

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

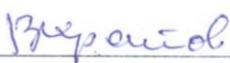
**Механико-математический факультет**

**Кафедра нелинейного анализа и аналитической экономики**

СОГЛАСОВАНО

Председатель методической комиссии  
механико-математического факультета

Кротов В.Г.

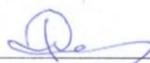


17 мая \_\_\_\_\_ 2012 г.

СОГЛАСОВАНО

Декан  
механико-математического факультета

Медведев Д.Г.



17 мая \_\_\_\_\_ 2012 г.

Регистрационный № УД 8711

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО**

**ДИСЦИПЛИНЕ**

**Исследование операций**

Для специальностей:

1-31 03 01 «Математика (по направлениям)»

Составители: доктор физ.-мат. наук, профессор Бахтин В.И.,  
доктор физ.-мат. наук, профессор Лебедев А.В.,  
доктор физ.-мат. наук, профессор Забрейко П.П.

Рассмотрена и утверждена

На заседании Совета ММФ

15 мая \_\_\_\_\_ 2012 года

Протокол № 7

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА .....	3
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «ОСНОВЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ» .....	4
ПЛАНЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ» .....	6
КОНТРОЛЬ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ .....	7
ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ .....	7
ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ .....	9
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	10
ТИПОВАЯ ПРОГРАММА КУРСА .....	11
ВОСПИТАТЕЛЬНО-ИДЕОЛОГИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ» .....	20

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время методы исследования операций широко применяются в самых различных областях человеческой деятельности. В нашей стране теоретическим и практическим применениям методов исследования операций придается исключительно большое значение, о чем свидетельствует значительное количество публикаций по этим вопросам.

Исследование операций как самостоятельное научное направление возникло из потребностей наилучшей организации боевых действий, а также прогнозирования их исхода при принятии командованием различных решений. С помощью методов исследования операций можно планировать стратегические и тактические операции, в частности, в условиях неполного знания о состоянии вооруженных сил противника.

Математические методы этой науки первоначально использовались при проектировании авиационных, ракетных и космических комплексов. Основу математического аппарата проектирования составляют линейное и нелинейное программирование, способы принятия решений, теория массового обслуживания и теория игр.

После второй мировой войны методы исследования операций получили широкое применение при перспективном и текущем планировании научно-исследовательских работ, проектировании различных объектов, управлении производственными и технологическими процессами, прогнозировании развития отдельных отраслей промышленности и сельского хозяйства. Особенно часто к ним обращаются при решении задач распределения трудовых ресурсов и запасов, назначения сроков профилактического ремонта оборудования, выбора средств транспортировки грузов, составления графиков расписаний перевозок, размещения новых заводов и складов, сбора информации в автоматизированных системах управления и целого ряда других. Следует отметить, что при решении таких задач наряду со строгим математическим аппаратом программирования, теории графов, потоков в сетях и оптимального управления применяются эвристические методы, основанные на интуиции разработчиков.

Данная программа предназначена для студентов математических специальностей высших учебных заведений.

Целью и задачей дисциплины «Исследование операций» является повышение уровня профессиональной компетентности в исследовании проблем оптимизации сложной организационной деятельности и разрешении конфликтных ситуаций в социальных и производственных структурах.

В результате изучения дисциплины обучаемый должен **знать**:

- теорию графов;
- теорию игр;
- динамическое программирование;

- теорию расписаний

**и уметь:**

- решать экстремальные задачи теории графов;
- составлять и работать с сетевыми моделями;
- решать задачи методами динамического программирования;
- решать задачу двух приборов.

Каждая тема позволяет организовать творческую самостоятельную работу студентов, которая будет способствовать становлению специалиста, обладающего значительным творческим потенциалом. Содержание и формы контролируемой самостоятельной работы студентов должны соответствовать целям и задачам подготовки специалистов.

Особое внимание следует обращать на организацию индивидуальной работы студентов под руководством преподавателя. Рекомендуется разработка системы индивидуальных заданий.

