}((\xi_i-\xi_{i+1})^2(\xi_{i+1}-\xi_{i+2})^2)=$$

$$=2np(1-p)+2\frac{(n-1)(n-2)}{2}(2p(1-p))^2+2(n-1)p(1-p).$$

Здесь мы использовали тот факт, что случайная величина Бернулли

$$(\xi_i-\xi_{i+1})^2(\xi_{i+1}-\xi_{i+2})^2$$

принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $(\xi_i,\xi_{i+1},\xi_{i+2})\in\{(1,0,1),(0,1,0)\}$, что происходит с вероятностью $p^2(1-p)+p(1-p)^2=p(1-p).$ Окончательно

$$\mathrm{D}\eta=\mathrm{M}(\eta^2)-(\mathrm{M}\eta)^2=2p(1-p)(2n+2(2-3n)p(1-p)-1).$$

95. Пусть X_k, $k=1,2,\dots,14,$ случайная величина, равная единице, если в k-й паре люди противоположного пола, и равная нулю в другом случае. Тогда

$$\mathrm{M}(X_k)=\mathrm{P}(X_k=1)=\frac{2\cdot 8\cdot 7\cdot 13!}{15!}=\frac{8}{15},\quad k=1,2,\dots,14.$$

Поэтому требуемое математическое ожидание равно $\mathrm{M}(X_1+\ldots+X_{14})=\dfrac{112}{15}.$

96. Пусть ξ равно числу потревоженных пассажиров. Тогда (см. задачу 51, глава 1)

$$\mathrm{P}(\xi=m)=\frac{C_{n-1}^m m!(n-m-1)!}{n!}=\frac{1}{n},\quad m=0,1,\dots,n-1.$$

Поэтому $\mathrm{M}\xi=\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1}\frac{m}{n}=\frac{n-1}{2}.$

98. Пусть η – случайная величина, распределенная как ξ и независимая с ней. Тогда

$$\operatorname{cov}(f(\xi),g(\xi))=\mathrm{M}f(\xi)g(\xi)-\mathrm{M}f(\xi)\mathrm{M}g(\xi)=\mathrm{M}f(\xi)g(\xi)-\mathrm{M}f(\xi)g(\eta)=$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{M}f(\xi)g(\xi)-\mathrm{M}f(\xi)g(\eta)-\mathrm{M}f(\eta)g(\xi)+\mathrm{M}f(\eta)g(\eta))=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{M}(f(\xi)-g(\xi))(f(\eta)-g(\eta))\ge 0,$$

так как в последнем выражении величина под знаком математического ожидания неотрицательна.

99. Да, верно. По теореме Фубини имеем

$$\mathrm{M}|\xi+\eta|=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x+y|dF_\xi(x)dF_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{M}|\xi+y|dF_\eta(y).$$

Так как $\mathrm{M}|\xi+\eta|<\infty,$ то $\mathrm{M}|\xi+y|<\infty$ для почти всех $y\in R$ относительно меры, порожденной F_η. Откуда вытекает, что $\mathrm{M}|\xi|<\infty.$

101. Имеем $\mathrm{M}(\xi\eta)=\mathrm{M}(\xi\eta\, I(\xi>0))+\mathrm{M}(\xi\eta\, I(\xi<0)).$ Точная нижняя грань достигается на такой $\eta,$ что первое слагаемое равно нулю. Поэтому далее считаем, что η равна нулю на множестве $\{\xi>0\}$. Из неравенства Коши – Буняковского имеем

$$(\mathrm{M}(\xi\eta))^2=(\mathrm{M}(\xi\eta I(\xi<0)))^2\le\mathrm{M}(\eta^2)\mathrm{M}(\xi^2 I(\xi<0))\le\mathrm{M}(\xi^2 I(\xi<0)),$$

