Олимпиада по математике для нематематических специальностей «МОН-2011»,
БГУ, 22 апреля 2011 г.

1. [5 б.] Элементы квадратной матрицы размера 11×11 – натуральные числа, причем по меньшей мере 112 из них – нечетные. Докажите, что определитель этой матрицы – четное число.

2. [5 б.] Борис находится в центре круглой лужайки радиуса 13 метров. Каждую минуту он делает шаг длиной 1 метр. Перед всяким шагом он объявляет направление, в котором он собирается шагнуть. После чего Таня имеет право заставить его поменять направление на противоположное. Выясните, сможет ли Борис за 3 часа выйти с лужайки или Таня сумеет ему помешать.

3. [5 б.] Найдите многочлен $P(x)$ наименьшей степени, имеющий при $x = 0$ локальный максимум, равный 2011, а при $x = 2011$ – локальный минимум, равный 0.

4. [4 б.] В урне 25 белых и 15 черных шаров. Маша и Даша по очереди вытягивают по одному шару. Если был вытянут черный шар, он возвращается обратно. Выигрывает тот, кто первым вытянет белый шар. Найдите вероятность выигрыша Маши, если она начинает играть первой.

5. [6 б.] Планета имеет форму тела, полученного вращением квадрата со стороной 1 вокруг одной из диагоналей. Путешествие по планете считается кругосветным, если его маршрут – замкнутая кривая, симметричная относительно ее центра. Найдите длину кратчайшего маршрута кругосветного путешествия.

6. [3 б.] Поток из четырех частиц поступает в счетчик, состоящий из трех датчиков. Каждая частица обязательно попадает в один и только один из этих датчиков. При этом попадание частицы в любой из датчиков равновероятно. Поток считается зарегистрированным, если он отмечен хотя бы двумя датчиками. Какова вероятность, что поток будет зарегистрирован?

7. [4 б.] Известно, что переменные x и y связаны условиями

$$x + y \leq 4, \quad x \geq 1, \quad y \geq 1.$$

Найдите (если они существуют) все пары (x, y), при которых выражение $-x + 2y$ достигает

а) наибольшего значения,

б) наименьшего значения.

8. [7 б.] Проведите через центр правильного пятиугольника такую прямую, чтобы сумма квадратов расстояний от вершин пятиугольника до этой прямой была наименьшей.

9. [8 б.] Проверьте, может ли функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0; 2]$ и имеющая на нем непрерывную производную, удовлетворять одновременно следующим трем условиям:

(i) $f(0) = f(2) = 1$,

(ii) $|f'(x)| \leq 1$ для любого $x \in [0; 2]$,

(iii) $\left|\int\limits_0^2 f(x)dx\right| \leq 1$.

10. [3 б.] Три джентельмена сидят на стульях в затылок друг другу так, что сидящий впереди не видит тех, кто сидит сзади. Они знают, что есть три белых и две черных шляпы. Джентельмены зажмуривают глаза и им на головы надевают шляпы, после чего оставшиеся шляпы убирают. Джентельмены открывают глаза, и сидящий сзади всех говорит, что он не знает, какого цвета на нем шляпа. После этого сидящий посредине говорит, что он тоже не знает, какого цвета на нем шляпа. Знает ли теперь сидящий впереди джентельмен, какого цвета на нем шляпа?

Фамилия, имя, отчество	Факультет	Специальность	Курс	№ группы

№ задачи	Ответ к задаче	Балл
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. В такой матрице имеется не более девяти четных чисел, а это означает, что существуют два строки матрицы, в которых все элементы нечетные. К одной из этих строк прибавим другую. Определитель при этом не изменится, а в матрице появится строка, состоящая из элементов, являющихся четными числами. Таким образом, каждый элемент этой строки делится на два. Вынося двойку за определитель, убеждается что он будет четным, т. к. все элементы преобразованной матрицы по-прежнему натуральные числа.

