БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

Кафедра функционального анализа

ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО КУРСУ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ДВУХ ЧАСТЯХ

Часть 1.

Для студентов специальности Н.01.01.00.
"Математика"

Минск 1998

Составители: В.Ф.Жданович, Н.В.Лазакович, Н.Я.Радыно

Утверждено Советом факультета
24 сентября 1998г., протокол №5

Учебное издание

ЖДАНОВИЧ Витольд Феликсович
ЛАЗАКОВИЧ Николай Викторович
РАДЫНО Николай Яковлевич

Задания к лабораторным работам
по курсу теории вероятностей и математической
статистики в двух частях
Часть 1. Для студентов специальности Н.01.01.00.
"Математика".

Ответственный за выпуск Н.Я.Радыно

1 Лабораторная работа N1 (4 часа)

ТЕМА: *Вероятностное пространство. Классическая и геометрическая вероятности.*

Необходимые понятия и теоремы: Элементарные события, случайные события и операции над ними; пространство элементарных событий, σ – алгебры и алгебры; вероятность и ее свойства; классическое, конечное и дискретное вероятностные пространства; сочетания, размещения и перестановки; упорядоченные и неупорядоченные выборки с возвращением и без возвращения; геометрическое вероятностное пространство; парадокс Бертрана.

Литература: [1] стр.15-21, 24-34; [2] стр.14-54; [3] стр.9-11, 35-40; [4] стр. 9-12, 29-31; [5] стр.9-24; [6] стр.11-314; [7] стр.14-34, 144-166; [8] стр.24-81, 117-132.

Задание 1.1 *В урне находится N шаров, на каждом из которых изображено одно из чисел : $k = 1,2$ или 3. Число k повторяется a_k раз ($k = 1,2,3$). Случайный эксперимент состоит в последовательном доставании (без возвращения) шаров из урны наугад до первого появления шара с числом 3.*

1) Построить для этого эксперимента пространство элементарных событий и определить их вероятности.

2) Решить задачу для аналогичного эксперимента, в котором доставание шаров производится с возвращением.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	5	6	7	5	6	7	5	6	7	4
a_1	2	2	1	1	2	1	1	2	2	2
a_2	2	2	3	1	3	4	3	1	3	1
a_3	1	2	3	3	1	2	1	3	2	1

Задание 1.2 *Из множества $\{1, 2, ...N\}$ выбирают k чисел. Найти вероятности событий:*

$A_1 = \{$*все* k *чисел кратны* $q\}$,
$A_2 = \{$*все* k *чисел не кратны* $q\}$,
$A_3 = \{$*не все* k *чисел кратны* $q\}$,
$A_4 = \{$*каждое из* k *чисел кратно хотя бы одному из чисел* q_1 *или* $q_2\}$,
$A_5 = \{$*каждое из* k *чисел не кратно хотя бы одному из чисел* q_1 *или* $q_2\}$.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
k	3	3	3	3	4	3	3	3	3	4
q	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
q_1	4	3	2	2	2	4	2	5	3	4
q_2	5	4	3	5	7	5	5	6	7	7

Задание 1.3 *На круглом столе радиуса* R *лежит игла длины* r_1. *Середина иглы совпадает с центром стола. На стол наудачу брошен круг радиуса* r_2.

1) Построить пространство элементарных событий, параметризовать его и ввести на нем вероятность.

2) Найти вероятность того, что круг радиуса r_2 *хотя бы частично закроет иглу.*

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	10	9	8	7	6	7	8	9	10	11
r_1	4	4	4	4	4	3	3	3	5	6
r_2	3	2	1	2	3	2	3	1	4	5

Задание 1.4 *На бесконечную плоскость, на которой изображена прямая с отмеченным направлением, брошены три вектора. Пусть числа* α, β *и* γ ($0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$) *измеряют в радианах углы между каждым вектором и прямой.*

1) Построить пространство элементарных событий, которое параметризуется числами α, β и γ, и ввести на нем вероятность.

2) Найти вероятность события : $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 2\pi$.

3) Найти вероятность одновременного выполнения неравенств: $0 \leqslant \alpha + \beta \leqslant \pi/k_1$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi/k_2$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi/k_3$.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_1	4	4	5	5	4	5	4	3	5	6
k_2	5	6	6	6	6	6	6	6	8	8
k_3	4	10	8	9	10	8	8	8	9	9

Задачи.

1. Брошены три монеты. Найти вероятности событий.
   A= { первая монета выпала гербом вверх } ,
   B= { выпало ровно два герба } ,
   C= { выпало не больше двух гербов } .

2. Какова вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе:
   а) имеет - все разные цифры,
   б) имеет три одинаковые цифры,
   в) имеет две пары одинаковых цифр?

3. У туристов было 3 банки с мясом, 2 банки с овощами и 2 с фруктами. Во время дождя надписи на банках были смыты. Туристам нужно открыть три банки. Какова вероятность того, что они будут отличаться содержимым?

4. Какова вероятность угадать в спортлото (6 из 49) k номеров, $0 \leqslant k \leqslant 6$?

5. В аудитории находится n студентов. Пусть день рождения каждого приходится на 1 из 365 дней года. Найти вероятность того, что найдутся хотя бы два студента, дни рождения которых совпадают.

6. Группа состоит их 4 мужчин и 8 женщин. Найти вероятность того, что при случайной группировке по 3 человека в каждой группе будет мужчина.

7. В урне 2 белых и 4 черных шара. Из урны один за другим вынимаются все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что последний вынутый шар будет черным.

8. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются три карты. Определить вероятность того, что сумма очков этих карт равна 21, если

карты:	6	7	8	9	10	В	Д	К	Т
очки:	6	7	8	9	10	2	3	4	11.

9. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность того, что образованная из 2 полученных чисел дробь сократима.

10. Из полного набора 28 костей домино наудачу берутся 5 костей. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы 1 кость с шестью очками.

11. В зале, насчитывающем $n+k$ мест, случайным образом занимают места n человек. Найти вероятность того, что будут заняты определенные $m \leqslant n$ мест.

12. Сорок участников турнира разбиваются на четыре равные группы. Найти вероятность того, что четыре сильнейших участника окажутся в разных группах.

13. n лиц рассаживаются в ряд или за круглый стол в случайном порядке. Какова вероятность того (в том и другом случае), что между двумя определенными лицами окажется ровно s человек?

