

6. Решить уравнение на двух промежутках: 1.

$\xrightarrow{\text{I. ; II}} \quad -2a$ На каком из промежутков $|x+2a|$ берет себе по-своему

I. $x \leq -2a$

Тогда уравнение эквивалентно

$$-3(x+2a) - 3a + x - 15 = 0$$

$$x = -\frac{9a+15}{2}$$

Чтобы x было решением, нужно чтобы

$$-\frac{9a+15}{2} \leq -2a$$

это выполнено при $a \geq -3$.

Чтобы данный x удовлетворял условию задачи, нужно чтобы

$$0 \leq -\frac{9a+15}{2} \leq 4, \text{ это выполнено}$$

$$\text{при } -\frac{23}{9} \leq a \leq -\frac{5}{3}$$

Итак, на промежутке I появится нулевой корень, удовлетворяющий $x \in [0, 4]$ при $a \in [-\frac{23}{9}; -\frac{5}{3}]$.

II $x > -2a$

Уравнение эквивалентно

$$3(x+2a) - 3a + x - 15 = 0$$

$$x = \frac{15-3a}{4}$$

Чтобы найденный x был решением,

нужно чтобы $\frac{15-3a}{4} > -2a$. Это выполнено

при $a > -3$.

Чтобы найденный корень принадлежал $[0; 4]$ нужно, чтобы 2

$$0 \leq \frac{15-3a}{4} \leq 4.$$

Это выполнено при $-\frac{1}{3} \leq a \leq 5$.

Следовательно, на II появится корень из нужного промежутка при $a \in [-\frac{1}{3}; 5]$.

Заметим, что при $a > -3$ у нас на каждом промежутке появляется решение. Но одно из них (или оба) не принадлежат требуемому промежутку $x \in [0; 4]$.

То есть чтобы найти требуемое a нужно пересечь множества из пунктов I и II . Данные отрезки не пересекаются, следовательно, такого a не существует.

Ответ: $a \in \emptyset$.

При $a = -3$ корень один ($x = 6$) и он не из $[0; 4]$.

При $a < -3$ корней нет вообще.

⑦ Из условия задачи 1
 b, a, c - арифметическая прогрессия с $d=4$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a &= b+4 \\ c &= b+8 \end{aligned}$$

Уравнение примет вид:

$$(b+4)x^2 + bx + (b+8) = 0 \quad (1)$$

Пусть x - меньший корень этого квадратного уравнения. Т.к. оба корня положительные, то $2x$ - больший корень, согласно условию задачи.

$$\text{Тогда: } 4(b+4)x^2 + 2bx + (b+8) = 0. \quad (2)$$

Умножим (1) на 4 и вычтем (2):

$$4bx + 4(b+8) - 2bx - (b+8) = 0$$

$$2bx = -3(b+8)$$

$$x = \frac{-3(b+8)}{2b}$$

Подставим полученный x в (1).

Отметим, что $b \neq 0$. (Иначе (1) примет вид $4x^2 + 8 = 0$, нет корней)

$$(b+4) \cdot \frac{9(b+8)^2}{4b^2} - \frac{3(b+8)}{2} + (b+8) = 0.$$

$$(b+8) \cdot \left[\frac{9(b+4)(b+8)}{4b^2} - \frac{1}{2} \right] = 0.$$

а) если $b = -8$, то (1) примет вид

$$-4x^2 - 8x = 0.$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$x_1 = 0$ или $x_2 = -2$ - не соответствует условию задачи.

$$\text{б) } \frac{9(b+4)(b+8)}{4b^2} = \frac{1}{2}$$

$$9(b+4)(b+8) = 2b^2$$

$$7b^2 + 108b + 288 = 0$$

$$\Delta/4 = 54^2 - 7 \cdot 288 = 2916 - 2016 = 900$$

2

$$b_1 = \frac{-54 + 30}{7} = -\frac{24}{7}$$

$$b_2 = \frac{-54 - 30}{7} = -12.$$

I. Если $b = -12$, тогда $a = -8$, $c = -4$.

Имеем уравнение

$$-8x^2 - 12x - 4 = 0.$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0$$

Корни $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ — не положительные,
не соответствует условию задачи

II Если $b = -\frac{24}{7}$, тогда $a = \frac{4}{7}$, $c = \frac{32}{7}$

Уравнение $\frac{4}{7}x^2 - \frac{24}{7}x + \frac{32}{7} = 0$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Корни $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ — удовлетворяют
условию задачи.

