

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе БГУ

А. Л. Толстик
(И.О. Фамилия)

(подпись)

(дата утверждения)

Регистрационный № УД-5046/уч.

**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН
ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ, СПЕЦИАЛИЗАЦИИ**

**Учебная программа учреждения высшего образования
по государственному экзамену для специальности**

1-31 03 02 Механика и математическое моделирование

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 02-2013 (30.08.2013) и учебного плана специальности 1-31 03 02 Механика и математическое моделирование (№ G31-136/уч.; 30.05.2013).

СОСТАВИТЕЛИ:

М.А. Журавков, зав. кафедрой теоретической и прикладной механики, доктор физ.-мат. наук, профессор;
П.Н. Конон, доцент кафедры теоретической и прикладной механики, кандидат физ.-мат. наук, доцент;
В.Г. Кротов, зав. кафедрой теории функций, доктор физ.-мат. наук, профессор;
Д.Г. Медведев, декан механико-математического факультета, кандидат физ.-мат. наук, доцент;
Г.И. Михасев, зав. кафедрой био- и наномеханики, доктор физ.-мат. наук, профессор.
Н.Б. Яблонская, доцент кафедры общей математики и информатики, кандидат физ.-мат. наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета (протокол № 2 от 26.10 2017 г.);
Советом механико-математического факультета (протокол № 2 от 31.10 2017 г.);
Научно-методическим советом Белорусского государственного университета (протокол № 2 от 15.11 2017 г.)

Ответственный за редакцию: П.Н. Конон

Ответственный за выпуск: М.А. Журавков



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

На государственном экзамене по специальности студент должен **знать:**

- основополагающие понятия механики и математики;
- формулировки математических лемм и теорем;
- точные формулировки законов и теорем механики и математики и их доказательство;
- решения классических задач теоретической механики и механики сплошных сред.

уметь:

- применять теорию к решению задач механики и математики и иллюстрировать свои знания простыми практическими примерами из области механики.

Члены Государственной экзаменационной комиссии могут предлагать студенту в качестве дополнительных вопросов разбор простых примеров, определения и формулировки теорем из программы.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

МЕХАНИКА

РАЗДЕЛ I. Теоретическая механика

Тема 1.1 Кинематика точки

Основные понятия кинематики. Скорость точки и ускорение точки. Равномерное и равнопеременное движение. Кинематика точки в криволинейных координатах.

Тема 1.2 Кинематика твердого тела

Определение и свойства поступательного движения твердого тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение. Равномерное и равнопеременное вращение. Плоскопараллельное движение тела. Движение твердого тела около неподвижной точки. Теорема Даламбера-Эйлера. Скорости и ускорения точек тела. Теорема Ривальса. Кинематические уравнения Эйлера. Движение свободного твердого тела. Теорема Шаля. Сложное движение точки. Сложное движение твердого тела. Сложение мгновенных вращений. Общий случай. Винт. Центральная винтовая ось.

Тема 1.3 Динамика точки

Законы и задачи динамики. Общие теоремы динамики точки. Прямолинейное движение точки. Прямолинейные колебания точки. Свободные, затухающие, вынужденные колебания. Движение точки в поле центральных сил. Формулы Бинэ. Задача Ньютона. Уравнение Кеплера. Искусственные спутники Земли. Движение несвободной материальной точки. Математический маятник. Брахистохрона. Сферический маятник. Относительное движение материальной точки. Относительный покой и движение вблизи поверхности Земли. Маятник Фуко.

Тема 1.4 Динамика системы

Основные понятия и основные динамические величины. Общие теоремы динамики системы. Динамика тел переменной массы. Уравнение Мещерского. Задачи Циолковского.

Тема 1.5 Динамика твердого тела

Геометрия масс. Тензор инерции, эллипсоид инерции. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Давление на ось. Физический маятник. Плоское движение твердого тела. Движение тела около неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера. Движение тяжелого твердого тела. Проблема четвертого интеграла. Случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской. Элементарная теория гироскопа. Теория удара. Удар по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Центр удара.