14. Имеется $2n$ карточек, на которых написаны числа от 1 до $2n$, и $2n$ конвертов, на которых написаны те же числа. Карточки случайным образом вкладываются в конверты (в каждый

конверт по одной карточке). Найти вероятность того, что сумма чисел на каждом конверте и лежащей на нем карточке четна.

15. Восемь ладей случайным образом расставлены на шахматной доске. Найти вероятность того, что ни одна из них не бьет другую и ни одна не стоит на главной белой диагонали.

16. Из колоды, содержащей 52 карты, извлекаются 13 карт. Найти вероятность того, что в выборке содержится ровно k пар "туз-король" одной масти.

17. Рассмотрим множество — $\overline{\mathcal{F}}$ кусочно-линейных функций $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 6$, вида:

$$f(x) = f(i) + \alpha_i(x - i), \ \textit{где}\ f(0) = 0, i \leqslant x \leqslant i + 1,$$

i - целые числа, $0 \leqslant i \leqslant 5$, и α_i принимают значения: 1 или -1. Найти вероятность того, что для случайно выбранной функции $f(x) \in \overline{\mathcal{F}}$

$$\int_0^6 f(x)dx = 0.$$

18. Колода из 36 карт хорошо перемешана (т.е. все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятности событий:

A= { 4 туза расположены рядом };

B= { места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом 7 }.

19. Из множества всех последовательностей длины n, состоящих из цифр 0, 1, 2 случайно выбирается одна. Найти вероятности событий:

A= { последовательность начинается с 0 },

B= { последовательность содержит ровно $m + 2$ нуля, причем 2 из них находятся на концах последовательности },

C= { последовательность содержит ровно m единиц } ,
D= { в последовательности ровно m_0 нулей, m_1 единиц, m_2 двоек, $m_0 + m_1 + m_2 = n$ } .

20. В записанном телефонном номере 135-3.-.. три последние цифры стерлись. В предположении, что все комбинации трех стершихся цифр равновероятны, найти вероятности событий:

A= { стерлись различные цифры, отличные от 1, 3, 5 } ;
B= { стерлись одинаковые цифры } ;
C= { две из стершихся цифр совпадают } .

21. В лифт 8-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Предположим, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

22. Найти вероятность того, что на две карточки спортлото с отмеченными номерами (4, 12, 38, 20, 41, 46) и (4, 12, 38, 20, 41, 49) будет получено ровно два минимальных выигрыша (указать ровно по три числа).

23. Из последовательности чисел 1, 2, ..., n наудачу выбираются два числа. Какова вероятность, что одно из них меньше k, а другое больше k, где $1 < k < n$?

24. Имеются пять отрезков, длины которых равны соответственно 1, 3, 5,7,9 единицам. Определить вероятность того, что с помощью взятых наудачу трех отрезков из данных пяти можно построить треугольник.

25. Ребенок играет с 10 буквами разрезной азбуки, А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово "математика"?

26. Из урны, содержащей M шаров, выбирают n шаров. Описать пространство элементарных событий, если:

1) выборка упорядоченная с возвращением;
2) выборка неупорядоченная с возвращением;
3) выборка упорядоченная без возвращения;

4) выборка неупорядоченная без возвращения.

27. Четыре человека сдают шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что собственные шляпы получают в точности 3, 2, 1, 0 человек.

28. В чулане находится n пар ботинок. Из них случайно выбираются $2r$ ботинок ($2r < n$). Какова вероятность того, что среди выбранных ботинок:

а) отсутствуют парные,

б) имеется ровно 1 (2) комплектные пары?

29. Каждая из n палок разламывается на 2 части - длинную и короткую. Затем $2n$ полученных обломков объединяются в n пар, каждая из которых образует новую "палку". Найти вероятность того, что:

а) все обломки объединены в первоначальном порядке,

б) все длинные части соединены с короткими.

30. По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1,2,...,N\}$, $N \geqslant 3$ выбираются числа X и Y. Что больше $P_2 = P\{X^2 - Y^2$ *делится на* $2\}$ или $P_3 = P\{X^2 - Y^2$ *делится на* $3\}$?

31. Шестизначный номер трамвайного, троллейбусного или автобусного билета считается "счастливым", если сумма первых трех цифр совпадает с суммой последних трех цифр. Найти вероятность получить "счастливый" билет.

32. Десять рукописей разложены по 30 папкам (на одну рукопись три папки). Найти вероятность того, что в случайно выбранных 6 папках не содержится целиком ни одной рукописи.

33. За круглый стол рассаживаются в случайном порядке $2n$ гостей. Какова вероятность того, что гостей можно разбить на n непересекающихся пар так, чтобы любая пара состояла из сидящих рядом мужчины и женщины?

34. Задача Банаха. Некий математик носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что, когда математик вынет в первый раз пустую коробку, в другой коробке окажется ровно r спичек ($r = \overline{0, n}$; n – число спичек, бывших первоначально в каждой из коробок).

35. n раз бросается игральная кость. Пусть p_n — вероятность того, что последовательность из числа выпавших очков является неубывающей. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} p_n$.

36. Кусок проволоки длиной в 20 *см* согнут в наудачу выбранной точке. После этого, перегнув проволоку еще в двух местах, сделали прямоугольную рамку. Найти вероятность того, что площадь полученной рамки не превосходит 21 $см^2$.

37. Найти вероятность того. что корни квадратного уравнения $x^2 + 2ax + b = 0$ а) действительны, б) положительны, если a и b равномерно распределены в квадрате с вершинами $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.

38. На отрезок $[a,b]$, длины c наудачу брошены 5 точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки a на расстоянии меньшем x , а три – на расстоянии больше x .

39. На отрезке $[a,b]$ длины c поставлены наудачу две точки K и M . Какова вероятность того, что точка K окажется ближе к точке a нежели точка M ?

40. На отрезке длины a наудачу ставятся две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Найти вероятность того, что из получившихся частей можно построить треугольник.

41. На окружности радиуса R наудачу брошены три точки A , B и C . Какова вероятность того, что ΔABC остроугольный?

42. На отрезок наудачу бросают три точки, одну за другой. Какова вероятность того, что третья по счету точка упадет между двумя первыми?

43. В шар радиуса R наудачу бросаются N точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a, $0 < a < R$.

44. В квадрат наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что они образуют вершины: а) какого-нибудь треугольника, б) правильного треугольника, в) прямоугольного треугольника.

45. В квадрат наудачу брошены две точки A и B. Найти вероятность того, что круг, диаметром которого является отрезок $[A, B]$, целиком содержится в исходном квадрате.

46. В квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ наудачу брошена точка $M(\xi, \eta)$.

