

Олимпиада “АБИТУРИЕНТ ММФ БГУ-2023”

13.04.2023

1. Найти значение выражения nS , где n — количество, а S — сумма корней уравнения

$$x^2 + 10x - 3 - 2\sqrt{x^2 + 10x} + 4\sqrt[4]{x^2 + 10x} = 6 \left(2\sqrt{x^2 + 10x} - 1 \right).$$

2. Найти длину отрезка, концы которого принадлежат графику функции

$$f(x) = 8|x^7| - 5x^2 - \frac{x}{2} + \arcsin 0,3 + \frac{1}{2x^5} + \ln|x|,$$

а ось ординат является его серединным перпендикуляром.

3. Решить неравенство

$$\left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \right)^{2^{(x-1)^2}} \geq (2 - \sqrt{3})^{\sin \frac{\pi x}{2}}.$$

4. Решить уравнение

$$\left| \frac{x-1}{x} \right| + |x+1| = x - \frac{1}{x} + 2.$$

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x-a}(x^2 + (1+2a)x + 2a^2) = 0$$

имеет 2 решения?

6. Решить уравнение

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} + 2 \operatorname{tg} x = 0.$$

7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) отрезки CH , CL и CM — соответственно высота, биссектриса и медиана треугольника. Найдите длину CL , если $CH = 6$, $CM = 10$.

8. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC , сторона которого равна $4\sqrt{3}$. Известно, что $AS = BS = 8$, а двугранный угол между гранями ABC и ABS равен $\arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

9. Анаграммой называется слово, образованное путём перестановки букв, составляющих другое слово. Найти количество различных анаграмм слова “Биссектриса” (учитываем даже бессмысленные слова с точки зрения русского языка).

10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^3 + y^3 + x^3y^3 = 17. \end{cases}$$