Тема 1.6 Аналитическая механика

Принцип возможных перемещений. Принцип Даламбера. Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа первого рода. Уравнения Лагранжа второго рода. Канонические уравнения Гамильтона. Малые колебания механических систем. Устойчивость равновесия. Теорема Лежен-Дирихле. Уравнения движения неголономных систем. Уравнения Аппеля. Вариационные принципы. Принцип Гамильтона, принцип Гаусса.

РАЗДЕЛ II. Механика сплошной среды

Тема 2.1 Основные понятия, используемые для описания движения и деформации сплошных сред

Предмет механики сплошной среды. Область приложений, перспективные направления. Понятие сплошной среды. Гипотеза сплошности. Эйлерово и Лагранжево описание движения. Индивидуальная производная по времени. Вектор перемещения. Тензор малых деформаций. Главные оси, главные значения, инварианты тензора деформаций. Механический смысл компонент тензора деформаций. Уравнения совместности для компонент тензора малых деформаций. Тензор скоростей деформаций. Выражение его компонент через компоненты скорости. Теорема Коши-Гельмгольца. Вектор вихря. Циркуляция скорости, теорема Стокса. Потенциал скорости.

Тема 2.2 Фундаментальные законы механики сплошной среды и термодинамики

Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности. Закон сохранения количества движения. Силы, действующие на сплошную среду. Вектор напряжения, формула Коши. Тензор напряжений. Уравнения движения сплошной среды. Закон сохранения момента количества движения в классическом случае. Идеальная несжимаемая жидкость. Полная система уравнений. Условие непроницаемости. Примеры движений идеальной несжимаемой жидкости: твердотельное вращение в цилиндрическом сосуде, плоскопараллельное потенциальное течение в окрестности критической точки. Вязкая жидкость. Опыт Ньютона. Закон Навье-Стокса. Уравнения Навье-Стокса. Полная система уравнений несжимаемой линейно-вязкой жидкости. Граничные условия. Слоистые течения и их примеры: течения Пуазейля и Куэтта и другие. Упругая среда. Опыт Гука. Закон Гука. Полная система уравнений линейно-упругой среды. Типичные граничные условия. Первый закон термодинамики. Внутренняя энергия. Теорема об изменении кинетической энергии. Уравнение энергии и уравнение притока тепла. Закон теплопроводности Фурье. Второй закон термодинамики. Понятие энтропии. Условия на поверхностях сильного разрыва в сплошных средах. Ударные волны, тангенциальные разрывы, контактные поверхности.

Тема 2.3 Классические модели сплошной среды

Идеальная сжимаемая жидкость или газ. Полная система уравнений. Типичные граничные условия. Совершенный газ. Примеры движений идеального сжимаемого совершенного газа: звуковые волны, волны Римана.

Интегралы Бернулли и Коши-Лагранжа и их применение. Теоремы о вихрях в идеальной жидкости. Потенциальное движение однородной несжимаемой жидкости. Уравнение Лапласа для потенциала скорости. Граничные условия на поверхности твердого тела и на свободной поверхности жидкости. Примеры плоских потенциальных движений однородной несжимаемой жидкости. Функция тока. Плоскопараллельное течение, обтекание угла, источник и сток, диполь, обтекание цилиндра. Вязкая теплопроводная жидкость. Полная система уравнений. Число Рейнольдса. Понятие о пограничном слое. Опыт Рейнольдса. Понятие об устойчивости течения и турбулентности. Линейная термоупругая среда. Полная система уравнений. Типичные граничные условия. Постановка задач линейной теории упругости в перемещениях и в напряжениях. Теорема единственности задач линейной теории упругости. Принцип Сен-Венана. Задача об одноосном растяжении упругого бруса. Неупругое поведение деформируемых твердых тел. Пластичность, ползучесть, релаксация.

Тема 2.4 Равновесие жидкостей и твердых деформируемых тел

Уравнения гидростатики. Барометрическая формула. Давление на твердую поверхность. Закон Архимеда. Равновесие вращающейся несжимаемой жидкости. Уравнения равновесия линейно-упругого тела. Бигармоническое уравнение для вектора перемещения. Задача Ламе. Определение перемещений, распределение напряжений в стенке трубы. Задача о кручении стержня круглого поперечного сечения.