В соответствии со стандартами специальностей 1-31 03 01 Математика (по направлениям) учебная программа предусматривает для изучения курса всего 78 часов, из них 52 аудиторных часов, в том числе лекционных — 26 часов, практических — 26 часов.

## **КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «ОСНОВЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»**

Полный конспект лекций доступен по адресу  
<http://elib.bsu.by/handle/123456789/12990>.

Краткое содержание курса лекций приведено ниже.

### **Введение**

Предмет исследования операций, разделы курса исследования операций, задачи, приведшие к исследованию экстремальных задач на графах (задача о Кенигсбергских мостах, задача о красках, задача коммивояжера).

### **Раздел 1. Экстремальные задачи на графах**

Элементарные понятия, связанные с неориентированными графами, способы задания графов, вершины, ребра, инцидентность, степени вершин,

матрицы смежности и инцидентности, маршруты, цепи, циклы, связные графы, подграфы. Лемма о разбиении графа на связные компоненты. Лемма о четности числа вершин с нечетной степенью. Лемма о существовании цикла.

Эйлеровы циклы. Теорема о существовании эйлерова цикла. Алгоритм построения эйлерова цикла.

Деревья. Критерии графа быть деревом. Остовное дерево, задача о построении остовного дерева минимального веса. Алгоритм Краскала. Алгоритм Прима.

Ориентированные графы. Маршруты, цепи, циклы. Задача о нахождении кратчайшей цепи между двумя заданными вершинами. Алгоритм Дейкстры. Поиск всех кратчайших путей в графе. Алгоритм Флойда. Нахождение отрицательных циклов в графе. Задача об узких местах.

Сети, потоки. Элементарные определения и свойства: источники, стоки, дивергенция, мощность потока. Циркуляции. Элементарные потоки. Теорема о разложении положительного потока на элементарные потоки.

Разрезы, дивергенция на разрезе. Сети с ограниченными пропускными способностями дуг. Задача о нахождении потока максимальной мощности. Увеличивающие пути. Теорема Форда–Фалкерсона (критерий максимальной мощности). Алгоритм Форда–Фалкерсона. Конечность данного алгоритма для сетей с рациональными пропускными способностями дуг.

Задача о построении потока минимальной стоимости. Допустимые потоки. Построение графа модифицированных стоимостей. Критерий оптимальности для поиска потоков минимальной стоимости. Алгоритм Басакера–Гоуэна для поиска потоков минимальной стоимости среди потоков заданной мощности. Теорема о корректности алгоритма Басакера–Гоуэна. Алгоритм Клейна.

Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ. Гамильтоновы циклы. Оценки для гамильтоновых циклов. Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ (алгоритм Литтла).

Календарное планирование: постановка задачи, основные этапы решения. Построение сетевой модели, ранжирование, нахождение критических путей. Критерий пути быть критическим. Свободный резерв времени, полный резерв времени. Построение календарного графика работ и распределения трудовых ресурсов. Оптимизация календарного графика.

## **Раздел II. Теория игр**

Теория игр: элементарные понятия и определения, стратегии, исходы, функции выигрыша, игры в нормальной форме, игры двух лиц, игры с нулевой суммой, матричные игры и биматричные игры. Правила принятия решений, согласованные стратегии, теоремы о неподвижной точке.

Взаимоотношения между стратегиями и стандартные правила принятия решений. Отношение доминирования, доминируемые стратегии, недоминируемые стратегии, доминирующие стратегии. Условия эквивалентности недоминируемых стратегий, совпадение множества доминирующих и недоминируемых стратегий. Непустота множества недоминируемых стратегий.

Отношение порядка на множестве исходов – оптимумы по Парето. Осторожные стратегии. Гарантированный выигрыш. Существование осторожных стратегий, взаимоотношения между осторожными стратегиями и недоминируемыми стратегиями.

Несущественные игры. Оптимумы по Парето и осторожные стратегии в несущественных играх.

Канонические правила принятия решения. Равновесия по Нэшу. Взаимоотношения между равновесиями по Нэшу, равновесиями в недоминируемых стратегиях, равновесиями в осторожных стратегиях, оптимумами по Парето. Индивидуально рациональные исходы. Равновесия по Нэшу и индивидуально рациональные исходы.