1. Доказать, что для $0 \leqslant x, y \leqslant 1$

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y) = xy.$$

2. Найти для $0 < z < 1$ а) $P(|\xi - \eta| < z)$; б) $P(\xi\eta < z)$; в) $P(\min(\xi, \eta) < z)$; г) $P(\max(\xi, \eta) < z)$.

47. На окружность единичного радиуса с центром в начале координат наудачу бросается точка. Найти вероятность того, что:

а) проекция точки на диаметр (ось абсцисс) находится от центра на расстоянии, не превышающем r, $r < 1$;

б) расстояние от выбранной точки до точки с координатами $(1,0)$ не превышает r.

48. На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r, r < a$. Какова вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых?

49. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a бросается наудачу монета диаметра $2r$, $2r < a$. Найти вероятность того, что:

а) монета попадает целиком внутрь одного квадрата;

б) монета пересечет не более одной стороны квадрата.

50. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 1. Найти вероятность следующих событий:

а) расстояние от точки A до фиксированной стороны квадрата не превосходит x, $x \in \mathbb{R}$;

б) расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата не превосходит x;

в) расстояние от точки A до центра квадрата не превосходит x;

г) расстояние от точки A до фиксированной вершины квадрата не превосходит x;

51. Случайная точка A имеет равномерное распределение в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. Найти вероятности следующих событий:

в) расстояние от точки A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит x;

б) расстояние от точки A до любой стороны прямоугольника не превосходит x;

в) расстояние от точки A до диагонали прямоугольника не превосходит x, $x \in \mathbb{R}$.

52. На паркет, составленный из правильных k – угольников со стороной a, случайно бросается монета радиуса r. Найти вероятность того, что монета не заденет границу ни одного из k – угольников паркета для а) $k = 3$; б) $k = 4$; в) $k = 6$.

53. В круге радиуса R случайно проводится хорда длины ξ. Найти $Q_R = P(\xi > R)$ и $Q_{R\sqrt{3}} = P(\xi > R\sqrt{3})$, если

а) середина хорды равномерно распределена в круге;

б) направление хорды задано, а ее середина равномерно распределена на диаметре перпендикулярном ее направлению;

в) один конец хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.

54. Случайная точка A равномерно распределена на отрезке $[0,1]$ и делит этот отрезок на две части. Пусть η_1 – длина большей части, η_2 – длина меньшей части. Найти $P(\eta_1 \leqslant x)$, $P(\eta_2 \leqslant x)$ при любых $x \in \mathbb{R}$.

55. На плоскости проведено n окружностей $S_1, S_2, ..., S_n$ с общим центром O; радиус окружности S_k равен k, где $k = 1$, $2, ..., n$. Случайная точка A имеет равномерное распределение в круге S_n; ABC – правильный треугольник, одной из вершин которого является точка A, а центром – точка O. Найти вероятность P_m того, что граница треугольника ABC пересекает ровно m окружностей, $m = 0, 1, ..., n$.

2 Лабораторная работа N2 (4 часа)

ТЕМА: *Условные вероятности. Независимость. Формулы полной вероятности и Байеса.*

Необходимые понятия и теоремы: условная вероятность, теоремы умножения, формулы полной вероятности и Байеса, попарная независимость и независимость в совокупности событий.

Литература: [1] стр.34-38; [2] стр.54-70; [3] стр.12-16; [4] стр.12-18; [5] стр.26-33; [6] стр.37-48; [7] стр.34-43; [8] стр.132-169.

Задание 2.1 *Точка случайным образом брошена на плоскость. Вероятность попадания точки в квадрат*

$$K_{ij} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : i \leqslant x_1 < i+1, j \leqslant x_2 < j+1\}$$

равна p_{ij} ; $i,j = 0, \pm 1, \ldots$, *где* $p_{00} = 0$ *и* $p_{ij} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^{|i|}} \cdot \frac{1}{3^{|j|}}$, *когда* $i^2 + j^2 \neq 0$.

Пусть

$$A = \bigcup_{i=m_1}^{m_2} \bigcup_{j=n_1}^{n_2} K_{ij}, B = \bigcup_{i=k_1}^{k_2} \bigcup_{j=l_1}^{l_2} K_{ij},$$

$$S_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = R\}, Q_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant R\}.$$

1) Описать в этом эксперименте алгебру измеримых событий.

2) Найти условные вероятности: $P(A|B)$ *и* $P(B|A)$.

3) Найти вероятность попадания точки во множество A *, если известно, что она попала на окружность* S_R .

4) Оценить сверху и снизу вероятности неизмеримых событий:

а) попадание точки на окружность S_R *, б) попадание точки на круг* Q_R .

№ п/п	m_1	m_2	n_1	n_2	k_1	k_2	l_1	l_2	R
1	0	2	1	3	1	3	2	4	2
2	-1	2	0	2	0	2	0	4	1
3	1	4	1	2	3	5	0	3	2
4	0	1	0	5	-2	3	2	3	3
5	1	2	1	4	1	3	3	4	2
6	0	1	0	5	0	3	4	5	3
7	0	2	0	2	0	4	1	2	2
8	2	3	0	4	0	3	3	4	3
9	1	5	1	4	1	6	1	2	4
10	1	2	1	4	2	6	1	2	3

Задание 2.2 *Из* N *студентов, находящихся в аудитории* k_1 *изучают английский,* k_2 *– французский и* k_3 *– немецкий язык. Одновременно английский и французский изучают* q_1 *студентов, английский и немецкий –* q_2 *, французский и немецкий –* q_3

студентов. Все три языка изучают q студентов. Один из студентов вышел из аудитории. Рассмотрим три события:

$E=$ { *вышедший знает английский* },

$F=$ { *вышедший знает французский* },

$D=$ { *вышедший знает немецкий* }.

1. Какие пары событий : (E,F), (E,D), (F,D) – являются независимыми?

2. Являются ли события E, F, D независимыми в совокупности?

3. Какие элементарные события в этом эксперименте и какие их вероятности?