причем равенство достигается, если $\eta = a\xi I(\xi < 0)$. Чтобы $\mathrm{M}(\xi\eta)$ было наименьшим, возьмем η так, чтобы $\mathrm{M}(\eta^2) = 1$. Тогда

$$a = -(\mathrm{M}(\xi^2 I(\xi < 0)))^{-1/2} \quad \text{и} \quad \inf \mathrm{M}(\xi\eta) = -\sqrt{\mathrm{M}(\xi^2 I(\xi < 0))}.$$

102. 1) Обозначим через q_λ λ-квантиль X, т. е. $q_\lambda = \inf\{x : F_X(x) > \lambda\}$. Рассмотрим Z_+ следующего вида:

$$Z_+ = \lambda^{-1} I(X < q_\lambda) + \xi I(X = q_\lambda),$$

где случайная величина ξ принимает значения из интервала $[0;\, \lambda^{-1}]$ и $\mathrm{M}(\xi I(X = q_\lambda)) = 1 - \lambda^{-1}\mathrm{P}(X < q_\lambda)$. Для любой случайной величины $Z \in D_\lambda$ имеем

$$\mathrm{M}(Z X) - \mathrm{M}(Z_+ X) = \mathrm{M}((Z - Z_+)(X - q_\lambda)) =$$

$$= \mathrm{M}((Z - \lambda^{-1})(X - q_\lambda) I(X < q_\lambda) + Z(X - q_\lambda) I(X > q_\lambda)) \ge 0.$$

Поэтому $\mathrm{M}(Z_+ X) = u_\lambda(X)$.

2) Вообще говоря, нет. Положим $\lambda = 1/4$ и пусть X, Y независимые случайные величины такие, что $\mathrm{P}(X = \pm 1) = \mathrm{P}(Y = \pm 1) = 1/2$. Тогда $u_\lambda(X) = u_\lambda(X) = -1$ и $u_\lambda(X + Y) = -2$.

103. Вообще говоря, нет. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ – базис $\mathbb{R}^{n+1}$. Положим $\mathrm{P}\big(X = e_1\big) = 1/2$, $\mathrm{P}(X = e_2) = \mathrm{P}(X = e_3) = \ldots = \mathrm{P}(X = e_{n+1}) = 1/2n$. Тогда

$$\mathrm{P}(Z \in L \,|\, d(L) = 1) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(Z = e_k, X = Y = e_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(X = Y = e_k)} = \frac{\dfrac{1}{8} + \dfrac{n}{(2n)^3}}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{(2n)^2}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2}.$$

Аналогично $\mathrm{P}(Z \in L \,|\, d(L) = 2) \to \dfrac{1}{3}$. Для достаточно больших n получаем требуемый контрпример.

104. Любое множество $A \in \sigma(\sin\xi)$ имеет вид $A = \{\sin\xi \in B\}$ для некоторого борелевского подмножества $[0; 1]$. Очевидно, что $\{\sin\xi \in B\} = \{\xi \in C\}$, где C – борелевское подмножество отрезка $[0; \pi]$, симметричное относительно $\pi/2$. Тогда

$$\int\limits_A \xi(\omega)\mathrm{P}(d\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_C x\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_C (\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{\pi}{2}dx = \int\limits_A \frac{\pi}{2}\mathrm{P}(d\omega).$$

Поэтому $\mathrm{M}(\xi \,|\, \sin\xi) = \frac{\pi}{2}$.

105. Заметим, что случайные векторы $(\xi, \xi\eta)$ и $(-\xi, \xi\eta)$ имеют одинаковое распределение. Поэтому для каждого борелевского подмножества B действительной оси получаем $\mathrm{M}(\xi\, I(\xi\eta \in B)) = \mathrm{M}(-\xi\, I(\xi\eta \in B))$. Откуда $\mathrm{M}(\xi\, I(\xi\eta \in B)) = 0$ и $\mathrm{M}(\xi \,|\, \xi\eta) = 0$.