Игра двух лиц с нулевой суммой. Максимальный гарантированный выигрыш первого игрока, минимальный гарантированный проигрыш второго игрока, неравенство, связывающее эти числа. Цена игры. Связь между играми, имеющими цену и несущественными играми.

Теорема Фон Неймана о минимаксе. Седловая точка. Седловая точка и цена игры, взаимозаменяемость седловых точек.

Смешанное расширение игры двух лиц с нулевой суммой. Связь между существованием цены в исходной игре и ее смешанном расширении. Методы поиска седловых точек и вычисления цены игры в смешанном расширении.

Теорема Нэша (о существовании равновесий по Нэшу). Смешанное расширение биматричной игры. Существование равновесий по Нэшу в смешанном расширении. Связь между равновесиями по Нэшу в исходной игре и ее смешанном расширении.

Бесконечные игры. Смешанные расширения бесконечных игр. Теорема о существовании равновесий по Нэшу в смешанном расширении.

Методы вычисления равновесий по Нэшу. Вполне смешанные исходы. Процедура вычисления вполне смешанных равновесий по Нэшу в играх с конечным и равным числом стратегий.

## **ПЛАНЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»**

1. Эйлеровы циклы. Теорема эйлера Деревья. Свойства.
2. Остовные деревья  $\min$  веса. Алгоритм Прима, Краскала.
3. Алгоритм Флойда. Поиск отрицательных циклов.
4. Максимальный поток. Алгоритм Форда-Фолкерсона.

5. Потоки минимальной стоимости. Алгоритм Басакера-Гоуна.
6. Алгоритм Клейна.
7. Контрольная работа
8. Задача коммивояжера. Алгоритм Литла.
9. Сетевое планирование.
10. Контрольная работа
11. Игры в нормальной форме. Правила принятия решений. Соотношения между стратегиями и исходами.
12. Игры с нулевой суммой. Седловая точка. Матричные Игры. Цена игры.
13. Биматричные игры. Смешанное расширение игры. Равновесие по Нэшу
14. Контрольная.

## **КОНТРОЛЬ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

На контроль самостоятельной работы студентов отводится 4 часа для решения задач по теме «Теория игр».

### **ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ**

#### **Контрольная работа №1**

1. Найти кратчайшие пути от вершины  $S$  до всех остальных вершин.
2. Построить максимальный поток и указать минимальный разрез в сети.
3. Построить поток мощности  $m$  минимальной стоимости с помощью алгоритма Клейна. Доказать, что стоимость минимальна.
4. Докажите, что положительный поток положительной мощности можно разложить в сумму элементарных положительных потоков вдоль контуров и вдоль путей, идущих от источника к стоку(считая, что в сети один источник и один сток)

## Контрольная работа №2

### ВАРИАНТ № 1

1. Найти все решения задачи коммивояжера, определяемой матрицей стоимостей

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 7 & 5 & 7 \\ 4 & \infty & 5 & 4 & 10 \\ 5 & 4 & \infty & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 5 & \infty & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

2. Построить сетевую модель, найти критический путь и построить график распределения трудовых ресурсов.

№	Каким работам предшествует	Сроки выполнения	Потребность в рабочей силе
1	2	9	6
2	—	5	9
3	6, 10, 11	7	4
4	3, 5	5	7
5	6, 11	6	5
6	2	7	5
7	6, 10, 11	8	4
8	6, 10, 11	5	3
9	1, 8	3	8
10	2	9	3
11	—	8	8

3. В условиях предыдущей задачи
- оптимизировать распределение трудовых ресурсов;
  - составить оптимальный график работ, при котором потребность в рабочей силе не превосходит 17.
4. Доказать, что если мощность потока  $f$  в сети положительна, то его можно разложить в сумму элементарных положительных потоков вдоль контуров и путей, ведущих из  $s$  в  $t$ .

