1. [4 б.] Найдите сумму всех 4-значных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2 и 3.

2. [9 б.] Некоторое государство управляется королем и советом мудрецов, состоящим из 39 человек. Однажды король решил проверить своих мудрецов и предложим им пройти следующее испытание. Мудрецы садятся на круглый стол, и на их головы надевают колпаки. Мудрецам известно, что на каждого из них надет красный или синий колпак, причем на 20 мудрецах колпаки одного цвета, а на 19 – другого. Всякий мудрец видит цвет колпаков всех остальных, но не видит своего. Никакой дополнительной информацией мудрецы не могут обмениваться. Поразмыслив, каждый пишет на бумажке цвет своего колпака.

Если не более 18 мудрецов правильно напишут цвет своего колпака, то весь совет будет изгнан с позором. Если верный ответ даст более 18, но менее двух третей мудрецов, то совет сохранит свои функции. И, наконец, если не менее двух третей мудрецов дадут правильный ответ, то совет получит чрезвычайные полномочия.

Мудрецы знали о предстоящем испытании и потому могли подготовить совместную стратегию, чтобы число правильных ответов было как можно большим. Выясните, могут ли мудрецы *гарантированно*

a) избежать позорного изгнания;

b) добиться сохранения полномочий совета;

c) получить чрезвычайные полномочия?

3. [5 б.] Существует ли целочисленная матрица размера 3×3 с равным 1 определителем, все элементы которой больше 2013?

4. [4 б.] Треугольник ABC имеет целочисленные координаты вершин. Может ли его площадь быть иррациональным числом, если он задан:

a) на плоскости $\mathbb{R}^2$;

b) в пространстве $\mathbb{R}^3$?

5. [5 б.] Три попарно неколлинеарных вектора a, b и c таковы, что вектор $a + 2b$ коллинеарен c, а вектор $a + 3c$ коллинеарен b. Какие значения может принимать длина вектора $a + 2b + 3c$?

6. [6 б.] Изобразите множество точек (x, y) плоскости $\mathbb{R}^2$, которые удовлетворяют неравенству

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{4n} - |y|^n}{x^{4n} + |y|^n} > 0.$$

7. [5 б.] Пусть $a_1 = 1$, а при любом $n \in \mathbb{N}$ верно равенство $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$. Выясните, сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

8. [6 б.] Найдите множество многочленов $P(x)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющих условиям $P(2) = 3$ и $P(8) = 6$.

9. [8 б.] В окружность O_1 радиуса 1 вписывается квадрат, в квадрат вписывается окружность O_2. В окружность O_2 вписывается правильный восьмиугольник, а в него – окружность O_3. В окружность O_3 вписывается правильный 16-угольник и т. д. Тем самым на n-ом шаге в окружность O_n радиуса r_n вписывается правильный 2^{n+1}-угольник, а в него вписывается окружность O_{n+1}. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$.

10. [8 б.] Какова вероятность, что будет выбран верный ответ на этот вопрос, если выбор ответа случаен и равновозможен из следующих вариантов:

a) 0,2; b) 0,2; c) 0,4; d) 0,5; e) 1.

VI Олимпиада БГУ по математике для нематематических специальностей «МОН-2013»,
17 апреля 2013 г.

Фамилия, имя, отчество	Факультет	Специальность	Курс	№ группы

№ задачи	Ответ к задаче	Балл
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		