Ответ: $a = \frac{4}{7}$; $b = -\frac{24}{7}$; $c = \frac{32}{7}$.

$$8. \quad \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x - 3}{\sqrt{2}} \quad \underline{1}$$

Пусть $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = t$.

Тогда $t^2 = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 1 + \sin x$,

$$\Rightarrow \sin x = t^2 - 1.$$

Кер-во эквивалентно

$$t \leq \frac{t^2 - 1 - 3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t^2 - \sqrt{2}t - 4 \geq 0.$$

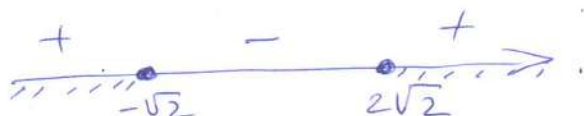
$$t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0$$

Решим методом интервалов

$$D = 2 + 4 \cdot 4 = 18 = (3\sqrt{2})^2$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$



$$t \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$$

Но $|t| \leq \sqrt{2}$ поскольку

$$\begin{aligned} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} &= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{2} \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{и} \quad |\sin \varphi| \leq 1 \quad \forall \varphi \end{aligned}$$

Следовательно, решением неравенства (пересекаем области) является только

$$t = -\sqrt{2} \Rightarrow t = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{3\pi}{2} + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

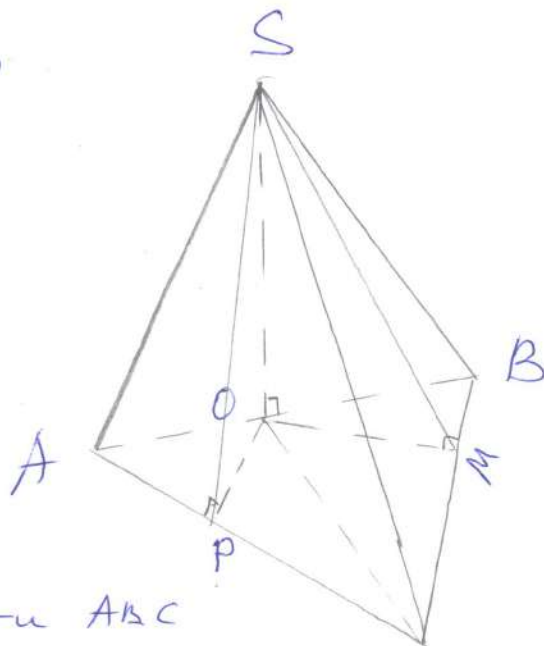
Ответ: $x = -\frac{3\pi}{2} + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

9) $SABC$ - пирамида
 SO - высота. $O \in AB$ по
 условию. $SAB \perp ABC$
 $\angle ACB = 120^\circ$

$$S_{ABC} = 3, S_{BSC} = 2$$

$$AO:OB = 2:1, AC = BC.$$

AB, AC, BC - ?



Проведем из точки
 O (основание высоты
 пирамиды) в плоскости ABC
 перпендикуляры OP и OM к AC и BC
 соответственно.

По теореме о трех перпендикулярах $SP \perp AC$ и
 $SM \perp BC$. То есть построены высоты в углах x
 ASC и BSC .

$$S_{ASC} = \frac{1}{2} \cdot SP \cdot AC = \frac{1}{2} SP \cdot BC = 3$$

$$S_{BSC} = \frac{1}{2} SM \cdot BC = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{SP \cdot BC}{3} = \frac{SM \cdot BC}{2},$$

$$\text{то есть } SP = \frac{3}{2} SM.$$

Пусть $AB = 3x$. Тогда $AO = 2x, OB = x$.