## Контрольная работа №3

### ВАРИАНТ

Задача 1. Найти решение игры

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Задача 2. Найти множество недоминируемых стратегий игрока  $A$ , если множество его стратегий  $X = [-4, 0]$ , множество стратегий игрока  $B$  есть  $Y = \{0, 1\}$ , а функция выигрыша игрока  $A$  есть

$$u_A(x, y) = 10y \cos x + 5(1 - y) \sin x.$$

Задача 3. Найти равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях в биматричной игре

$$\begin{bmatrix} (2; 2) & (5; 1) \\ (9; 3) & (4; 4) \end{bmatrix}$$

Задача 4. Дана биматричная игра. Найти: а) равновесия по Нэшу в чистых стратегиях; б) равновесия по Парето; в) осторожные стратегии каждого игрока; г) недоминируемые стратегии каждого игрока. Вычислить минимальные гарантированные выигрыши каждого игрока.

$$\begin{bmatrix} (5; 7) & (5; 4) & (6; 5) \\ (5; 3) & (2; 4) & (4; 3) \\ (3; 3) & (8; 5) & (3; 2) \end{bmatrix}$$

Задача 5. Задана игра двух лиц  $G = (X, Y, u_1, u_2)$ , где  $X, Y$  — компактные множества и функции  $u_1, u_2$  непрерывны. Будут ли замкнуты множества  $ND_i$  недоминируемых стратегий  $i$ -го игрока?

## ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Графы. Маршруты, цепи, циклы, связные компоненты.
2. Три леммы о неориентированных графах.
3. Эйлеровы графы. Теорема Эйлера.
4. Алгоритм построения эйлерова цикла.
5. Деревья и их свойства.
6. Остовные деревья. Алгоритм Прима и его обоснование.
7. Алгоритм Краскала и его обоснование.
8. Ориентированные графы, маршруты, цепи, пути, циклы, контуры.
9. Алгоритм Дijkstra и его обоснование.
10. Алгоритм Флойда и его обоснование.
11. Нахождение контуров отрицательной длины.
12. Сети, потоки, разрезы. Леммы о дивергенции и мощности потока.

13. Элементарные потоки. Разложение циркуляции на элементарные потоки.
14. Разложение потока на элементарные потоки.
15. Допустимые потоки. Лемма о мощности допустимого потока.
16. Увеличивающие цепи и теорема Форда–Фалкерсона.
17. Алгоритм Форда–Фалкерсона.
18. Потоки минимальной стоимости. Действия над потоками в исходной сети и в графе модифицированных стоимостей.
19. Критерий оптимальности допустимого потока.
20. Алгоритм Басакера–Гоуэна и его обоснование.
21. Алгоритм Клейна.
22. Метод ветвей и границ.
23. Задача коммивояжера. Алгоритм Литтла.
24. Сетевое планирование. Работы, события, алгоритм построения сетевой модели, ранжирование событий.
25. Минимальный и максимальный сроки наступления событий, их свойства. Критический путь. Свободный и полный резерв времени.
26. Игры (бескоалиционные, матричные, биматричные).
27. Доминирующие и недоминируемые стратегии. Их существование.
28. Осторожные стратегии и их существование. Гарантированный выигрыш.
29. Оптимальные по Парето исходы, их существование.
30. Несущественные игры, их свойства.
31. Игра двух лиц с нулевой суммой. Нижняя и верхняя цена игры. Связь цены игры с несущественностью.
32. Цена игры и седловые точки. Свойства седловых точек.
33. Теорема фон Нойманна.
34. Правила принятия решений и равновесия. Теоремы о неподвижной точке.
35. Канонические правила принятия решений. Равновесия по Нэшу и теорема Нэша.
36. Смешанные расширения конечных игр. Равновесия в них.
37. Смешанные расширения бесконечных игр.

## **СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

### **ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. Бахтин В.И., Коваленок А.П., Лебедев А.В., Лысенко Ю.В. Исследование операций. – Минск, БГУ, 2003.
2. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. 1977.
3. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. 1974.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. 1974.
2. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. 1966.
3. Харари Ф. Теория графов. 1973.
4. Оре О. Теория графов. 1980.
5. Мулен Р. Теория игр и экономические приложения. 1979.
6. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. 1970.
7. Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. 1961.
8. Оуэн Г. Теория игр. 1971.
9. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М., Высшая школа, 1998.