106. 1) Используя свойства условного математического ожидания, имеем

$$\mathrm{M}(\xi-\eta)^2 = \mathrm{M}(\mathrm{M}(\xi^2-2\xi\eta+\eta^2|\xi)) =$$
$$= \mathrm{M}(\xi^2-2\xi^2+\mathrm{M}(\eta^2|\xi)) = \mathrm{M}(\eta^2)-\mathrm{M}(\xi^2).$$

Аналогичным образом получаем $\mathrm{M}(\xi-\eta)^2 = \mathrm{M}(\xi^2)-\mathrm{M}(\eta^2)$. Откуда $\mathrm{M}(\xi-\eta)^2 = 0$ и $\xi = \eta$ с вероятностью 1.

2) Рассмотрим функцию $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$. Тогда

$$\mathrm{M}(f(\xi)(\xi-\eta)) = \mathrm{M}(\mathrm{M}(f(\xi)\xi - f(\xi)\eta|\xi)) = \mathrm{M}(f(\xi)\xi)-\mathrm{M}(f(\xi)\xi) = 0.$$

Аналогично получаем $\mathrm{M}(f(\eta)(\xi-\eta)) = 0$. Откуда $\mathrm{M}((f(\xi)-f(\eta))(\xi-\eta)) = 0$ и $\xi = \eta$ с вероятностью 1.

107. Обозначим $\lambda_n = \mathrm{M}(\xi|\mathscr{F}_n)$, $\mu_n = \mathrm{M}(\xi|\mathrm{G}_n)$ и $\nu_n = \mathrm{M}(\xi|\mathrm{H}_n)$. Пусть случайная величина ξ ограничена некоторой константой $C \in \mathbb{R}$. Тогда $|\lambda_n| \le C$, $|\mu_n| \le C$, $|\nu_n| \le C$ и по аналогу теоремы Лебега для сходимости по вероятности получаем, что $\mathrm{M}|\lambda_n - \eta| \to 0$ и $\mathrm{M}|\nu_n - \eta| \to 0$. Откуда $\mathrm{M}|\lambda_n - \nu_n| \to 0$.

Из равенства $\lambda_n - \mu_n = \mathrm{M}(\lambda_n - \nu_n|\mathrm{G}_n)$ получаем $\mathrm{M}|\lambda_n - \mu_n| \le \mathrm{M}|\lambda_n - \nu_n|$. Значит, $\mathrm{M}|\lambda_n - \mu_n| \to 0$ и $\mathrm{M}|\mu_n - \eta| \to 0$, что и требовалось доказать.

108. Вообще говоря, нет. Например, рассмотрим два независимых бросания симметричной монеты. Событие A – выпал герб при первом броске, B – выпал герб при втором броске, C – ровно один герб при двух бросках. Если положить $\xi = I_A$, $\eta = I_B$ и $\mathscr{F} = \{\varnothing, C, \Omega\setminus C, \Omega\}$, то получим искомый контрпример.

109. Нет, не существует. Рассмотрим события $A_i = \{\xi_i > 0\}$, $i = 1, 2, \dots$. Каждое из этих событий имеет вероятность $1/2$, и они независимы в совокупности (так как $\{\xi_i > 0\} = \;= \bigcup_{n=1}^{\infty}\{1/n \le \xi_i \le n\}$, и все события указанного вида независимы для различных индексов i). Поэтому их дополнения независимы. Но эти дополнения совпадают с точностью до события нулевой вероятности.

110. 1) Вообще говоря, нет. Например, ξ имеет стандартное нормальное распределение, а $\eta = -2\xi$.

2) Верно. Заметим, что $\mathrm{arctg}(\xi+\eta)-\mathrm{arctg}(\xi) \ge 0$. Но в силу равенства законов распределения $\xi+\eta$ и ξ имеем $\mathrm{M}(\mathrm{arctg}(\xi+\eta)-\mathrm{arctg}(\xi)) = 0$. Поэтому $\mathrm{arctg}(\xi+\eta) = \;= \mathrm{arctg}(\xi)$ или $\xi+\eta = \xi$ п. н. и $\eta = 0$ п. н.