№ п/п	N	k_1	k_2	k_3	q_1	q_2	q_3	q
1	36	24	16	12	8	6	4	2
2	44	30	12	20	6	10	4	2
3	30	12	9	24	3	8	6	2
4	24	12	16	11	6	8	3	2
5	24	10	12	15	4	5	6	2
6	27	15	24	10	12	10	8	8
7	26	18	19	16	12	8	9	2
8	25	15	20	12	10	6	8	2
9	60	40	36	25	24	10	9	2
10	58	20	48	45	16	15	36	12

Задание 2.3 *Прямоугольник*

$$\Pi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x_1 < m, 0 \leqslant x_2 < n\}$$

разбит на равные квадраты K_{ij}, $i = 0,1,2,...m-1$; $j = 0,1,2,...n-1$. Точка случайным образом брошена на плоскость $\mathbb{R}^2$. Вероятность попадания в прямоугольник Π равна p. Если же точка попала в прямоугольник Π, то вероятность ее попадания в квадрат K_{ij} равна p_{ij} $(\sum\limits_{i,j} p_{ij} = 1)$. Если же точка попала в квадрат K_{ij}, то вероятность ее *попадания в область $G \subseteq K_{i,j}$ равна площади этой области. Определить вероятность попадания точки в область $V \subseteq \Pi$.*

№ п/п	p	m	n	p_{ij}	$(x_1, x_2) \in V$
1	1/2	3	4	$(i+j)/30$	$1 \leqslant x_1 < 3,$ $0 \leqslant x_2 < 2x_1/3$
2	1/3	4	3	$ij/18$	$0 \leqslant x_1 < 4,$ $x_1/2 \leqslant x_2 < 3$
3	1/4	5	2	$(i^2+j^2)/85$	$2 \leqslant x_1 < 4,$ $0 \leqslant x_2 < 2x_1/5$
4	1/5	2	5	$\|i-j\|/17$	$0 \leqslant x_1 < 2,$ $x_1 \leqslant x_2 < 2 + x_1/2$
5	1/6	4	2	$\|i^2-j^2\|/26$	$1 \leqslant x_1 < 4,$ $0 \leqslant x_2 < 2(x_1-1)/3$
6	2/3	2	4	$\|i^2-j\|/10$	$0 \leqslant x_1 < 2,$ $x_1/2+1 \leqslant x_2 < 4 - x_1$
7	3/4	3	3	$(\|i-1\|+\|j-1\|)/12$	$0 \leqslant x_1 < 3,$ $0 \leqslant x_2 < x_1/3$
8	2/5	4	4	$\|i-j\|/20$	$0 \leqslant x_1 < 4,$ $0 \leqslant x_2 < x_1/4 + 1$
9	3/5	2	2	$(1+(i+j)^2)/10$	$1 \leqslant x_1 < 2,$ $x_1^2/4 \leqslant x_2 < 2$
10	4/5	2	3	$(1+ij)/9$	$1 \leqslant x_1 < 2,$ $0 \leqslant x_2 < 3x_1^3/8$

Задание 2.4 *В магазин поступили телевизоры из трех заводов: n_1 , n_2 и n_3 телевизоров соответственно. Вероятность брака на этих заводах p_1 , p_2 и p_3 .*

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_1	20	30	20	10	10	20	30	10	20	60
n_2	30	40	30	30	40	30	40	30	50	50
n_3	50	50	40	60	50	60	60	70	70	10
p_1	0.05	0.04	0.05	0.04	0.03	0.05	0.04	0.02	0.08	0.03
p_2	0.06	0.07	0.06	0.06	0.09	0.07	0.03	0.08	0.09	0.04
p_3	0.07	0.02	0.08	0.09	0.08	0.09	0.08	0.09	0.07	0.05

Покупатель выбрал телевизор, но он оказался бракованным и его отослали обратно на завод.

1) Найти вероятность того, что бракованный телевизор принадлежит первому (второму, третьему) заводу.

2) Найти вероятность выбора покупателем исправного телевизора из оставшихся в магазине. Насколько увеличилась эта вероятность по сравнению с вероятностью выбора исправного телевизора в первой попытке?

Задачи.

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что выпали две "5", если известно, что сумма выпавших очков делится на 5.

2. Из колоды карт (36 карт) вынимают 3 карты. Найти вероятность того, что они красные, если среди них присутствует ровно одна дама.

3. Из 100 карточек с числами 00, 01, ..., 99 случайно выбирается одна. Пусть η_1 и η_2 – соответственно сумма и произведение цифр на выбранной карточке. Найти $P(\eta_1 = k|\eta_2 = 0)$, $k \in \mathbb{N}$.

4. Случайная точка $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Пусть

$$A_1 = \left\{\xi_1 \leqslant \frac{1}{2}\right\}, A_2 = \left\{\xi_2 \leqslant \frac{1}{2}\right\}, A_3 = \left\{(\xi_1 - \frac{1}{2})(\xi_2 - \frac{1}{2}) \leqslant 0\right\}.$$

Зависимы ли события A_1, A_2, A_3 – в совокупности? Независимы ли события A_1, A_2, A_3?

5. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0.6, стрелок B – с вероятностью 0.5 и стрелок C – с вероятностью 0.4. Стрелки дали залп по мишени и две пули попали в цель. Что вероятнее, попал стрелок C в мишень или нет?

6. Бросают три кости. Какова вероятность того, что на одной из них выпадает "1", если на всех трех костях выпали разные грани?

7. Даны $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(AB)$, $P(BC)$, $P(AC)$, $P(ABC)$. Найти $P(C|\overline{A}\overline{B})$.

8. Из множества чисел $\{1, 2, ..., N\}$ по схеме случайного выбора без возвращения выбираются 3 числа. Найти вероятность того, что третье число попадет в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.

9. Среди 25 экзаменационных билетов 5 "хороших". Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятности того, что:

а) первый студент взял "хороший" билет,

б) второй студент взял "хороший" билет,

а) оба студента взяли "хорошие" билеты.

10. Из урны, содержащей N_1 белых шаров, N_2 черных и N_3 красных, последовательно без возвращения извлекают шары до тех пор, пока не появится красный шар. Найти вероятность следующих событий:

1) вынуто n_1 белых шаров и n_2 черных;

2) не появилось ни одного белого шара;

3) вынуто всего k шаров.

11. Верно ли равенство $P(A|B) + P(A|\overline{B}) = 1$?

12. Доказать, что если A и B независимы, то независимы A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

13. Доказать, что если $P(A|B) = P(A|\overline{B})$, то события A и B независимы.

14. Пусть A и B независимы, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $P(A \triangle B) = p$ и $P(A \setminus B) < p$. Найти $P(A)$, $P(B)$ и $P(A \setminus B)$.

15. Пусть событие A таково, что оно не зависит от самого себя. Показать, что $P(A)$ равно 0 или 1.

16. Пусть событие A таково, что $P(A)$ равно 0 или 1. Показать, что A и любое событие B независимы.

