Олимпиада "Абитуриент ММФ БГУ-2023"

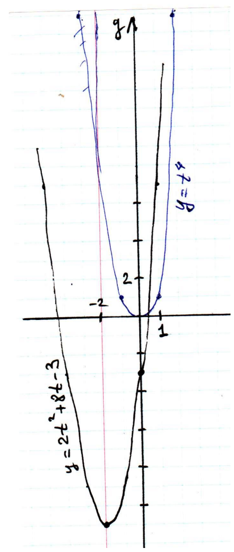
13.04.2023

1. Ответ: -80.

   Сделаем замену $t = \sqrt[4]{x^2 + 10x}$. Тогда уравнение примет следующий вид:

$$t^4 - 3 - 2t^2 + 4t = 6\,(2t - 1)\,.$$

   Перепишем уравнение в виде $t^4 = 2t^2 + 8t - 3$. Изучим количество решений этого уравнения с помощью графического метода, построив его левую и правую части на одной координатной плоскости. Координаты вершины параболы $x_{\text{в}} = -2, y_{\text{в}} = -11$, точка пересечения с осью y — $(0, -3)$, положительный корень параболы лежит на интервале $(0, 1)$, парабола проходит через точку $(1, 7)$.

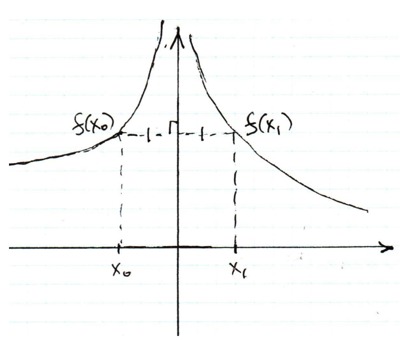


   Поскольку функция $y = t^4$ растет быстрее функции $y = 2t^2 + 8t - 3$ при больших по модулю значениях t, то точек пересечения при отрицательных t нет, при положительных — два пересечения, что говорит о том, что данное уравнение имеет два положительных корня. Обозначим их a и b, соответственно. Возвращаемся к введенной замене. Имеем:

$$x^2 + 10x = a^4 \qquad \text{или} \qquad x^2 + 10x = b^4.$$

   Каждое из этих квадратных уравнений имеет два корня (отрицательный свободный коэффициент). Сумма корней каждого уравнения равна (-10) (из теоремы Виета), поэтому сумма всех четырех корней равна (-20), получаем ответ задачи $(-20) \cdot 4 = -80$.

2. Ответ: 2



Поскольку ось ординат является серединным перпендикуляром отрезка $[x_0, x_1]$, концы которого принадлежат графику функции $f(x)$, то $x_0 = -x_1$ и $f(x_0) = f(-x_1) = f(x_1)$. Из последнего равенства имеем, откинув совпадающие слагаемые:

$$\frac{x_1}{2} - \frac{1}{2x_1^5} = -\frac{x_1}{2} + \frac{1}{2x_1^5},$$

следовательно, $x_1 = \frac{1}{x_1^5}$, $x_1^6 = 1$, $x_1 = \pm 1$. Поскольку мы считаем (см. эскиз графика), что $x_1 > 0$, то $x_1 = 1$ и длина отрезка $[x_0, x_1] = [-1, 1]$ равна 2.

3. Ответ:$x = 1$.

Подкоренное выражение в левой части приводится к виду $\left(2-\sqrt{3}\right)^2$. Поэтому с учетом того, что $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$, неравенство принимает слудующий вид:

$$2^{(x-1)^2} \leq \sin\frac{\pi x}{2}.$$

Левая часть неравенства больше либо равна 1, минимум достигается в точке $x = 1$. Правая - меньше либо равна 1, максимум достигается в точках $x = 1 + 2\pi k, k \in Z$, поэтому данное неравенство вырождается в равенство, которое, очевидно, влечет единственное решение $x = 1$.

4. Ответ: $x \in [-1, 0) \cup [1, +\infty)$.

Рассмотрим выражения под модулем. Очевидно, что эти выражения меняют знак при переходе через точки -1, 0 и 1. Данные точки разобью всю числовую ось на 4 промежутка. Будем решать уравнение на каждом из этих промежутков, вставляя нужный знак перед выражением при опускании знака модуля. В точке 0 уравнение смысла не имеет, поэтому она не включается ни в один из промежутков. Другие точки разбиения попадают в какой-то один из промежутков.