## ТИПОВАЯ ПРОГРАММА КУРСА

**Министерство образования Республики Беларусь**  
Учебно-методическое объединение вузов Республики Беларусь  
по естественнонаучному образованию

### УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель Министра образования  
Республики Беларусь  
\_\_\_\_\_ А.И. Жук

« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2008 г.

Регистрационный № ТД- \_\_\_\_\_ /тип.

### Исследование операций

Типовая учебная программа  
для высших учебных заведений по специальности  
1-31 03 01 Математика (по направлениям)

СОГЛАСОВАНО

СОГЛАСОВАНО

Председатель УМО вузов Республики  
Беларусь по естественнонаучному  
образованию

\_\_\_\_\_ В.В. Самохвал

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2008 г.

Начальник Управления высшего и  
среднего специального образования

\_\_\_\_\_ Ю.И. Миксюк

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2008 г.

Первый проректор Государственного  
учреждения образования

«Республиканский институт высшей  
школы»

\_\_\_\_\_ В.И. Дынич

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2008 г.

Эксперт-нормоконтролер

\_\_\_\_\_ С.М. Артемьева

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2008 г.

Минск 2008

## **СОСТАВИТЕЛИ:**

**Виктор Иванович Бахтин**, профессор кафедры математические методы теории управления механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Андрей Владимирович Лебедев**, профессор кафедры математические методы теории управления механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Петр Петрович Забрейко**, профессор кафедры математических методов теории управления механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

*Рецензенты:*

**Отдел нелинейного анализа и стохастического анализа Института математики НАН Беларуси** (протокол № 1 от 31 января 2008 г.);

**Княжище Леонид Болеславович**, главный научный сотрудник отдела Математической теории систем Института математики НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор.

## **РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:**

Кафедрой математических методов теории управления механико-математического факультета Белорусского государственного университета

(протокол № 9 от 10 марта 2008 г.);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета

(протокол № 3 от 27 марта 2008 г.);

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения вузов Республики Беларусь по естественнонаучному образованию

(протокол № 3 от 10 апреля 2008 г.);

Ответственный за выпуск: профессор Бахтин Виктор Иванович

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время методы исследования операций широко применяются в самых различных областях человеческой деятельности. В нашей стране теоретическим и практическим применениям методов исследования операций придается исключительно большое значение, о чем свидетельствует значительное количество публикаций по этим вопросам.

Исследование операций как самостоятельное научное направление возникло из потребностей наилучшей организации боевых действий, а также прогнозирования их исхода при принятии командованием различных решений. С помощью методов исследования операций можно планировать стратегические и тактические операции, в частности, в условиях неполного знания о состоянии вооруженных сил противника.

Математические методы этой науки первоначально использовались при проектировании авиационных, ракетных и космических комплексов. Основу математического аппарата проектирования составляют линейное и нелинейное программирование, способы принятия решений, теория массового обслуживания и теория игр.

После второй мировой войны методы исследования операций получили широкое применение при перспективном и текущем планировании научно-исследовательских работ, проектировании различных объектов, управлении производственными и технологическими процессами, прогнозировании развития отдельных отраслей промышленности и сельского хозяйства. Особенно часто к ним обращаются при решении задач распределения трудовых ресурсов и запасов, назначения сроков профилактического ремонта оборудования, выбора средств транспортировки грузов, составления графиков расписаний перевозок, размещения новых заводов и складов, сбора информации в автоматизированных системах управления и целого ряда других. Следует отметить, что при решении таких задач наряду со строгим математическим аппаратом программирования, теории графов, потоков в сетях и оптимального управления применяются эвристические методы, основанные на интуиции разработчиков.

Данная программа предназначена для студентов математических специальностей высших учебных заведений.

Целью и задачей дисциплины «Исследование операций» является повышение уровня профессиональной компетентности в исследовании проблем оптимизации сложной организационной деятельности и разрешении конфликтных ситуаций в социальных и производственных структурах

В результате изучения дисциплины обучаемый должен **знать:**

- теорию графов;
- теорию игр;
- динамическое программирование;
- теорию расписаний.