111. Заметим, что все скорости различны с вероятностью 1. Занумеруем паровозы по порядку и паровозу с номером j поставим в соответствие случайную величину ξ_j, равную 1, если этот паровоз является лидером каравана, и равную 0 в противном случае. Тогда

$$\mathrm{P}(\xi_j = 1) = \mathrm{P}(j\text{-й паровоз медленнее всех, идущих перед ним}) = \frac{1}{j}.$$

А если $j > k$, то

$$\mathrm{P}(\xi_j = \xi_k = 1) = \mathrm{P}(j\text{-й и } k\text{-й медленнее всех, кто перед ними}),$$

а это есть отношение количества таких перестановок чисел $\{1, \dots, j\}$, что на первом месте стоит 1, а на k-ом месте с конца стоит число, которое меньше всех последующих, к числу всех перестановок. Поэтому случайные величины ξ_j, $j = 1, \dots, 100$ попарно независимы.

Математическое ожидание числа караванов равно $\mathrm{M}\sum_{j=1}^{100}\xi_j = \sum_{j=1}^{100}\frac{1}{j}.$ Пользуясь независимостью, получаем $\mathrm{D}\sum_{j=1}^{100}\xi_j = \sum_{j=1}^{100}(j^{-1} - j^{-2}).$

112. Множество функций распределения обозначим символом $\mathcal{G}$. Существует инъекция $\mathbb{R} \to \mathcal{G} : c \mapsto I_{[c;+\infty)}$, где $I_{[c;+\infty)}$ – функция распределения случайной величины, равной c. С другой стороны, инъекцией является отображение $\mathcal{G} \to [0;1]^{\mathbb{Q}}$: $: F \mapsto (F(q))_{q\in\mathbb{Q}}$, принимающее значение в счетном декартовом произведении отрезков $[0;1]$. Это следует из того, что функции распределения непрерывны справа и однозначно определяются значениями в рациональных точках. Имеем следующую цепочку равномощных множеств (эквивалентных с точки зрения теории множеств):

$$[0,1]^{\mathbb{Q}} \sim [0,1]^{\mathbb{N}} \sim (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim [0,1] \sim \mathbb{R}.$$

По теореме Кантора – Бернштейна из существования двух инъекций, описанных выше, вытекает существование биекции между $\mathbb{R}$ и $\mathcal{G}$, т. е. $\mathcal{G}$ имеет мощность континуум.

113. Обозначим число походов за водой через ξ. Тогда по формуле для целочисленных случайных величин

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathrm{P}(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{P}(\xi = k) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}\mathrm{P}(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}(\xi \ge k) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}(\xi > k).$$

Слагаемое для $k = 0$ равно 1, а при $k > 0$ соответствующее слагаемое равно вероятности того, что сумма k независимых равномерно распределенных на отрезке $[0;1]$ случайных величин меньше 1. Эта вероятность равна мере Лебега множества

$$\left\{(x_1, \dots, x_k) : 0 < \sum_{i=1}^{k} x_i < 1\right\} \subset \mathbb{R}^k,$$

которая равна $1/(k!)$. Поэтому

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e.$$

Ответ: $\mathrm{M}\xi = e$.

114. Если $z<1$, то неверно. Можно, например, рассмотреть такие независимые величины: $P(\xi=z)=P(\xi=-1)=1/2$ и $P(\xi=-z)=P(\xi=z^2)=1/2$.

Тогда

$$\frac{M(\xi+\eta)^+}{M(\xi+\eta)^-}=\frac{z+z^2}{2+z-z^2}<z.$$

Если $z\geq 1$, то верно. Действительно,

$$M\xi^+/M\xi^-\geq z\Leftrightarrow M\xi^+\geq zM\xi^-\Leftrightarrow M\xi\geq (z-1)M\xi^-.$$

И при помощи неравенства $a^-+b^-\geq (a+b)^-$ имеем

$$M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta\geq (z-1)M\xi^-+(z-1)M\eta^-\geq (z-1)M(\xi+\eta)^-.$$

Из последних неравенств вытекает требуемое.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Основные