1) $x \in (-\infty, -1]$.

Имеем:

$$\frac{x-1}{x} - (x+1) = x - \frac{1}{x} + 2.$$

Данное уравнение имеет корень -1, который принадлежит промежутку.

2) $x \in (-1, 0)$.

$$\frac{x-1}{x} + (x+1) = x - \frac{1}{x} + 2.$$

На этом промежутке уравнение превращается в верное равенство, поэтому весь интервал попадает в ответ задачи.

3) $x \in (0, 1)$.

$$-\frac{x-1}{x} + (x+1) = x - \frac{1}{x} + 2.$$

Уравнение имеет корень 1, который не принадлежит промежутку.

4) $x \in [1, +\infty)$.

$$\frac{x-1}{x} + (x+1) = x - \frac{1}{x} + 2.$$

На этом промежутке уравнение снова превращается в верное равенство, поэтому весь интервал попадает в ответ задачи. Объединяя полученные результаты, получаем ответ.

5. Ответ: таких $a \in (-0,2; 0)$.

Данное уравнение обязательно имеет решение $x = a$. Поэтому уравнение будет иметь 2 решения в следующих случаях:

а) Дискриминант квадратного уравнения в скобках равен нулю. И единственный корень этого уравнения (хотя и двойной кратности) отличен от a и удовлетворяет условию $x \geq a$;

б) Дискриминант квадратного уравнения в скобках больше нуля. Оба корня отличны от a, но один из полученных корней не удовлетворяет условию $x \geq a$;

в) Дискриминант квадратного уравнения в скобках больше нуля. Но один из полученных корней совпадает с a, а другой удовлетворяет условию $x > a$.

Рассмотрим эти случаи отдельно.

а) $D = 1 + 4a - 4a^2 = 0$, дает решения $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. При этом единственный корень квадратного уравнения равен $x = -\dfrac{1}{2} - a$. Чтобы этот корень удовлетворял условию $x > a$ нужно чтобы $a < -\dfrac{1}{4}$. Ни одно из найденных значений a не удовлетворяет данному условию.

б) Дискриминант будет положительным при $a \in [\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}]$. Корни уравнения имеют вид: $x_1 = \dfrac{-1-2a-\sqrt{1+4a-4a^2}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1-2a+\sqrt{1+4a-4a^2}}{2}$. x_1 — меньший корень, поэтому должно быть выполнено $x_1 < a$, $x_2 > a$.

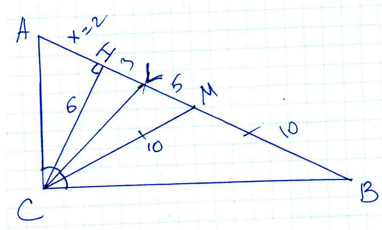
Первое условие влечет $\sqrt{1+4a-4a^2} > -1-4a$. Но это неравенство выполнено автоматически, если $a > -\dfrac{1}{4}$, а это действительно так, в условиях предположения о дискриминанте.

Второе условие влечет неравенство $\sqrt{1+4a-4a^2} > 1 + 4a$. Правая часть неравенства неотрицательна при условии на дискриминант. Неравенство приводится к виду $20a^2 + 4a < 0$, которое имеет решение $a \in (-0,2; 0)$.

в) Очевидно, меньший корень должен совпадать с a. Приходим к уравнению $\sqrt{1+4a-4a^2} = -1-4a$, которое не имеет решений при предположении относительно дискриминанта.

6. Ответ: $\pi n, \pm \operatorname{arctg}(\sqrt{5/7}) + \pi k, n, k \in Z$.
Используем формулы суммы синусов и суммы косинусов для первого и третьего слагаемых в числителе и знаменателе, имеем:
$$\frac{2\sin 3x \cos 2x + \sin 3x}{2\cos 3x \cos 2x + \cos 3x} + 2\operatorname{tg} x = 0.$$
Выносим общий множитель в числителе и знаменателе, сокращаем на него и в конце решения задачи проверим, что найденные корни удовлетворяют ОДЗ:
$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \\ 2\cos 2x + 1 \neq 0. \end{cases}$$
Имеем: $\operatorname{tg} 3x + 2\operatorname{tg} x = 0$. Используя формулу для тангенса суммы два раза, выражаем $\operatorname{tg} 3x$ через $\operatorname{tg} x$, имеем:
$$\frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} + 2\operatorname{tg} x = 0.$$
Выносим общий множитель $\operatorname{tg} x$ за скобки, приводим к одному знаменателю, знаменатель откидываем (и учитываем в ОДЗ $1 - 3\operatorname{tg}^2 x \neq 0$). Получаем, что
$$\operatorname{tg} x = 0 \qquad \text{или} \qquad 7\operatorname{tg}^2 x = 5.$$
Очевидно, что все решения
$$x_1 = \pi n, \qquad x_{2,3} = \pm \operatorname{arctg}(\sqrt{5/7}) + \pi k, \quad n, k \in Z$$
удовлетворяют ОДЗ.