**и уметь:**

- решать экстремальные задачи теории графов;
- составлять и работать с сетевыми моделями;
- решать задачи методами динамического программирования;
- решать задачу двух приборов.

Каждая тема позволяет организовать творческую самостоятельную работу студентов, которая будет способствовать становлению специалиста, обладающего значительным творческим потенциалом. Содержание и формы контролируемой самостоятельной работы студентов должны соответствовать целям и задачам подготовки специалистов.

Особое внимание следует обращать на организацию индивидуальной работы студентов под руководством преподавателя. Рекомендуется разработка системы индивидуальных заданий.

В соответствии со стандартами специальностей 1-31 03 01 Математика (по направлениям) учебная программа предусматривает для изучения курса всего 78 часов, из них 52 аудиторных часов, в том числе лекционных — 26 часов, практических — 26 часов.

### ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Название и № раздела	Количество часов	
	Лекции	Практические занятия
Раздел I. Экстремальные задачи на графах	16	16
Раздел II. Теория игр	10	10
Всего аудиторных часов	26	26
<b>ИТОГО:</b>	<b>52</b>	

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## Введение

Предмет исследования операций, разделы курса исследования операций, задачи, приведшие к исследованию экстремальных задач на графах (задача о Кенигсбергских мостах, задача о красках, задача коммивояжера).

## Раздел 1. Экстремальные задачи на графах

Элементарные понятия, связанные с неориентированными графами, способы задания графов, вершины, ребра, инцидентность, степени вершин, матрицы смежности и инцидентности, маршруты, цепи, циклы, связные графы, подграфы. Лемма о разбиении графа на связные компоненты. Лемма о четности числа вершин с нечетной степенью. Лемма о существовании цикла.

Эйлеровы циклы. Теорема о существовании эйлерова цикла. Алгоритм построения эйлерова цикла.

Деревья. Критерии графа быть деревом. Остовное дерево, задача о построении остовного дерева минимального веса. Алгоритм Краскала. Алгоритм Прима.

Ориентированные графы. Маршруты, цепи, циклы. Задача о нахождении кратчайшей цепи между двумя заданными вершинами. Алгоритм Дейкстры. Поиск всех кратчайших путей в графе. Алгоритм Флойда. Нахождение отрицательных циклов в графе. Задача об узких местах.

Сети, потоки. Элементарные определения и свойства: источники, стоки, дивергенция, мощность потока. Циркуляции. Элементарные потоки. Теорема о разложении положительного потока на элементарные потоки.

Разрезы, дивергенция на разрезе. Сети с ограниченными пропускными способностями дуг. Задача о нахождении потока максимальной мощности. Увеличивающие пути. Теорема Форда–Фалкерсона (критерий максимальной мощности). Алгоритм Форда–Фалкерсона. Конечность данного алгоритма для сетей с рациональными пропускными способностями дуг.

Задача о построении потока минимальной стоимости. Допустимые потоки. Построение графа модифицированных стоимостей. Критерий оптимальности для поиска потоков минимальной стоимости. Алгоритм Басакера–Гоуэна для поиска потоков минимальной стоимости среди потоков заданной мощности. Теорема о корректности алгоритма Басакера–Гоуэна. Алгоритм Клейна.

Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ. Гамильтоновы циклы. Оценки для гамильтоновых циклов. Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ (алгоритм Литтла).

Календарное планирование: постановка задачи, основные этапы решения. Построение сетевой модели, ранжирование, нахождение критических путей.

Критерий пути быть критическим. Свободный резерв времени, полный резерв времени. Построение календарного графика работ и распределения трудовых ресурсов. Оптимизация календарного графика.

## Раздел II. Теория игр

Теория игр: элементарные понятия и определения, стратегии, исходы, функции выигрыша, игры в нормальной форме, игры двух лиц, игры с нулевой суммой, матричные игры и биматричные игры. Правила принятия решений, согласованные стратегии, теоремы о неподвижной точке.