17. Пусть A и B – независимые события и $P(A \cup B) = 1$. Доказать, что либо A, либо B имеет вероятность, равную 1.

18. Пусть A и B независимые события. Доказать, что если $A \cup B$ и $A \cdot B$ независимы, то либо $P(A) = 1$, либо $P(B) = 1$, либо $P(A) = 0$, либо $P(B) = 0$.

19. Подбрасываются три игральные кости. Событие A состоит в том, что одинаковое число очков выпало на первой и второй костях, событие B – одинаковое число очков на второй и третьей костях, C – на первой и третьей. Будут ли события A, B и C : а) попарно независимы, б) независимы в совокупности?

20. Пусть A и B – независимые события, а событие C не зависит от событий $A \cdot B$ и $A \cup B$. Обязаны ли события A, B и C быть попарно независимыми?

21. Пусть события A и B_1 и A и B_2 независимы. Доказать, что события A и $B_1 \cup B_2$ независимы тогда и только тогда, когда события A и $B_1 \cdot B_2$ независимы.

22. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпала 1, если известно, что на второй кости выпало число очков больше, чем на первой?

23. Разыскивая специальную книгу, студент решил обойти три библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно есть в ее фондах книга или нет. И если книга есть, то одинаково

вероятно занята она другим читателем или нет. Что более вероятно – достанет студент книгу или нет, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой.

24. Вытекает ли из равенства

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

попарная независимость A_1, A_2 и A_3?

25. Из урны, содержащей 5 белых и 4 черных шара, переложено 2 шара в урну, содержащую 2 белых и 2 черных шара. Найти вероятность вынуть после этого из второй урны белый шар.

26. В первой урне находится 1 белый и 9 черных шаров, а во второй 5 белых и 1 черный. Из каждой урны удалили по 1 шару, а оставшиеся ссыпали в третью урну. Найти вероятность, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

27. В стройотряде 70% первокурсников и 30% студентов второго курса. Среди первокурсников 10% девушек, а среди студентов второго курса – 5%. Девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.

28. Известно, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Найти вероятность того, что это мужчина.

29. Отрезок $[0,1]$ случайной точкой делится на две части, из которых выбирается одна. Пусть η – длина выбранной части. Найти $P(\eta \leqslant x)$.

30. Имеется n урн, в каждой из которых a белых и b черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, затем из второй в третью – один шар и так далее. Затем из последней урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.

31. Имеется 5 урн. В 1-ой, 2-ой и 3-й урнах находится по 2 белых и 3 черных шара; в 4-ой и 5-ой по 1 белому и 1 черному

шару. Случайно, выбирается урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность того, что выбрана 4-ая или 5-ая урна, если извлеченный шар оказался белым?

32. По каналу связи передается одна из последовательностей $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$ с вероятностями 0.3, 0.4, 0.3, соответственно. Каждая передаваемая буква принимается правильно с вероятностью 0.6 и с вероятностями 0.2 и 0.2 принимается за две другие буквы. Буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана $AAAA$, если принята $ABCA$.

33. В сосуд, содержащий n шаров (белые и черные), опущен белый шар. Найти вероятность вынуть после этого белый шар из данного сосуда.

34. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно, 1 – плохо. В экзаменационных билетах – 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на 20 вопросов, хорошо подготовленный студент – на 16 вопросов, посредственно подготовленный студент – на 10 вопросов, плохо подготовленный студент – на 5 вопросов. Вызванный студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен: 1) отлично, 2) хорошо, 3) посредственно, 4) плохо.

35. В урне первоначально находилось N белых и M черных шаров. Один шар потерян и цвет его неизвестен. Из урны без возвращения извлечены 2 шара и оба оказались белыми. Определить вероятность того, что потерян белый шар.

36. В первой урне N_1 белых и M_1 черных шаров, во второй – N_2 белых и M_2 черных шаров и в третьей урне N_3 белых и M_3 черных. Из первой урны наудачу извлекают один шар и перекладывают во вторую урну. Затем перекладывают один шар из второй урны в третью и, наконец, из третьей в первую. С какой вероятность состав шаров в первой урне останется прежним?

37. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна $1-\beta$. Вероятность принять здорового человека за больного равна α. Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна γ. Найти вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании.

38. При переливании крови надо учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно переливать кровь любой группы, человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно переливать только кровь первой группы. Среди населения 33.7% имеет первую, 33.5% – вторую, 20.9% – третью и 7.9% четвертую группы крови. а) Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора. б) Найти вероятность того, что переливание можно осуществить, если имеются два донора; три донора.

39. Орудийная батарея состоит из 4-х орудий: два орудия попадают в цель при одном выстреле с вероятностью 0.6, а два других – с вероятностью 0.7. Для поражения цели достаточно двух попаданий, а при одном попадании вероятность поражения цели равна 0.8. Одно из орудий стреляло дважды. Найти вероятность поражения цели.

40. Семь шаров случайным образом распределяются по семи ящикам. Известно, что ровно два ящика оказались пустыми. Найти вероятность того, что в одном из ящиков окажется три шара.

41. При приеме партии подвергается проверке половина изделий. Условия допускают не более двух процентов бракованных изделий. Найти вероятность того, что партия из ста изделий, содержащая 5% брака, будет принята.

42. В партии из 50-ти деталей число бракованных не превосходит двух, причем все значения 0, 1, 2 равновероятны. Зная, что

пять наугад взятых деталей оказались годными, найти вероятность того, что все оставшиеся детали также являются годными.

3 Лабораторная работа N3 (2 часа)

ТЕМА: *Схема Бернулли. Биномиальное и полиномиальное распределения. Предельные теоремы в схеме Бернулли.*

Необходимые понятия и теоремы: независимые испытания, схема Бернулли, биномиальное распределение, полиномиальная схема и полиномиальное распределение, локальная и интегральная предельные теоремы Пуассона, локальная и интегральная предельные теоремы Муавра–Лапласа.

Литература: [1] стр.21-24,115-123; [2] стр.73-106; [3] стр.13-24; [4] стр. 22-29; [5] стр.35-39, 65-76; [6] стр.49-64; [7] стр.58-80; [8] стр.163-207.

