VII Олимпиада БГУ по математике для нематематических специальностей «МОН-2014»,
24 апреля 2014 г.

1. [5 б.] Можно ли из набора $1, 2, \ldots, 2013, 2014$ выбрать 1008 неповторяющихся чисел так, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось на другое. В случае ответа «да» укажите, какие числа нужно выбрать, а в случае ответа «нет» – объясните, почему числа выбрать нельзя.

2. [6 б.] Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 2014 & -1 & \cdots & 0 \\ \alpha^2 & 2014\alpha & 2014 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^n & 2014\alpha^{n-1} & 2014\alpha^{n-2} & \cdots & 2014 \end{pmatrix}.$$

3. [5 б.] Найдите геометрическое место точек, удовлетворяющих условию

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2+(z-4)^2}=7, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

4. [7 б.] Дифференцируемая строго убывающая функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Укажите способ выбора точки $M$ на графике функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, чтобы сумма площадей фигур, лежащих между графиком функции и горизонтальной прямой, проходящей через точку $M$, была минимальной.

5. [4 б.] Покажите, что функция $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ является константой при $x > 0$. Найдите эту константу.

6. [4 б.] На одном сказочном острове живут шуты и мудрецы. Внешне их различить невозможно, однако известно, что шуты все время лгут, а мудрецы говорят правду. Один путешественник приплыл на этом остров и повстречал двух местных жителей. Он спросил одного из них: «Кто-то из вас двоих мудрец?» Его вопрос не остался без ответа и, более того, он узнал ответ на свой вопрос. Кем был островитянин, к которому путешественник обратился с вопросом? Кем был другой островитянин?

7. [8 б.] На плоскости заданы две точки $A$ и $B$, расстояние между которыми 20 метров. Роботу необходимо 100 раз пройти по маршруту «точка $A$ – точка $B$ – точка $A$». Каждый раз, когда робот начинает новый проход (от $A$ к $B$ и от $B$ к $A$) с вероятностью 0,5 на середине отрезка $AB$ появляется стена $CD$, длиной 20 метров (см. рисунок 1). Робот может определить наличие стены, только подойдя к ней вплотную. Робот не может перепрыгнуть через стену, а может только обойти ее. Опишите траекторию движения робота, при которой суммарное пройденное расстояние будет наименьшим. Каково это расстояние?

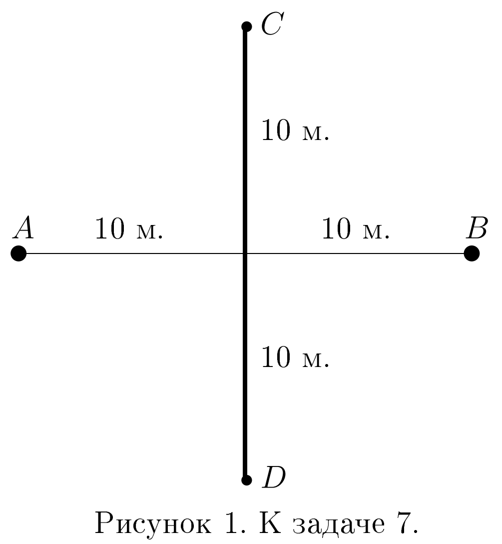

Рисунок 1. К задаче 7.

8. [4 б.] График функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки. Коэффициенты $a, b, c \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию $a + b + c < 0$. Определите знак коэффициента $c$.

9. [6 б.] Найдите предел $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

10. [5 б.] Известно, что $n$ – это натуральное число, кратное трем, и $z^2 + z + 1 = 0$, где $z$ – комплексное число. Найдите значение выражения $z^{2n} + z^n + 1$.

КРАТКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОЛИМПИАДЫ «МОН-2014»

**Задача 1.** Всякое натуральное число $n$ можно представить в виде $n = 2^p \cdot q$, где $q$ – нечетное число, а $p \geq 0$. Очевидно, что если у двух чисел множитель $q$ один и тот же, то одно из них делится на другое. Но нечетных чисел в исходном наборе всего 1007. Поэтому среди 1008 чисел найдется такая пара, что множитель $q$ у них совпадает. Следовательно, одно из них делится на другое.

Ответ: нельзя.

**Задача 2.** Обозначим определитель исходной матрицы за $\Delta_n$. Если прибавить первый столбец ко второму (при этом определитель не изменится), то легко заметить, что $\Delta_n = (\alpha + 2014)\Delta_{n-1}$.

С другой стороны определитель порядка 2 может быть вычислен непосредственно:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & 2014 \end{vmatrix} = \alpha + 2014.$$

Итак, $\Delta_n = (\alpha + 2014)\Delta_{n-1} = (\alpha + 2014)^2\Delta_{n-2} = \ldots = (\alpha + 2014)^{n-2}\Delta_2 = (\alpha + 2014)^{n-1}$.

Ответ: $(\alpha + 2014)^{n-1}$.

**Задача 3.** Заметим, что выражение в левой части равенства представляет собой сумму расстояний от точки $M(x, y, z)$ до точек $A(1, -1, -2)$ и $B(-1, -4, 4)$. В связи с тем, что расстояние между точками $A$ и $B$ равно

$$AB = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-1-(-4))^2 + (-2-4)^2} = 7,$$

геометрическое место точек, удовлетворяющих нашему условию есть отрезок $AB$.

Ответ: отрезок $AB$.