Задача 2. Очевидно, что за первый шаг Борис удалится от цента лужайки на 1 метр вне зависимости от решения Тани. Далее он должен сделать шаг в направлении, перпендикулярном вектору его предыдущего перемещения. Тогда вновь вне зависимости от решения Тани он удалится от цента лужайки на $\sqrt{2}$ метра. Если же Борис выбирает иное направление движения, Таня может сделать так, чтобы Борис отошел от цента лужайки на расстояние, меньшее $\sqrt{2}$ метров. Поэтому Борис всякий раз должен шагать перпендикулярно отрезку, соединяющему центр лужайки и текущее местоположение Бориса. Тогда за 169 минут от сможет удалиться от центра лужайки на $\sqrt{169} = 13$. Тем самым, за 3 часа Борис сможет выйти с лужайки при любой стратегии поведения Тани.

Ответ: Борис сможет выйти из лужайки.

Задача 3. Поскольку в точках $x = 0$ и $x = 2011$ достигается локальный экстремум, а производная $P'(x)$ существует для любого $x \in \mathbb{R}$, то $P'(0) = P'(2011) = 0$. Поэтому $P'(x)$ – это многочлен степени, не меньшей двух. Следовательно, $P(x)$ – многочлен, степени, не меньшей трех. Тогда искомый многочлен может быть найден из условия

$$P'(x) = \alpha x(x - 2011) = \alpha(x^2 - 2011x).$$

Прежде, чем проинтегрировать этого равенство и найти $P(x)$, покажем, что $\alpha > 0$. Действительно, в силу того, что $x = 0$ и $x = 2011$ – точки локального максимума и минимума соответственно, верны соотношения $P''(0) = -2011\alpha \leq 0$ и $P''(2011) = 2011\alpha \geq 0$. Откуда $\alpha \geq 0$. Но при $\alpha = 0$ многочлен $P(x)$ – некоторая константа, что противоречит неравенству $P(0) \neq P(2011)$. Итак, $\alpha > 0$. Тогда находим

$$P(x) = \int \alpha(x^2 - 2011x) = \frac{\alpha}{3}x^3 - \frac{2011\alpha}{2}x^2 + C.$$

Числа α и C определим из условий $P(0) = 2011$ и $P(2011) = 0$:

$$\begin{cases} C = 2011 \\ \dfrac{2011^3}{3}\alpha - \dfrac{2011^3}{2}\alpha + C = 0 \end{cases}$$

Откуда получаем $\alpha = \dfrac{6}{2011^2}$, $C = 2011$.

Ответ: $P(x) = \dfrac{2}{2011^2}x^3 - \dfrac{3}{2011}x^2 + 2011$.

Задача 4. Выигрышные варианты для Маши следующие: Маша на первом ходу вытягивает белый шар (это событие обозначим M); Маша на первом ходу вытягивает черный шар, но и Даша на втором ходу вытягивает черный шар, а затем на третьем ходу Маша вытягивает белый шар (это событие обозначим $\bar{M}\bar{D}M$); ... и т. д. до бесконечности. Тогда искомая вероятность p равна

$$p = P(M) + P(\bar{M}\bar{D}M) + P(\bar{M}\bar{D}\bar{M}\bar{D}M) + \ldots = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8} + \ldots = \frac{\frac{5}{8}}{1 - \frac{9}{64}} = \frac{8}{11}.$$

Ответ: $\dfrac{8}{11}$.

Задача 5. Очевидно, что маршрут кругосветного путешествия должен пересекать экватор, по меньшей мере, в двух диаметрально противоположных точках. К тому же часть маршрута, проходящая по нижней половине планеты, имеет ту же длину, что и оставшаяся часть. Поэтому достаточно найти кратчайший маршрут, соединяющий противоположные точки экватора. Разрежем поверхность верхней части планеты по отрезку, соединяющему полюс P и выбранную точку A на экваторе, и развернем ее. Тогда точка, диаметрально противоположная точке A, будет серединой B дуги полученного сектора. Поэтому кратчайший маршрут – это отрезок AB. Длина дуги AB равна $\frac{1}{2}\cdot 2\pi\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. Это означает, что $\angle APB=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. Откуда, используя теорему косинусов, находим

$$|AB|=\sqrt{2-2\cos\angle APB}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi\sqrt{2}}{2}}=2\sin\frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $2\sin\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Задача 6. Найдем вероятность того, что поток не будет зарегистрирован. Это произойдет (ввиду того, что всякая частица обязательно попадает в какой-то из датчиков), если все частицы попадут в один и тот же датчик. Вероятность, что все четыре частицы попадут в любой из датчиков равна $\dfrac{1}{3^4}$. А так как у нас три датчика, то вероятность не зарегистрировать поток составляет $\dfrac{1}{3^3}$. Следовательно, вероятность того, что поток будет зарегистирован равна $1-\dfrac{1}{3^3}=\dfrac{26}{27}$.