Распределение	Обозначение	Параметры и область их изменения	Плотность распределения (дискретное распределение вероятностей)
Бернулли	$Bi(1, p)$	$0 \le p \le 1$	$p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$
Биномиальное	$Bi(N, p)$	N – натуральное число, $0 \le p \le 1$	$C_N^x p^x (1-p)^{N-x}, \quad x \in \{0, 1, \ldots, N\}$
Отрицательное биномиальное	$\overline{Bi}(r, p)$	r – натуральное число, $0 \le p \le 1$	$C_{x+r-1}^x p^r (1-p)^x, \quad x \in \{0, 1, \ldots\}$
Пуассона	$\Pi(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\lambda^x e^{-\lambda}/x!, \quad x \in \{0, 1, \ldots\}$
Геометрическое	$G(p)$	$0 \le p \le 1$	$p(1-p)^x, \quad x \in \{0, 1, \ldots\}$
Гипергеометрическое	$H(N, L, n)$	N, L, n – натуральные числа, $L < n$	$C_L^x C_{N-L}^{n-x} / C_N^n, \quad x \in \{0, 1, \ldots, L\}$
Одномерное нормальное (гауссовское)	$N(\mu, \sigma^2)$	$\mu \in R, \quad \sigma > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in R$
Логнормальное	$L(\mu, \sigma^2)$	$\mu \in R, \quad \sigma > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln(x/\mu))^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \ge 0$
Многомерное нормальное (гауссовское)	$N_N(\mu, \Sigma)$	$\mu = (\mu_i) \in R^N$, $\Sigma = (\sigma_{ij}) = \Sigma^T$	$(2\pi)^{-\frac{1}{2}N} \lvert\Sigma\rvert^{-\frac{1}{2}} \times$ $\times \exp\left\{\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right\}, x \in \mathbb{R}^N$
Равномерное	$R(a, b)$	$a, b \in R, a < b$	$\frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b$

Таблица 1

вероятностные распределения

Характеристическая функция	Математическое ожидание	Мода	Дисперсия
$1+p(e^{it}-1)$	p	$U(p-1/2)$	$p(1-p)$
$(1+p(e^{it}-1))^N$	Np	$(N+1)p-0,5+\varepsilon$, $0\le\lvert\varepsilon\rvert\le 0,5$	$Np(1-p)$
$(p/(1-(1-p)e^{it}))^r$	$r(1-p)/p$	λ и $\lambda-1$, если λ – целое, иначе $[\lambda]$; $\lambda = (r-1)\times(1-p)/p$	$r(1-p)/p^2$
$\exp(\lambda(e^{it}-1))$	λ	λ и $\lambda-1$, если λ – целое, иначе $[\lambda]$	λ
$p/(1-(1-p)e^{it})$	$(1-p)/p$	0	$(1-p)/p^2$
$\sum_{k=0}^{L} e^{itk} C_L^k C_{N-L}^{n-k} / C_N^n$	nL/N	–	$\frac{nL(N-L)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$\exp\left(it\mu-\frac{1}{2}t^2\sigma^2\right)$	μ	μ	σ^2
$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\exp\left(k\ln\mu+\frac{k^2\sigma^2}{2}\right)$	$\mu\sqrt{\omega}$, где $\omega=e^{\sigma^2}$	μ/ω	$\mu^2\omega(\omega-1)$
$\exp(it^T\mu-t^T\Sigma t/2)$	μ	μ	ковариационная матрица Σ
$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{i(b-a)t}$	$\frac{a+b}{2}$	–	$\frac{(b-a)^2}{12}$