Взаимоотношения между стратегиями и стандартные правила принятия решений. Отношение доминирования, доминируемые стратегии, недоминируемые стратегии, доминирующие стратегии. Условия эквивалентности недоминируемых стратегий, совпадение множества доминирующих и недоминируемых стратегий. Непустота множества недоминируемых стратегий.

Отношение порядка на множестве исходов – оптимумы по Парето. Осторожные стратегии. Гарантированный выигрыш. Существование осторожных стратегий, взаимоотношения между осторожными стратегиями и недоминируемыми стратегиями.

Несущественные игры. Оптимумы по Парето и осторожные стратегии в несущественных играх.

Канонические правила принятия решения. Равновесия по Нэшу. Взаимоотношения между равновесиями по Нэшу, равновесиями в недоминируемых стратегиях, равновесиями в осторожных стратегиях, оптимумами по Парето. Индивидуально рациональные исходы. Равновесия по Нэшу и индивидуально рациональные исходы.

Игра двух лиц с нулевой суммой. Максимальный гарантированный выигрыш первого игрока, минимальный гарантированный проигрыш второго игрока, неравенство, связывающее эти числа. Цена игры. Связь между играми, имеющими цену и несущественными играми.

Теорема Фон Неймана о минимаксе. Седловая точка. Седловая точка и цена игры, взаимозаменяемость седловых точек.

Смешанное расширение игры двух лиц с нулевой суммой. Связь между существованием цены в исходной игре и ее смешанном расширении. Методы поиска седловых точек и вычисления цены игры в смешанном расширении.

Теорема Нэша (о существовании равновесий по Нэшу). Смешанное расширение биматричной игры. Существование равновесий по Нэшу в смешанном расширении. Связь между равновесиями по Нэшу в исходной игре и ее смешанном расширении.

Бесконечные игры. Смешанные расширения бесконечных игр. Теорема о существовании равновесий по Нэшу в смешанном расширении.

Методы вычисления равновесий по Нэшу. Вполне смешанные исходы. Процедура вычисления вполне смешанных равновесий по Нэшу в играх с конечным и равным числом стратегий.



## ЛИТЕРАТУРА

### Основная

4. Бахтин В.И., Коваленок А.П., Лебедев А.В., Лысенко Ю.В. Исследование операций. – Минск, БГУ, 2003
5. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. 1977.
6. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. 1974.

### Дополнительная

10. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. 1974.
11. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. 1966.
12. Харари Ф. Теория графов. 1973.
13. Оре О. Теория графов. 1980.
14. Мулен Р. Теория игр и экономические приложения. 1979.
15. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. 1970.
16. Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. 1961.
17. Оуэн Г. Теория игр. 1971.
18. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М., Высшая школа, 1998.

## **ВОСПИТАТЕЛЬНО-ИДЕОЛОГИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»**

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Исследование операций» составлен в соответствии с основными направлениями государственной молодежной политики, отраженными в Концепции непрерывного воспитания детей и учащейся молодежи в Республике Беларусь, в Плане идеологической и воспитательной работы БГУ на 2012-2013 годы и других государственных программах, нормативно-правовых и инструктивно-методических документах, определяющих приоритетные направления идеологии белорусского государства.

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Исследование операций» способствует созданию условий для формирования нравственно зрелой, интеллектуально развитой личности обучающегося, которой присущи социальная активность, гражданская ответственность и патриотизм, приверженность к университетским ценностям и традициям, стремление к профессиональному самосовершенствованию, активному участию в экономической и социально-культурной жизни страны.

Основными **задачами** идеологической и воспитательной составляющей Учебно-методического комплекса по дисциплине «Исследование операций» являются:

1. Максимальное использование потенциальных возможностей кафедры по формированию гражданско-правовой устойчивости профессорско-преподавательского состава и студентов.
2. Содействие становлению личности, духовно-нравственное и интеллектуальное развитие студентов.
3. Совершенствование информационного сопровождения организации жизнедеятельности студентов, содействие социальной адаптации, оказание им помощи в усвоении и выполнении учебного материала, установленных норм и правил внутреннего распорядка, прав и обязанностей.