Задание 3.1 *Два студента соревнуются в лучшей сдаче экзаменационной сессии, которая состоит из 6 экзаменов. Вероятность получить на одном из экзаменов оценку "отлично" для первого студента равна* p_1*, для второго –* p_2*. Эти вероятности не меняются при переходе от одного экзамена к следующему. Найти вероятность того, что первый студент получит большее число оценок "отлично", чем второй.*

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	6/7	7/8	8/9	9/10	10/11
p_2	10/11	9/10	8/9	7/8	6/7	5/6	4/5	3/4	2/3	1/2

Задание 3.2 *Производится* n *независимых испытаний. В каждом испытании возможны два исхода: либо с вероятностью* p *происходит событие* A *("успех"), либо с вероятностью* $1-p$ *не происходит ("неуспех"). Пусть* μ *– число "успехов" в данных* n *испытаниях.*

а) Найти $P(m_1 \leqslant \mu \leqslant m_2)$;

б) Найти $P(m_1 \leqslant \mu \leqslant m_2)$, используя локальную предельную теорему Пуассона.

в) Найти $P(m_1 \leqslant \mu \leqslant m_2)$, используя локальную предельную теорему Муавра-Лапласа.

г) Найти $P(m_1 \leqslant \mu \leqslant m_2)$, используя интегральную предельную теорему Муавра-Лапласа.

Сравнить полученные результаты и обосновать их.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
p	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{1000}$
m_1	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
m_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

Задачи.

1. При раздаче колоды в 52 карты 4 игрокам (по 13 карт каждому) один из них три раза подряд не получил тузов. Есть ли у него основание жаловаться на невезение?

2. Сколько нужно взять случайных цифр, чтобы вероятность появления среди них цифры 5 была не меньше 0.9?

3. Три охотника одновременно выстрелили по волку. Вероятности попадания каждым из охотников одинаковы и равны 0.4. Найти вероятность того, что волк будет убит, если известно, что при одном попадании охотники убивают волка с вероятностью 0.2; при двух – с вероятностью 0.5; при трех – с вероятностью 0.8.

4. Игрок A бросает 6 игральных костей и выигрывает, если выпадает хотя бы одна единица; игрок B бросает 12 игральных костей и выигрывает, если выпадают хотя бы две единицы. У кого больше вероятность выиграть?

5. В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что из 10 точек, брошенных внутрь круга, 4 попадут в квадрат, 3 – в один сегмент и по одной – в оставшиеся 3 сегмента?

6. В некотором семействе 10 детей. Вероятности рождения мальчика и девочки равны 1/2. Найти вероятность того, что число мальчиков заключено между 3 и 8.

7. Испытание заключается в бросании 3 игральных костей. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях ровно два раза выпадет по две единицы.

8. Найти вероятность того, что в $2n$ испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p и неудачи $1-p$ появится $m+n$ успехов и все испытания с четными номерами закончатся успехом.

9. Из множества $S = \{1, 2, ..., N\}$ случайно и независимо выбираются два подмножества A_1 и A_2 так, что каждый элемент из S независимо от других элементов с вероятностью p включается в подмножество A_i, и с вероятностью $1-p$ не включается. Найти вероятность того, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

10. Каждую секунду с вероятностью p независимо от других моментов времени по дороге проезжает автомашина. Пешеходу для перехода дороги необходимо три секунды. Какова вероятность того, что подошедший к дороге пешеход будет ожидать возможности перехода: а) три секунды; б) четыре секунды; в) пять секунд?

11. В одном из матчей на первенство мира по шахматам ничьи не учитывались и игра шла до тех пор, пока один из участников матча не набрал 6 очков (выигрыш – 1 очко, проигрыш и ничья – 0 очков). Считая участников матча одинаковыми по силе, а

результаты отдельных игр независимыми, найти вероятность того, что при таких правилах в момент окончания матча проигравший набирает k очков, $k = \overline{0,5}$.

12. Двое по очереди бросают монету. Выигрывает тот, кто первым получит герб. Найти вероятность событий: а) игра заканчивается до четвертого бросания; б) выигрывает начавший игру (первый игрок); в) выигрывает второй игрок.

13. В схеме Бернулли p вероятность исхода 1, $q = 1 - p$ – вероятность исхода 0. Найти вероятность того, что цепочка 00 появится ранее цепочки 01.

14. При прохождении одного порога байдарка не получает повреждений с вероятностью p_1, полностью ломается с вероятностью p_2, получает серьезные повреждения с вероятностью p_3 ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$). Два серьезных повреждения приводят к поломке. Найти вероятность того, что при прохождении n порогов байдарка не будет полностью сломана.

15. Сообщение, передаваемое по каналу связи, составляется из трех знаков A, B, C. Из-за помех каждый знак принимается правильно с вероятностью 0.6 и принимается ошибочно за любой из двух знаков с вероятностью 0.2. Для увеличения вероятности правильного приема каждый знак передается пять раз. За переданный знак принимается знак, который чаще всего всречается в принятой пятерке знаков. Если наиболее частых знака два, то из них выбирается равновероятно один. Найти вероятность правильного приема знака при указанном способе передачи.

16. Двое по очереди бросают монету. Выигрывает тот, кто первым получает "герб". Найти вероятность событий: а) игра заканчивается до 31 бросания; б) выигрывает начинающий играть первым.

17. По самолету производятся четыре независимых выстрела. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0.1. Чтобы самолет вывести из строя достаточно трех попаданий. При

самолет вывести из строя достаточно трех попаданий. При одном попадании вероятность вывода самолета из строя равна 0.6, при двух – 0.8. Найти вероятность того, что самолет будет выведен из строя.

18. Человек, принадлежащий к определенной группе населения с вероятностью 0.2 оказывается брюнетом, с вероятностью 0.3 – шатеном, с вероятностью 0.4 – блондином, с вероятностью 0.1 – рыжим. Выбирается наугад группа из 6 человек. Найти вероятность того, что в составе группы равное число блондинов и шатенов.

19. Десять раз бросается игральная кость. Какова вероятность того, что "шесть" выпадает ровно три раза, а "пять" – хотя бы один раз?

20. На отрезок AB длины с брошены наудачу независимо одна от другой шесть точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от A на расстоянии меньшем a, одна на расстоянии $a < r < b$, а три точки – на расстоянии больше b.

21. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1, на втором – с вероятностью p_2, на третьем – с вероятностью p_3. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, закинул удочку три раза, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

22. В автобусе едут n пассажиров. На следующей остановке каждый из них выходит с вероятностью p; кроме того в автобус с вероятностью p_0 не входит ни один новый пассажир; с вероятностью $1 - p_0$ – один новый пассажир. Найти вероятность того, что, когда автобус снова тронется в путь после следующей остановки, в нем будет по-прежнему n пассажиров.

характеристики случайных величин.