Распределение	Обозначение	Параметры и область их изменения	Плотность распределения (дискретное распределение вероятностей)
Гамма-распределение	$\gamma(\alpha, \lambda)$	$\alpha, \lambda > 0$	$\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x) / \Gamma(\alpha),\ x \geq 0$
Экспоненциальное	$\varepsilon(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x},\ \ x > 0$
Коши	$K(a, b)$	$a \in R,\ \ b > 0$	$1/(\pi b(1+((x-a)/b)^2)),\ \ x \in \mathbb{R}$
Лапласа	$EE(a, \lambda)$	$a \in R, \lambda > 0$	$\frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda \lvert x-a \rvert),\ x \in R$
χ^2-распределение	χ^2_{υ}	υ – целое положительное число	$\frac{x^{\upsilon/2-1} \exp(-x/2)}{2^{\upsilon/2} \Gamma(\upsilon/2)},\ \ x \geq 0$
t-распределение Стьюдента	t_{υ}	υ – целое положительное число	$\frac{\Gamma((\upsilon+1)/2)}{\sqrt{\pi\upsilon}\,\Gamma(\upsilon/2)} \left(1+\frac{x^2}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+1}{2}},\ \ x \in R$
F-распределение Фишера	F_{mn}	m, n – целые положительные числа	$m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}},\ x \geq 0$
Логистическое	$l(a, \sigma)$	$a \in R,\ \ \sigma > 0,$ $k = \sqrt{3}\sigma / \pi$	$\frac{\exp((x-a)/k)}{k(1+\exp((x-a)/k))^2},\ \ x \in R$
Вейбулла – Гнеденко	$W(\alpha, \lambda)$	$\alpha, \lambda > 0$	$\alpha\lambda x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x^{\alpha}),\ \ x \geq 0$
Бета-распределение	$\beta(\upsilon, \omega)$	$\upsilon,\ \ \omega > 0$	$\frac{\Gamma(\upsilon+\omega)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\omega)} x^{\upsilon-1}(1-x)^{\omega-1},\ \ 0 \leq x \leq 1$

Окончание табл. 1

Характеристическая функция	Математическое ожидание	Мода	Дисперсия
$(1-it/\lambda)^{-\alpha}$	α/λ	$(\alpha-1)/\lambda$, если $\lambda \geq 1$	α/λ^2
$(1-it/\lambda)^{-1}$	λ^{-1}	0	λ^{-2}
$\exp(ita-b\|t\|)$	не существует	a	не существует
$\lambda^2(t^2+\lambda^2)^{-1}e^{ita}$	a	a	$2\lambda^{-2}$
$(1-2it)^{-\upsilon/2}$	υ	$\upsilon-2$, если $\upsilon \geq 2$	2υ
$\frac{\sqrt{\pi}\Gamma((\upsilon+1)/2)\exp(-\sqrt{\upsilon}\|t\|)}{\Gamma(\upsilon/2)2^{2(n-1)}(n-1)!}\times$ $\times\sum_{k=0}^{n-1}(2k)!C_{n-1+k}^{2k}\times$ $\times(2\sqrt{\upsilon}\|t\|)^{n-1-k}$, если $n=(\upsilon+1)/2$ – целое	0	0	$\upsilon/(\upsilon-1)$, если $\upsilon>2$
$\left(\frac{n}{m}\right)^{it/2}\left(\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1}\times$ $\times\Gamma\left(\frac{m+it}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-it}{2}\right)$	$\frac{n}{n-2}$, если $n>2$	$\frac{n}{n+2}\left(1-\frac{2}{m}\right)$, если $m>2$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$, если $n>4$
$e^{ita}\Gamma(1-itk)\Gamma(1+itk)$	a	a	σ^2
$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k\Gamma(1+k/\alpha)}{k!\lambda^{k/\alpha}}$	$\lambda^{-1/\alpha}\times$ $\times\Gamma(1+\alpha^{-1})$	0, если $\alpha\leq 1$; $\left(\frac{1-1/\alpha}{\lambda}\right)^{1/\alpha}$	$\lambda^{-2/\lambda}(2\alpha^{-1}\Gamma(2\alpha^{-1})-$ $-\alpha^{-2}\Gamma^2(\alpha^{-1}))$
$\frac{\Gamma(\upsilon+\omega)}{\Gamma(\upsilon)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\upsilon+k)}{\Gamma(\upsilon+\omega+k)}\frac{it^k}{k!}$	$\frac{\upsilon}{\upsilon+\omega}$	$\frac{\upsilon-1}{\upsilon+\omega-2}$, если $\upsilon,\ \omega>1$	$\frac{\upsilon\omega}{(\upsilon+\omega)^2(\upsilon+\omega+1)}$