**Задача 4.** Пусть $c$ – это искомая точка. Тогда суммарная площадь фигур равна

$$S(c) = \int\limits_a^c (f(x) - f(c))dx + \int\limits_c^b (f(c) - f(x))dx = \int\limits_a^c f(x)dx - f(c)x\Big|_a^c + f(c)x\Big|_c^b - \int\limits_c^b f(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_c^b f(x)dx + (a + b - 2c)f(c) = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx + (a + b - 2c)f(c).$$

Чтобы выяснить, при каком значении $c$ функция $S(c)$ минимальна, найдем ее производную. При этом мы воспользуемся следующим известным свойством определенного интеграла:

$$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

Таким образом, выводим

$$S'(c) = -2f(c) + (a + b - 2c)f'(c) + f(c) + f(c) = (a + b - 2c)f'(c).$$

В точке $c^* = \dfrac{a+b}{2}$ производная $S'(c)$ меняет знак с минуса на плюс, т. е. точка $c^*$ – точка минимума функции $S(c)$.

Ответ: точка на графике функции $f(x)$ с абсциссой $\dfrac{a+b}{2}$.

**Задача 5.** Для каждой точки $x > 0$ функция $f(x)$ определена и имеет производную $f'(x)$, равную нулю:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Поэтому $f(x) = \mathrm{const}$ при $x > 0$. Чтобы найти эту константу, найдем значение функции для «легковычислимой» точки, в качестве которой можно выбрать $x = 1$. Итак,

$$f(x) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}, \qquad x > 0.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

**Задача 6.** Предположим, что островитянин, с которым разговаривал путешественник (обозначим его за $A$), ответил на вопрос «да». Мог ли путешественник после такого ответа знать, что по крайней мере один из встретившихся островитян мудрец? Легко понять, что нет. Действительно, $A$ мог оказаться мудрецом и правдиво ответить «да». Однако, если бы оба островитянина были шутами, $A$ также ответил бы «да». Таким образом, получив от $A$ ответ «да», путешественник не смог бы узнать истинный ответ на свой вопрос. Следовательно, $A$ мог ответить только «нет». Выясним теперь, кто такие островитянин $A$ и его приятель, которого мы обозначим за $B$. Если бы $A$ был мудрецом, то он не мог бы дать правдивый ответ «нет», поэтому $A$ – шут. Так как его отрицательный ответ ложен, то по крайней мере одни из двух островитян должен быть мудрецом. Следовательно, $A$ – шут, а $B$ – мудрец.

Ответ: первый – шут, второй – мудрец.

**Задача 7.** Пусть $O$ – это точка пересечения отрезков $AB$ и $CD$. Найдем точку $K$ отрезка $CD$ к которой должен идти робот, чтобы пройти наименьшее расстояние при очередном проходе. Очевидно, что в силу симметрии можно рассматривать только верхнюю часть отрезка $CD$, т. е. считать, что точка $K$ лежит на отрезке $CO$. Длину отрезка $KO$ обозначим за $x$. Тогда за один проход (от $A$ к $B$ или от $B$ к $A$) робот пройдет $2\sqrt{x^2+100}$ метров, если стена не появилась, и $\sqrt{x^2+100}+10-x+10\sqrt{2}$ метров, если стена появилась. Таким образом, математическое ожидание $M(x)$ расстояния за один проход составляет

$$M(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x^2+100}-\frac{x}{2}+5+5\sqrt{2}.$$

Нам же нужно сделать 200 таких проходов, т. е. ожидаемое расстояние составляет $200M(x)$. Минимум функции $M(x)$ достигается в точке $x^*=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ и составляет $M(x^*)=15\sqrt{2}+5$. Итак за 100 проходов по маршруту «точка $A$ – точка $B$ – точка $A$» робот преодолеет в среднем $3000\sqrt{2}+1000$ метров.

Ответ: всякий раз, выходя из точки $A$ или из точки $B$, робот должен идти по прямой к точке $K$, находящейся на отрезке $CD$ и отстоящей от отрезка $AB$ на $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ метров. Дойдя до точки $K$, он проверяет наличие стены и, в случае ее отсутствия, идет по прямой к пункту назначения. Если же стена присутствует, то он обходит ее вдоль и затем идет по прямой к пункту назначения. За 100 проходов по маршруту «точка $A$ – точка $B$ – точка $A$» робот преодолеет в среднем $3000\sqrt{2}+1000$ метров.

**Задача 8.** Поскольку функция $f(x)$ не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки, следовательно на $\mathbb{R}$ функция принимает значения только одного знака. Из условия $a+b+c<0$ вытекает, что это значение отрицательно, так как $f(1)=a+b+c<0$. Таким образом, $f(x)<0$ при любых $x\in\mathbb{R}$. Но это означает, что и $f(0)=c<0$.

Ответ: $c<0$.

**Задача 9.** Справедлива следующая цепочка преобразований

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{\ln(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{\operatorname{ctg}x\ln(\operatorname{tg}x)}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{ctg}x\ln(\operatorname{tg}x)}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}}.$$

Введя замену $t=\operatorname{tg}x$, легко находим предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0.$$

Следовательно, искомый предел равен $e^0=1$.

Ответ: 1.

**Задача 10.** Решим уравнение $z^2+z+1=0$ в комплексных числах. Его дискриминант – это число $-3$, а потому корни равны

$$z_{1,2}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Тогда согласно формуле Муавра и с учетом, что число $n$ кратно трем, находим

$$z^{2n}+z^n+1=\cos\frac{4\pi n}{3}+i\sin\frac{4\pi n}{3}+\cos\frac{2\pi n}{3}+i\sin\frac{2\pi n}{3}+1=3.$$

Ответ: 3.