Тема 2.5 Применение методов теории функций комплексного переменного к решению задач механики сплошной среды

Плоские потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости. Комплексная скорость, комплексный потенциал. Примеры комплексного потенциала: точечный вихрь, диполь, обтекание кругового цилиндра с циркуляцией. Формулы Чаплыгина для гидродинамических реакций. Формула Жуковского для подъемной силы. Парадокс Даламбера. Поступательное движение цилиндра и шара в безграничной жидкости, присоединенная масса. Плоские задачи теории упругости. Компоненты перемещений в плоской задаче. Уравнения Бельтрами-Мичелла. Условие на внешние массовые и поверхностные силы. Постановка плоских задач теории упругости. Плоское деформированное и плоское напряженное состояния упругой среды. Функция напряжений Эри. Бигармоническое уравнение и граничные условия для функции Эри. Формула Гурса. Выражения компонент тензора напряжений и вектора перемещений через функции комплексного

переменного. Граничные условия и классификация краевых задач для определения функций комплексного переменного.

Тема 2.6 Волновые движения сплошной среды

Линейная теория волн. Волновое уравнение. Бегущие волны. Собственные колебания. Волны на поверхности тяжелой несжимаемой идеальной жидкости. Стоячие волны. Прогрессивные волны. Характеристики системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Звуковые волны в сжимаемом газе. Нелинейные волны малой конечной амплитуды в вязком теплопроводном газе. Уравнение Бюргера. Установившееся сверхзвуковое обтекание тонкого профиля. Вывод волнового уравнения для потенциала скорости. Число Маха. Граничные условия. Взрывные волны. Задача о сильном взрыве в совершенном газе. Упругие волны в изотропной среде. Система уравнений линейной теории упругости в случае адиабатических процессов. Продольные и поперечные плоские волны. Волны Релея.

Тема 2.7 Модели пластических тел

Пластические деформации. Поверхность нагружения, текучести. Идеально-пластические тела с упрочнением. Условия пластичности Треска и Мизеса. Принцип минимума работы истинных напряжений на приращениях пластических деформаций. Ассоциированный закон. Полная система уравнений для упруго-идеально-пластической среды в теории Прандтля-Рейсса.

РАЗДЕЛ III. Сопротивление материалов и основы строительной механики

Тема 3.1 Растяжение, сжатие и кручение стержня

Продольная сила. Условия прочности при растяжении. Расчет простейших плоских стержневых систем. Напряжения и деформации при плоском напряженном состоянии. Кручение стержня круглого поперечного сечения. Крутящий момент. Условия прочности и жесткости при кручении. Кручение брусьев некруглого сечения.

Тема 3.2 Изгиб балки. Принцип возможных перемещений для вычисления перемещений при изгибе балок

Нормальные и касательные напряжения. Условие прочности. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Формула Максвелла-Мора для случая изгиба. Вычисление перемещения в общем случае нагружения бруса. Энергетические методы определения перемещений. Теорема Кастилиано. Интеграл Мора. Правило Верещагина.

Тема 3.3 Стержневые конструкции

Стержневые конструкции: фермы и рамы. Расчет статически неопределимых систем по методу сил. Канонические уравнения метода сил при изгибе балок и рам.

Тема 3.4 Устойчивость упругих стержней

Основы теории колебаний упругих систем. Устойчивость упругих стержней. Критическая сила.

РАЗДЕЛ IV. Численные методы механики сплошной среды

Тема 4.1 Линейные и нелинейные алгебраические уравнения и системы

Численное решение уравнений. Метод итераций, его сходимость. Метод Ньютона, его геометрический смысл. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Метод исключения. Метод итераций и теорема о сходимости. Методы численного решения систем нелинейных уравнений.