7. Ответ: $3\sqrt{5}$.

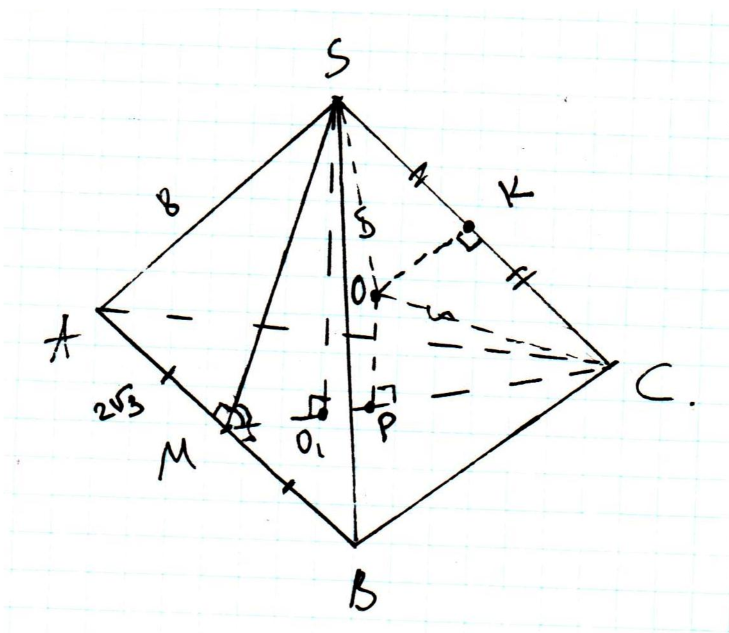


Поскольку треугольник ABC прямоугольный и CM — медиана, то $AB = 2CM = 20$. Пусть $AH = x$, тогда $BH = 20 - x$ и по свойству высоты, проведенной к гипотенузе: $CH^2 = AH \cdot HB$: $x(20 - x) = 36$. Решением этого уравнения являются $x = 2$ и $x = 18$. Поскольку на рисунке мы обозначили AH — меньший отрезок, то считаем, что $x = 2$ (иначе поменять на рисунке вершины A и B местами). Тогда $HM = 8$ (это же можно получить по теореме Пифагора из треугольника CMH).

CL — биссектриса и в треугольнике CMH, поэтому по свойству биссектрисы $\dfrac{HL}{CH} = \dfrac{LM}{CM}$, откуда $HL = \dfrac{3}{5}LM$, но $HL + LM = 8$, следовательно, $HL = 3, LM = 5$.

По теореме Пифагора для треугольника LCH получим $CL = 3\sqrt{5}$.

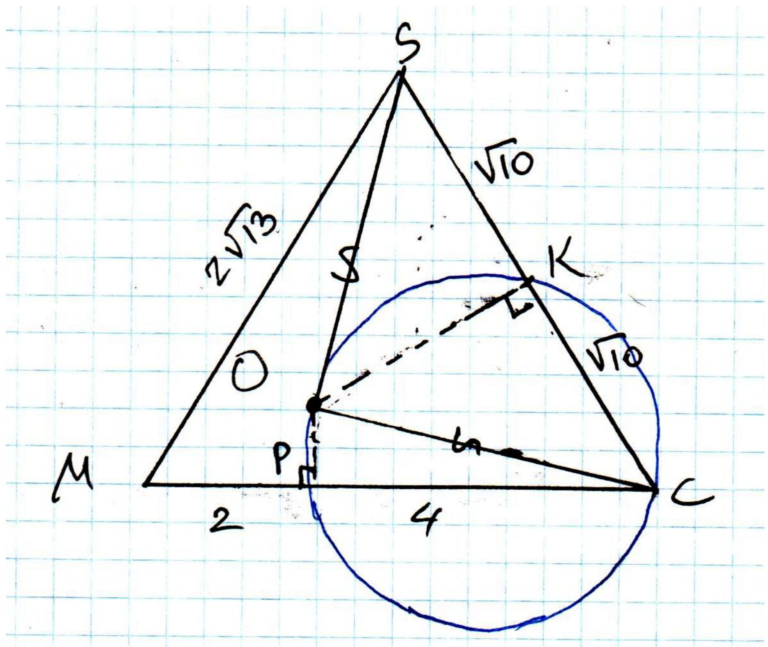
8. Ответ: $2\sqrt{5}$.