Таблица 2

Значение интеграла Лапласа $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0200	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	398	438	478	517	557	596	636	675	714	753
0,2	793	832	871	910	948	987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	406	443	480	517
0,4	554	591	628	664	700	736	772	808	844	879
0,5	915	950	985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	357	389	422	454	486	517	549
0,7	580	611	642	673	703	734	764	794	823	852
0,8	881	910	939	967	995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	289	315	340	365	389
1,0	413	437	461	485	508	531	554	577	599	621
1,1	643	665	686	708	729	749	770	790	810	830
1,2	849	869	888	907	925	944	962	980	997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	192	207	222	236	251	265	279	292	306	319
1,5	332	345	357	370	382	394	406	418	429	441
1,6	452	463	474	484	495	505	515	525	535	545
1,7	554	564	573	582	591	599	608	616	625	633
1,8	641	649	656	664	671	678	686	693	699	706
1,9	713	719	726	732	738	744	750	756	761	767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	821	826	830	834	838	842	846	850	854	857
2,2	861	864	868	871	875	878	881	884	887	890
2,3	893	896	898	901	904	906	909	911	913	916
2,4	918	920	922	925	927	929	931	932	934	936
2,5	938	940	941	943	945	946	948	949	951	952
2,6	953	955	956	957	959	960	961	962	963	964
2,7	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974
2,8	974	975	976	977	977	978	979	979	980	981
2,9	981	982	982	983	984	984	985	985	985	986
3,0	987	987	987	988	988	989	989	989	990	990

Таблица 3

Значения функции u_α

Функция u_α определяется равенством $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

α	0,001	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050
u_α	3,0902	2,5758	2,3263	2,1701	2,0537	1,9600	1,8808	1,8119	1,7507	1,6954	1,6449

Таблица 4

Значения функции $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158
5			0,00002	0,00006	0,00016
6					0,00001

k \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7		0,00001	0,00002	0,00004

k \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10		0,00004	0,00081	0,00529	0,01813
11		0,00001	0,00022	0,00193	0,00824

Окончание табл. 4

k \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
12			0,00006	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00020	0,00132
14				0,00006	0,00047
15				0,00002	0,00016
16					0,00005
17					0,00001

Таблица 5

Значения функции $t_{\alpha,n}$

Функция $t_{\alpha,n}$ определяется равенством

$$P(\tau_n > t_{\alpha,n}) = \alpha,$$

где случайная величина τ_n имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы. Плотность распределения τ_n равна

$$p_{\tau_n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

n \ 2α	0,10	0,05	0,02	0,01
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
12	1,782	2,179	2,681	3,055
14	1,761	2,145	2,624	2,977
16	1,746	2,120	2,583	2,921
18	1,734	2,101	2,552	2,878
20	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,717	2,074	2,508	2,819
30	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

Таблица 6

Значения функции $\chi^2_{\alpha,m}$

Функция $\chi^2_{\alpha,m}$ определяется равенством

$$P(\chi^2_m > \chi^2_{\alpha,m}) = \alpha,$$

где случайная величина χ^2_m имеет χ^2-распределение с m степенями свободы.

Плотность распределения χ^2_m равна

$$p_{\chi^2_m}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)2^{\frac{m}{2}}} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

m \ α	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005
1	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9
2	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6
3	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8
4	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9
5	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3
6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3
8	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9
9	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6
10	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2
11	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8
12	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3
13	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8
14	21,1	23,7	26,9	29,1	31
15	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5
16	23,5	26,3	29,6	32,0	34
17	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5
18	26,0	28,9	32,3	34,8	37
19	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5
20	28,4	31,4	35,0	37,6	40
21	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5
22	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5
23	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0
24	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5
25	34,4	37,7	41,6	44,3	47