Тема 4.2 Разностные схемы и их применение

Численное решение ОДУ. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Разностные схемы для уравнений математической физики и механики. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Явные и неявные разностные схемы, условия их устойчивости. Метод прогонки.

Тема 4.3. Метод граничных элементов

Основные понятия теории граничных интегральных уравнений. Фундаментальные решения. Переход от уравнений в частных производных к интегральным уравнениям. Основные понятия метода граничных элементов. Численная дискретизация. Численное интегрирование. Граничные интегральные уравнения для основных типов краевых задач. Аппроксимация граничных функций и граничных уравнений. Дискретные уравнения метода граничных элементов. Компьютерная реализация метода граничных элементов применительно к основным задачам теории упругости. Метод граничных интегральных уравнений при решении задач гидродинамики. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма 2 рода. Квадратурные методы.

РАЗДЕЛ V. Компьютерная механика

Тема 5.1 Обзор аналитических и численных методов решения задач механики

Обзор современных прикладных систем автоматизированного инженерного анализа для персональных ЭВМ. Сравнительный анализ программных комплексов для конечно-элементного анализа механики систем на базе ПЭВМ: ansys, nastran, patran, dytran, ls-dyna, pro/engineer (pro/mechanica), catia, cosmos works (cosmos/m), solidworks, microstation, unigraphics, i-deas; пакетов кинематического и динамического анализа

механизмов adams, visualnastran, ansys workbench, working model, систем генерации инженерно-изобретательских идей invention machine, techoptimizer и др.

Тема 5.2 Основы метода конечных элементов и особенности его программной реализации для персональных ЭВМ

Основные понятия и определения метода конечных элементов, определение и свойства матриц жесткости, упругости, функций формы, градиентов. Вариационная формулировка метода конечных элементов в механике деформируемого твердого тела.

Тема 5.3 Решение практических задач конечно-элементного анализа с использованием компьютерных систем ansys, nastran

Исследование напряженно-деформированного состояния плоского уголкового кронштейна при статическом нагружении. Модальный анализ крыла самолета. Затвердевание слитка в форме уголка. Ламинарное и турбулентное течение в двумерном расширяющемся канале. Анализ напряженно-деформированного состояния консольной балки с особенностью. Расчет плоских ферм при статической нагрузке в узлах. Плоский изгиб балок. Расчет плоских рам при статической нагрузке и прямых стержней при кручении. Расчет стержней с криволинейной осью. расчет несимметричных балок переменного сечения и балок на упругом основании.

Тема 5.4 Пакеты кинематического и динамического анализа механизмов

Особенности использования систем компьютерного моделирования кинематики и динамики машин и механизмов Adams, VisualNastran, ANSYS WorkBench, Working Model. Динамический и кинематический анализ механических систем. Основы моделирования механических систем в пакете ADAMS. Решение практических задач анализа кинематики и динамики механических систем с использованием компьютерного пакета VisualNastran.

РАЗДЕЛ VI. Пакет Ansys

Тема 6.1 Анализ аналитических и численных методов решения задач механики

Обзор современных прикладных систем автоматизированного инженерного анализа для персональных ЭВМ. Сравнительный анализ программных комплексов для конечно-элементного анализа механики.

Тема 6.2 Метод конечных элементов и особенности его программной реализации для персональных ЭВМ

Решение практических задач конечно-элементного анализа с использованием компьютерной системы Ansys. Особенности использования

системы компьютерного моделирования кинематики и динамики машин и механизмов Ansys.

РАЗДЕЛ VII. Математические модели механики деформируемого твердого тела и основы механики разрушения

Тема 7.1 Основные группы механических характеристик материалов, основные типы механического поведения материалов

Классификация механических характеристик материалов. Основные типы механического поведения материалов (упругость, ползучесть, пластичность). Суть основных различий между упругими, пластическими, и реологическими моделями поведения среды. Неоднородность и анизотропия. Масштабный фактор этих свойств. Полные диаграммы деформирования и разрушения.