Ответ: $\dfrac{26}{27}$.

Задача 7. Пусть $f(x,y)=-x+2y$. Нужно найти наибольшее и наименьшее значения этой функции на множестве $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 1,\ y\geq 1,\ x+y\leq 4\}$. Решений у этой задачи немало, приведем одно из них.

Прежде всего отметим, что ввиду ограниченности и замкнутости множества Ω, функция $f(x,y)$ достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значения, которые обозначим через $f_{\max}$ и $f_{\min}$ соответственно. Кроме того, очевидно, что перемещаясь по любой прямой из семейства $f(x,y)=C$, где C – некоторая константа из множества $\mathbb{R}$, мы не изменяем значения функции $f(x,y)$. Поэтому, чтобы отыскать наибольшее (наименьшее) значение этой функции, достаточно среди семейства прямых $f(x,y)=C$ выбрать ту, которая имеет непустое пересечение с множеством Ω и наибольшую (наименьшую) константу. Эта константа, разумеется, будет равна $f_{\max}$ ($f_{\min}$). Не составляет труда убедиться, что в нашем случае $f_{\max}=f(1,3)=5$, $f_{\min}=f(3,1)=-2$.

Задача 8. Ответ: годится любая прямая, проходящая через центр пятиугольника.

Задача 9. Предположим, что существует функция $f(x)$, удовлетворяющая всем условиям задачи. Поскольку $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;2]$ и имеет на нем непрерывную производную, то на любом интервале $(a;b)\subset[0;2]$ справедлива теорема Лагранжа. Выберем произвольным образом точку $x\in(0;2)$ и выпишем теорему Лагранжа на интервалах $(0;x)$ и $(x;2)$: существуют точки $c_1\in(0;x)$ и $c_2\in(x;2)$, подчиненные равенствам

$$f(x)-f(0)=f'(c_1)(x-0),\qquad f(2)-f(x)=f'(c_2)(2-x).$$

Эти равенства ввиду условия (i) дают

$$f(x)=1+f'(c_1)x,\qquad f(x)=1+f'(c_2)(x-2).$$

Откуда благодаря условию (ii) выводим

$$f(x)\geq 1+(-1)x=1-x,\qquad f(x)\geq 1+1(x-2)=x-1.$$

Если $x \in [0;1)$, то «более сильным» является первое из этих неравенств, а если $x \in (1;2]$, то – второе. Проинтегрировав неравенства на тех промежутках, где они являются «более сильными», получим следующие соотношения

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 (1-x)dx = \Big(x - \frac{x^2}{2}\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\int_1^2 f(x)dx \geq \int_1^2 (x-1)dx = \Big(\frac{x^2}{2} - x\Big)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Резюмируя, получаем

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \geq 1,$$

что на основании условия (iii) дает равенство

$$\int_0^2 f(x)dx = 1.$$

Однако это равенство возможно, лишь когда

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx, \qquad \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x-1)dx,$$

что, в свою очередь, возможно лишь, если

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{если } x \in [0;1], \\ x-1, & \text{если } x \in [1;2]. \end{cases}$$

Таким образом, $f(x) = |x-1|$, $x \in [0;2]$. Но у такой функции не существует $f'(1)$, что противоречит наличию у $f(x)$ непрерывной производной на отрезке $[0;2]$. Следовательно, нет функций, удовлетворяющих всем условиям задачи.

Задача 10. Если бы на двух передних джентельменах были черные шляпы, то сидящий сзади джентельмен знал бы, что на нем белая шляпа. Поэтому хотя бы на одном из двух передних джентельменов шляпа белая. Если бы на сидящем впереди джентельмене была бы черная шляпа, то сидящий посредине понял бы, что на нем самом белая. Следовательно, на джентельмене, сидящем впереди, шляпа белая.

Ответ: сидящий впереди джентельмен знает, что на нем белая шляпа.