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Печатная буква	Название	Печатная буква	Название	Печатная буква	Название
A a	а	**J j**	йот (жи)	**S s**	эс
B b	бэ	**K k**	ка	**T t**	тэ
C c	цэ	**L l**	эль	**U u**	у
D d	дэ	**M m**	эм	**V v**	ве
E e	э	**N n**	эн	**W w**	дубль-ве
F f	эф	**O o**	о	**X x**	икс
G g	гэ	**P p**	пэ	**Y y**	игрек
H h	аш	**Q q**	ку	**Z z**	зэт
I i	и	**R r**	эр		

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Печатная буква	Название	Печатная буква	Название	Печатная буква	Название
Α α	альфа	**Ι ι**	йота	**Ρ ρ**	ро
Β β	бета	**Κ κ**	каппа	**Σ σ**	сигма
Γ γ	гамма	**Λ λ**	ламбда	**Τ τ**	тау
Δ δ	дельта	**Μ μ**	мю	**Υ υ**	ипсилон
Ε ε	эпсилон	**Ν ν**	ню	**Φ φ**	фи
Ζ ζ	дзэта	**Ξ ξ**	кси	**Χ χ**	хи
Η η	эта	**Ο ο**	омикрон	**Ψ ψ**	пси
Θ θ	тэта	**Π π**	пи	**Ω ω**	омега

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Антоневич А. Б.*, *Радыно Я. В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения. Минск, 2003.

2. *Большев Л. Н.*, *Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. М., 1965.

3. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М., 1986.

4. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. М., 1978.

5. *Гихман И. И.*, *Скороход А. В.*, *Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. Киев, 1979.

6. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М., 1988.

7. *Зубков А. М.*, *Севастьянов Б. А.*, *Чистяков В. П.* Сборник задач по теории вероятностей. М., 1989

8. Теория вероятностей : сб. задач / А. Я. Дороговцев [и др.]. Киев, 1980.

9. *Емельянов Г. В.*, *Скитович В. П.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Л., 1967.

10. *Зуеў М. М.*, *Сячко У. У.* Тэорыя імавернасцей і матэматычная статыстыка. Мазыр, 2000.

11. *Ивченко Г. И.*, *Медведев Ю. И.* Математическая статистика. М., 1984.

12. *Климов Г. П.* Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1983.

13. *Козлов М. В.*, *Прохоров А. В.* Введение в математическую статистику. М., 1987.

14. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М., 1974.

15. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.

16. *Лазакович Н. В.*, *Сташулёнок С. П.*, *Яблонский О. Л.* Теория вероятностей. Минск, 2007.

17. *Лапо П. М.*, *Маталыцкі М. А.* Задачы па тэорыі імавернасцей : вучэб. дапам. Мінск, 1995.

18. *Мешалкин, Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей. М., 1963.

19. *Прохоров А. В.*, *Ушаков В. Г.*, *Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. М., 1986.

20. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М., 1989.

21. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. М., 1982.

22. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2 т. М., 1984. Т. 2.

23. *Харин Ю. С.*, *Зуев Н. М.* Теория вероятностей. Минск, 2004.

24. *Харин Ю. С.*, *Хацкевич Г. А.*, *Лобач В. И.* Сборник задач по теории вероятностей, случайных процессов и математической статистике. Минск, 1995.

25. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. М., 1987.

26. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М., 1989.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Лазакович Николай Викторович
Радыно Евгений Мефодьевич
Сташулёнок Сергей Павлович и др.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРАКТИКУМ
В двух частях
Часть 1

Учебное пособие

Редактор *Е. А. Логвинович*
Художник обложки *Т. Ю. Таран*
Художественный редактор *Т. Ю. Таран*
Технический редактор *Т. К. Раманович*
Корректоры *Т. С. Петроченко*; *А. Г. Терехова*
Компьютерная верстка *А. А. Микулевича*

Подписано в печать 25.11.2010. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,5. Уч.-изд. л. 9,3.
Тираж 150 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика.
Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
ЛП № 02330/0494178 от 03.04.2009.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.