Необходимые понятия и теоремы: случайная величина, функция распределения, дискретные и абсолютно непрерывные распределения, многомерные распределения, независимость случайных величин, критерии независимости, математическое ожидание, дисперсия, коэффициент корреляции, формулы для вычисления математического ожидания.

Литература: [1] стр.43-95; [2] стр.127-196; [5] стр.41-53, 84-115.

Задание 4.1 *Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей:*

1. *распределение Бернулли;*
2. *биномиальное распределение;*
3. *распределение Пуассона;*
4. *геометрическое распределение;*
5. *равномерное на отрезке $[a, b]$ распределение;*
6. *нормальное (Гаусса) распределение;*
7. *показательное (экспоненциальное) распределение;*
8. *распределение Коши.*

Задание 4.2 *Совместный закон распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 задается таблицей.*

	ξ_1 ξ_2	-1	0	1		ξ_1 ξ_2	-1	0	1
1	-1	1/8	1/4	1/8	2	-1	1/8	1/4	1/8
	1	1/16	1/16	3/8		0	1/16	1/16	3/8

3	$\xi_1 \backslash \xi_2$	-1	0	1
	0	$1/8$	$1/4$	$1/8$
	1	$1/16$	$1/16$	$3/8$

4	$\xi_1 \backslash \xi_2$	-2	-1	0
	-1	$1/8$	$1/4$	$1/8$
	0	$1/16$	$1/16$	$3/8$

5	$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1	2
	0	$1/8$	$1/4$	$1/8$
	1	$1/16$	$1/16$	$3/8$

6	$\xi_1 \backslash \xi_2$	-2	0	1
	-1	$1/8$	$1/4$	$1/8$
	1	$1/16$	$1/16$	$3/8$

7	$\xi_1 \backslash \xi_2$	-2	0	2
	1	$1/8$	$1/4$	$1/8$
	2	$1/16$	$1/16$	$3/8$

8	$\xi_1 \backslash \xi_2$	-1	0	1
	1	$1/8$	$1/4$	$1/8$
	-1	$1/16$	$1/16$	$3/8$

9	$\xi_1 \backslash \xi_2$	1	0	-1
	0	$1/16$	$1/16$	$1/16$
	1	$1/16$	$1/4$	$1/2$

10	$\xi_1 \backslash \xi_2$	-1	0	1
	-1	$1/4$	$1/2$	$1/16$
	1	$1/16$	$1/16$	$1/16$

1. Найти и построить графики $F_{\xi_1}(x)$, $F_{\xi_2}(x)$. Проверить, выполняются ли для данных функций свойства функции распределения.

2. Вычислить $M\xi_1$, $M\xi_2$, $D\xi_1$, $D\xi_2$, $\rho(\xi_1,\xi_2)$.

3. Выяснить, являются ли случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимыми.

4. Найти совместный закон распределения случайных величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$.

5. Вычислить $M\eta_1$, $M\eta_2$, $D\eta_1$, $D\eta_2$, $\rho(\eta_1,\eta_2)$.

Задание 4.3 *Пусть ξ и η – независимые случайные величины с плотностями $p_\xi(x) = p_\xi(x, C_1)$ и $p_\eta(x) = p_\eta(x, C_2)$, соот-*

ветственно (C_1, C_2 – константы).

1. Найти значения констант C_1 и C_2.

2. Найти функции распределения случайных величин ξ и η.

3. Найти функцию распределения случайной величины $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$.

4. Вычислить $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$, $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$.

№ п/п	$p_\xi(x)$	$p_\eta(x)$	$\zeta = \zeta(\xi, \eta)$
1.	$\begin{cases} C_1 e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\begin{cases} C_2/x^2, & x \geqslant 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$	$\max(\xi, \eta)$
2.	$\begin{cases} C_1 e^{-2x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-4x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\min(\xi, \eta)$
3.	$\begin{cases} C_1, & x \in [0,2], \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\xi - 2\eta$
4.	$\begin{cases} C_1 e^{-4x} 4, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2C_2, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$	$2\xi + \eta$
5.	$\begin{cases} C_1 e^{-2x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\max(2\xi, \eta)$
6.	$\begin{cases} C_1 e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\begin{cases} C_2/2x^2, & x \geqslant 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$	$\min(\xi^3, \eta)$
7.	$\dfrac{C_1}{1+x^2}$	$C_2 e^{-x^2}$	$3 + 2\xi$

8.	$C_1 e^{-x^2/2}$	$\dfrac{C_2}{4+x^2}$	$4-2\eta$
9.	$\begin{cases} C_1 e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-2x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	ξ/η
10.	$\begin{cases} C_1 e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-4x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\xi \cdot \eta$

Задание 4.4 *В вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\Omega = \mathbb{R}^2, \mathcal{A} = \mathcal{B}_2$ *- алгебра борелевских множеств на плоскости, а вероятность задана на* $\mathbb{R}^2$ *следующим образом: для заданного множества* $H \in \mathcal{B}_2$ *и заданной точки* $C \in \mathbb{R}^2$, $P(H) = 2/3$, $P(C) = 1/3$, *причем на множестве* H *вероятность распределена равномерно. Найти функцию распределения и математическое ожидание заданной случайной величины* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.

№ п/п	$\omega = (\omega_1, \omega_2) \in H$	C	$\xi = \xi(\omega)$
1.	$0 \leqslant \omega_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \omega_2 \leqslant 1$	$(2,2)$	$2\omega_1 + \omega_2$
2.	$\omega_2 = 2\omega_1$, $0 \leqslant \omega_1 \leqslant 1$	$(1,0)$	$\omega_1 + \omega_2$
3.	$0 \leqslant \omega_1 + \omega_2 \leqslant 1$, $\omega_1 \geqslant 0$, $\omega_2 \geqslant 0$	$(1,1)$	$\begin{cases} \omega_2/\omega_1, & \omega \neq 0, \\ 1, & \omega_1 = 0. \end{cases}$
4.	$\omega_1 + \omega_2 = 1$, $\omega_1 \geqslant 0$, $\omega_2 \geqslant 0$	$(0,0)$	$\begin{cases} \omega_2/\omega_1, & \omega \neq 0, \\ 1, & \omega_1 = 0. \end{cases}$

№ п/п	$\omega=(\omega_1,\omega_2)\in H$	C	$\xi=\xi(\omega)$
5.	$\lvert\omega_1\rvert+\lvert\omega_2\rvert\leqslant 1$	$(0,2)$	$(\omega_1+\omega_2)^2$
6.	$\lvert\omega_1\rvert+\lvert\omega_2\rvert=1$	$(0,0)$	$(\omega_1+\omega_2)^2$
7.	$\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}\leqslant 1$	$(2,0)$	$(\omega_1^2+\omega_2^2-2)^2$
8.	$\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}=1$	$(0,0)$	$\omega_1^2+\omega_2^2-1$
9.	$\lvert\omega_1\rvert+\lvert\omega_2\rvert=1$	$(1,1)$	$3\omega_1+\omega_2$
10.	$\lvert\omega_1\rvert+\lvert\omega_2\rvert\leqslant 1$	$(2,0)$	$\omega_1-2\omega_2$

Задачи.