Тема 7.2 Характеристики напряженно-деформированного состояния деформируемого тела. Математические модели механического поведения деформируемых сред

Тензор напряжений. Главные нормальные и касательные напряжения. Относительные и абсолютные деформации. Тензор деформаций, тензор скоростей деформаций, вектор перемещений. Механический смысл деформаций. Связь вектора перемещений с тензором деформаций. Шаровая и девиаторная части тензора напряжений. Плоское напряженное состояние и плоское деформированное состояние. Понятие обобщенного напряженного состояния. Модели поведения среды. Структурные схемы. Упругая модель поведения среды. Упруго-пластические модели поведения среды. Условия пластичности. Вязко-упругие модели поведения среды. Ползучесть и релаксация, зависимость между ядрами ползучести и релаксации. Линейная наследственная теория ползучести. Абелево ядро ползучести. Уравнения предельного равновесия. Постановка модельных задач. Теории прочности и разрушения.

Тема 7.3 Решение различных типов задач МДТТ

Граничные задачи и подходы к решению задач теории упругости для тела, сформированного из кусочно-постоянных элементов. Решение задач для физически нелинейных упругих сред и для ортотропных упругих сред. Решение упругопластических задач методом дополнительных деформаций и методом дополнительных усилий. Решение задач для линейных наследственных вязкоупругих сред и задач вязкоупругости для неоднородных сред. Решение задач теории упругости неоднородных сред. Основные правила построения модельных задач. Постановка задачи определения НДС предварительно напряженного полупространства с системой подземных сооружений.

Тема 7.4 Построение математических моделей геомеханических процессов на основе методов МСС. Компьютерное моделирование в МДТТ.

Порядок построения расчетных схем для исследования НДС вокруг подземных сооружений. Особенности построения моделей и расчетных схем для больших и малых глубин. Системы разрешающих уравнений при рассмотрении массивов горных пород. Построение систем разрешающих уравнений при определении НДС массива в запредельном состоянии. Последовательность и примеры решения задач по определению НДС вокруг протяженных горизонтальных выработок с различным поперечным сечением. Решение задачи вертикальной выработки в однородном изотропном массиве. Основные подходы и принципы численного моделирования. Метод конечных элементов, методы интегральных уравнений, численно-аналитические и численно-экспериментальные методы.

МАТЕМАТИКА

РАЗДЕЛ I. Алгебра и теория чисел

Тема 1.1 Арифметика целых чисел

Делимость целых чисел и ее свойства. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида и запись НОД в виде целочисленной линейной комбинации. Взаимно простые числа, критерий взаимной простоты. Наименьшее общее кратное. Простые и составные числа, бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики.

Тема 1.2 Поле комплексных чисел

Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Комплексное сопряжение. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Тема 1.3 Многочлены

Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Степень многочлена и ее свойства. Теорема о делении с остатком для многочленов. Теорема Безу и следствия из нее. Неприводимые многочлены. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители. Значение многочлена в точке, корень многочлена. Кратность корня многочлена.

Тема 1.4 Матрицы и операции над ними

Понятие матрицы размера $m \times n$. Виды матриц: квадратная матрица, диагональная матрица, верхняя и нижняя треугольная матрица, единичная матрица, нулевая матрица, вектор-строка, вектор-столбец. Равенство матриц.

Операции над матрицами: сложение и умножение матриц, умножение матрицы на скаляр, транспонирование. Свойства операций над матрицами. Обратная матрица, критерий существования и методы ее вычисления.

Тема 1.5 Определители

Определители второго и третьего порядков. Определитель квадратной матрицы произвольного порядка и его свойства. Определитель транспонированной матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по строке и столбцу. Определитель произведения квадратных матриц.

Тема 1.6 Системы линейных уравнений

Матричная запись линейной системы. Теорема Кронекера–Капелли. Методы Гаусса и Крамера. Однородные системы, условие существования нетривиального решения. Фундаментальная система решений.

Тема 1.7 Векторные пространства

Определение и примеры. Система образующих, конечномерные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса. Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора.

Тема 1.8 Линейные отображения

Линейное отображение, его ядро и образ. Ранг и дефект. Алгебраические действия над линейными отображениями: сумма, умножение на константу, композиция. Линейный оператор и его матрица. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Матрица композиции и суммы линейных операторов.