Опустим из точки S перпендикуляр к плоскости ABS, основание перпендикуляра обозначим O_1. Прямоугольные треугольники ASO_1 и BSO_1 равны по гипотенузе и общему катету. Поэтому $AO_1 = BO_1$. Соединим точки C и O_1, точку пересечения прямой CO_1 с AB обозначим M. Треугольники AO_1C и BO_1C равны по трем сторонам. Поэтому CM — биссектриса угла C равностороннего треугольника ABC и CM — медиана и высота. Следовательно, SM — медиана и высота в равнобедренном треугольнике ASB. Поэтому плоскость треугольника SMC перпендикулярна AB — линии пересечения плоскостей ABC и ABS. Угол $\angle SMC$ — двугранный между гранями ABC и ABS.

В треугольнике SMC $SM = 2\sqrt{13}$, $CM = 6$, $\angle SMC\dfrac{2}{13}$. По теореме косинусов $SC = 2\sqrt{10}$. Пусть P — центр ABC. P лежит на CM, причем $CP = 2/3CM = 4$. Обозначим K середину SC.

Пусть O — центр сферы, описанной вокруг пирамиды. Понятно, что O лежит на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через точку P в плоскости треугольника SMC. Кроме того, $SO = OC$, поэтому $OK \perp SC$.



Рассмотрим четырехугольник $POKC$. Поскольку сумма противолежащих его углов K и P равна $180°$, то вокруг этого четырехугольника может быть описана окружность. А диаметр этой окружности OC равен радиусу сферы, описанной вокруг пирамиды. Радиус этой окружности может быть найден как радиус окружности, описанной вокруг треугольника PKC. В этом треугольнике косинус угла PCK может быть найден по теореме косинусов из треугольника SMC: $\cos\angle PCK = \dfrac{SC^2 + MC^2 - SM^2}{2SC \cdot CM} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Тогда по теореме косинусов из треугольника PCK: $PK = 3\sqrt{2}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin\angle PCK = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Тогда диаметр окружности, описанной вокруг PCK, то есть радиус шара, описанного вокруг пирамиды равен $R = \dfrac{PK}{\sin\angle PCK} = 2\sqrt{5}$.

9. Ответ: Если учитывать и само слово “биссектриса”, то всего анаграмм $\dfrac{11!}{2!3!}$.
   Для решения задачи необходимо посчитать количество возможных перестановок с повторениями. Буква $'и'$ в слове повторяется 2 раза. Будем сначала считать, что у нас 2 разные буквы $'и'$ — $'и'_1$ и $'и'_2$. Аналогично, имеем 3 разных буквы $'с'$ — $'с'_1$, $'с'_2$ и $'с'_3$. Существует 11! перестановок из 11 различных символов. Если мы поменяем между собой буквы $'и'_1$ и $'и'_2$, анаграмма исходного слова не изменится. Поэтому количество анаграмм из различных символов нужно разделить на количество возможных перестановок букв $'и'$ и $'с'$ (на 2! и 3! соответственно).
10. Ответ: $(2, 1)$, $(1, 2)$.
    Сделаем замену $x + y = a$, $xy = b$ (очевидно, что исходная система выражается именно через сумму и произведение x и y. Кроме того, система симметрична

по вхождению переменных, поэтому ожидаем симметричные решения). После введенной замены и использования формулы сокращенного умножения (сумма кубов двух чисел) система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a(a^2 - 3b) + b^3 = 17. \end{cases}$$

Выражаем из первого уравнения a через b, подставляем во второе уравнение системы, открываем скобки, приводим подобные, соращаем уравнение на общий множитель, получаем: $b^2 - 5b + 6 = 0$. Решаем квадратное уравнение по теореме Виета, находим возможные значения b и соответствующие им значения a. Возвращаемся к замене, получаем совокупность систем:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений в действительных числах.