1.1. Дать определение и привести пример двумерной случайной величины.

1.2. Если $p(x)$ – плотность распределения, то может ли быть функция $p^2(x)$ плотностью распределения?

1.3. Пусть ξ – абсолютно непрерывная случайная величина. Является ли $\xi+3$ абсолютно непрерывной случайной величиной?

1.4. Пусть ξ – случайная величина. Является ли функция $\dfrac{|\xi|+\xi}{2}$ случайной величиной?

1.5. Совместная функция распределения случайных величин ξ и η имеет вид:

$$F_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 1, y \geqslant 1, \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

1.6. Найти $P(\xi \le \eta)$. Случайная величина ξ имеет следующий закон распределения:

$\xi : 0 \quad 1$

$p : 1/2 \;\; 1/2$, а $\eta(\omega) = 2\omega$.

Возможно ли, что $P(\xi > \eta) = 1$?

1.7. Пусть закон распределения случайной величины ξ имеет вид:

$\xi : -1 \quad 1$

$p : 1/2 \;\; 1/2$, а $\eta = \xi^2$.

Найти $\rho(\xi, \eta + 1)$.

1.8. Что больше $D(\xi - 2\eta)$ или $D(\xi + 2\eta)$, если $\rho(\xi, \eta) = -1$?

1.9. Являются ли случайные величины ξ и $D\xi$ независимыми?

1.10. Верно ли равенство: $F_{\xi^2}(x) = F_\xi^2(x)$?

2.1. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 независимы и одинаково распределены. Найти $\rho(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_4 + \xi_5)$.

2.2. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$, $\eta_1 = \cos\xi$, $\eta_2 = \sin\xi$. Найти $\rho(\eta_1, \eta_2)$. Являются ли случайные величины η_1 и η_2 независимыми?

2.3. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F_\xi(x)$. Найти функцию распределения случайной величины

$$\eta = \frac{1}{2}(\xi + |\xi|).$$

2.4. Дано: $M\xi = 0$, $M|\xi| = 1$. Найти $M\max(0,\xi)$, $M\min(0,\xi)$.

2.5. Какова мощность множества всех функций распределения?

2.6. Пусть ξ – случайная величина с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $F(\xi)$.

2.7. Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Найти

$$M\left(\frac{\xi_1 + ... + \xi_k}{\xi_1 + ... + \xi_n}\right).$$

2.8. Пусть ξ – положительная невырожденная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что

$$\frac{1}{M\xi} \leqslant M\frac{1}{\xi}.$$

2.9. Пусть случайные величины I_A, I_B и I_C независимы. Будут ли независимы случайные величины I_A и $I_B + I_C$?

2.10. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ функции распределения. Будет ли функция $\frac{1}{3}F_1(x) + \frac{2}{3}F_2(x)$ функцией распределения?

3.1. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 – независимы, $P(\xi_1 = 0) = 1/2$, $P(\xi_1 = 1) = 1/2$, ξ_2 – равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Найти $p_{\xi_1+\xi_2}(x)$.

3.2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} x^k P(|\xi| > x)$, если $M|\xi|^k < \infty$.

3.3. Доказать, что если функция распределения непрерывна, то она равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

3.4.Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – функции распределения. Найти необходимые и достаточные условия того, что $H(x) = F(G(x))$ функция распределения.

3.5. Пусть ξ – случайная величина с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Доказать, что

$$M|\xi| \leqslant \frac{1}{2}(D\xi + 1).$$

3.6. Правомерно ли следующее рассуждение: "От дома до работы 1 км. Я хожу в среднем со скоростью 5 км/ч, следовательно, в среднем на дорогу у меня будет уходить 12 минут"?

3.7. Пусть ξ и η – независимые целочисленные случайные величины. Доказать, что $P(\xi + \eta\sqrt{2} = 0) = P(\xi = 0) \cdot P(\eta = 0)$.

3.8. Пусть ξ и η – независимые случайные величины с конечными дисперсиями. Доказать, что $D\xi\eta \geqslant D\xi \cdot D\eta$.

3.9. Пусть

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in [0,2], \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

Привести пример нетривиальной случайной величины η независимой со случайной величиной ξ.

3.10. Показать, что, если $A_n \to A$, $n \to \infty$, то $P(A_n) \to P(A)$, $n \to \infty$.

Литература

[1] Боровков А.А. *Теория вероятностей.* - М.: Наука, 1986. - 432 с.

[2] Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей.* - М.: Наука, 1969. - 400 с.

[3] Климов Г.П. *Теория вероятностей и математическая статистика.* - М.: МГУ, 1983. -328 с.

[4] Розанов Ю.А. *Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика.* - М.: Наука, 1985. - 320 с.

[5] Севастьянов Б.А. *Курс теории вероятностей и математической статистики.* - М.: Наука, 1982. - 256 с.

[6] Чистяков В.П. *Курс теории вероятностей.* - М.: Наука, 1987. - 240 с.

[7] Ширяев А.Н. *Вероятность.* - М.: Наука, 1980.- 575 с.

[8] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* - М.: Мир, 1984. - 527 с. (т.1)

[9] Мешалкин Л.Д. *Сборник задач по теории вероятностей.* - М.: МГУ, 1963.- 156 с.

[10] Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. *Задачи по теории вероятностей.* - М.: Наука, 1986.- 327 с.

[11] Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. *Сборник задач по теории вероятностей.* - М.: Наука, 1989. - 318 с.

[12] Емельянов Г.В., Скитович В.П. *Задачник по теории вероятностей и математической статистике.* - Л.: ЛГУ, 1967. - 330 с.

Подписано в печать 30.10.98. Формат бумаги А5. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Печать офсетиая.
Усл. печ. л. 2,09. Усл. кр.-отт. 2,09. Уч.-изд. л. 1,98. Тираж 100 экз. Заказ 1053

БелГИСС, 220113, г. Минск, ул. Мележа, 3. Лицензия ЛВ № 231.