Тема 1.9 Билинейные и квадратичные формы

Билинейная форма на векторном пространстве, ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса, ранг формы. Квадратичная форма и ее матрица. Канонический вид билинейной и квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Нормальный вид вещественной и комплексной квадратичных форм. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

Тема 1.10 Евклидовы пространства

Евклидовы пространства. Длина вектора. Неравенство Коши–Буняковского. Угол между векторами. Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональное дополнение к подпространству.

РАЗДЕЛ II. Аналитическая геометрия

Тема 2.1 Векторы

Понятие вектора в пространстве E^3 . Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов, базисы и аффинные реперы. Координаты векторов и точек, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

Тема 2.2 Аффинная геометрия

Уравнения прямых на плоскости E^2 , прямых и плоскостей в пространстве E^3 . Понятие аффинного пространства A^n , аффинные реперы в A^n . k -мерные плоскости в A^n , способы их задания, взаимное расположение двух плоскостей. Группы аффинных преобразований плоскости E^2 и пространства E^3 , аффинная геометрия.

Тема 2.3 Евклидовы пространства

Понятие евклидова точечного пространства E^n , ортогональность плоскостей в E^n . Расстояние между двумя плоскостями. Группы движений плоскости E^2 и пространства E^3 , евклидова геометрия.

Тема 2.4 Кривые и поверхности второго порядка

Эллипсы, гиперболы, параболы. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, цилиндры и конусы второго порядка в пространстве E^3 . Фигуры второго порядка в пространствах A^n и E^n .

РАЗДЕЛ III. Дифференциальная геометрия**Тема 3.1 Дифференциальная геометрия**

Понятие кривой. Натуральная параметризация кривой. Репер Френе. Формулы Френе. Кривизна и кручение кривой.

Понятие поверхности. Первая фундаментальная форма поверхности. Вторая фундаментальная форма поверхности. Нормальная кривизна поверхности. Полная и средняя кривизна. Типы точек на поверхности.

РАЗДЕЛ IV. Математический анализ**Тема 4.1 Множества и функции**

Понятие множества, отношения включения и равенства множеств, операции над множествами. Отношения, отношение эквивалентности. Общее понятие функции, образы и прообразы элементов и множеств. Композиция, сюръекция, инъекция, биекция, обратная функция. Мощност множества.

Тема 4.2 Числа и последовательности

Множество вещественных чисел, его важнейшие подмножества. Точные границы числовых множеств. Определение предела последовательности. Предел монотонной последовательности, число Эйлера. Критерий Коши сходимости последовательности. Различные формы полноты множества вещественных чисел. Частичные пределы последовательности, верхний и нижний пределы.

Тема 4.3 Функции одной переменной и ряды

Определение предела функции в точке. Пять замечательных пределов. Определение непрерывности функции в точке и на множестве. Основные теоремы о функциях непрерывных на отрезке (Вейерштрасса и Больцано-Коши). Понятие равномерной непрерывности, теорема Кантора. Определение

производной и дифференциала функции одной переменной, таблица производных. Основные теоремы о дифференцируемых функциях (Ферма, Лагранжа, Коши). Правила Лопиталя. Формула Тейлора с остатками Пеано и Лагранжа. Исследование функции с помощью производной (экстремумы, монотонность, выпуклость). Понятие первообразной и неопределенного интеграла, таблица интегралов. Определение интеграла Римана. Суммы Дарбу, критерий интегрируемости, классы интегрируемых функций. Формула Ньютона-Лейбница. Несобственные интегралы первого и второго рода. Понятие числового ряда. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Признаки сходимости положительных рядов (Даламбера, Коши, Раабе, Гаусса). Признаки Дирихле и Абеля. Ряд Фурье, условия сходимости ряда Фурье (в точке и равномерной). Свойства суммы функционального ряда (непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость).