По теореме косинусов $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ACB$
 $(\cos 120^\circ = -\frac{1}{2})$ $9x^2 = 2BC^2(1 + \frac{1}{2}) = 3BC^2$
 $\Rightarrow BC = x\sqrt{3}.$

Очевидно, что площади треугольников AOC и BOC
 относятся точно так же, как и их основания $AO:OB =$
 $= 2:1$.

С другой стороны $S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OP = \frac{1}{2} BC \cdot OP$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot OM$$

Следовательно $\frac{OP}{OM} = \frac{2}{1}.$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (x\sqrt{3})^2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{3x^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{AOC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}, \quad S_{BOC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} OP \cdot x\sqrt{3} \Rightarrow OP = x$$

$$OM = \frac{x}{2}$$

Тогда $S_{ASC} = 3 = \frac{1}{2} \cdot SP \cdot x\sqrt{3}$, откуда $SP = \frac{2\sqrt{3}}{x}$

Аналогично, $SM = \frac{4\sqrt{3}}{3x}$

Выразим квадрат высоты SO из треугольников SOP и SOM . Приравняем, получим уравнение для нахождения x :

$$\frac{12}{x^2} - x^2 = \frac{16}{3x^2} - \frac{x^2}{4} \quad / \cdot 12x^2$$

$$144 - 12x^4 = 64 - 3x^4$$

$$9x^4 = 80$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{80}{9}} \quad (x > 0)$$

Тогда $AB = 3x = \sqrt[4]{\frac{80}{9} \cdot 81} = \sqrt[4]{720}$

$$AC = BC = x\sqrt{3} = \sqrt[4]{\frac{80}{9} \cdot 9} = \sqrt[4]{80}$$

Заметим, что $AO:OB = 2:1$, а не наоборот. Т.к. больше площадь боковой грани соответствует больше проекция.

$$(16) \log_6 \left(6^{\frac{1-2x}{3x-2}} + \frac{23}{6} \right) = \log_6 4 + \frac{1-x}{3x-2}.$$

Заметим, что при $x = \frac{2}{3}$ др-е имеет нуль и далее считаем $x \neq \frac{2}{3}$.

Пусть $\frac{1-2x}{3x-2} = t$, тогда $-t = \frac{2x-1}{3x-2}$,

$$-t-1 = \frac{2x-1}{3x-2} - 1 = \frac{1-x}{3x-2}$$

Следовательно, уравнение примет вид

$$\log_6 \left(6^t + \frac{23}{6} \right) = \log_6 4 - t - 1$$

$$(\log_6 6 = 1)$$

$$\log_6 \left(6^t + \frac{23}{6} \right) = \log_6 \frac{4}{6^{t+1}}$$

$$6^t + \frac{23}{6} = \frac{4}{6^{t+1}}$$

Пусть $6^t = y$ ($y > 0!!$)

$$y + \frac{23}{6} = \frac{4}{6y}$$

$$6y^2 + 23y = 4$$

$$6y^2 + 23y - 4 = 0$$

$$D = 529 + 4 \cdot 6 \cdot 4 = 625 = (25)^2$$

$$y_1 = \frac{-23+25}{12} = \frac{1}{6}, \quad y_2 = \frac{-23-25}{12} < 0$$

↓

$$6^t = \frac{1}{6} \Rightarrow t = -1.$$

$$\frac{1-2x}{3x-2} = -1$$

$$1-2x = 2-3x$$

$$x = 1$$

Проверка:

$$\log_6 \left(6^{-1} + \frac{23}{6} \right) = \log_6 4 + 0$$

$$\log_6 4 = \log_6 4$$

Ответ: $x = 1$.