Тема 4.4 Функции многих переменных

Понятие дифференцируемости функций многих переменных. Частные производные, производная по направлению, градиент и его геометрический смысл. Матрица Якоби. Теоремы о неявной и обратной функции. Экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие, достаточные условия существования экстремума.

Тема 4.5 Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Определение интеграла Римана на евклидовых пространствах. Определение криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода. Формула Грина.

РАЗДЕЛ V. Теория функций комплексного переменного

Тема 5.1 Аналитические функции

Производная функции комплексного переменного и ее геометрический смысл. Условия Коши-Римана. Аналитическая функция. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.

Тема 5.2 Степенные ряды и вычеты

Степенной ряд, радиус сходимости, формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Изолированные особые точки и их классификация. Основная теорема о вычетах.

РАЗДЕЛ VI. Теория вероятностей

Тема 6.1 Вероятность

Элементарное событие, случайное событие, пространство элементарных событий. Алгебра и σ -алгебра событий. Вероятностное пространство, вероятность. Классическое, конечное, дискретное, геометрическое вероятностные пространства. Условная вероятность, независимость событий. Схема Бернулли.

Тема 6.2 Случайные величины и независимость

Случайные величины и независимость. Случайная величина, ее функция распределения. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения, плотность распределения вероятностей, σ -алгебра, порожденная случайной величиной. Распределение вероятностей, независимость случайных величин.

Математическое ожидание, дисперсия, коэффициент корреляции. Характеристическая функция случайной величины.

Тема 6.3 Последовательности случайных величин

Последовательности случайных величин. Центральная предельная теорема, закон больших чисел, усиленный закон больших чисел.

РАЗДЕЛ VII. Дифференциальные уравнения

Тема 7.1 Основные понятия

Обыкновенные дифференциальные уравнения, поле направлений, решение, интегральная кривая, задача Коши.

Тема 7.2 Уравнения 1-го порядка

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, линейные, Риккати и в полных дифференциалах.

Тема 7.3 Системы и уравнения n -го порядка

Фундаментальная система решений однородных линейных дифференциальных уравнений n -го порядка. Метод вариации произвольных постоянных для неоднородных линейных дифференциальных уравнений n -го порядка.

Тема 7.4 Особые точки и устойчивость

Особые точки автономных систем: узел, седло, фокус, центр. Устойчивость решений по Ляпунову, функции Ляпунова.

РАЗДЕЛ VIII. Уравнения математической физики

Тема 8.1 Уравнения в частных производных

Классификация линейных уравнений в частных производных 2-ого порядка. Примеры уравнений основных типов. Постановка начальных и граничных задач. Решение задачи Коши для уравнения колебаний струны методом характеристик. Формула Даламбера. Решение смешанной задачи для уравнения колебаний струны методом Фурье. Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка граничных задач. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Функции Грина. Уравнение теплопроводности. Постановка основных задач. Задача Коши. Решение смешанных задач для уравнения теплопроводности методом Фурье.

ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ**Механика****Теоретическая механика**

1. Приведение произвольной системы сил к простейшему виду. Условия равновесия произвольной системы сил.
2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение. Равномерное и равнопеременное вращение.
3. Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек тела.
4. Движение твердого тела вокруг одной неподвижной точки. Скорости и ускорения точек тела.
5. Сложное движение точки. Теоремы о сложении скоростей и ускорений.
6. Общие теоремы динамики точки.
7. Прямолинейные колебания материальной точки.
8. Движение точки в поле центральных сил. Формулы Бине. Движение планет.
9. Закон всемирного тяготения.
10. Задача Ньютона. Искусственные спутники Земли.
11. Движение несвободной материальной точки. Плоский математический маятник.
12. Динамика относительного движения материальной точки. Относительный покой и относительное движение вблизи поверхности Земли.
13. Общие теоремы динамики системы.
14. Динамика точки переменной массы. Уравнение Мещерского.
15. Задача Циолковского.
16. Принцип возможных перемещений. Уравнение Даламбера-Лагранжа.
17. Уравнение Лагранжа 2-ого рода.
18. Канонические уравнения движения системы.
19. Устойчивость равновесия механической системы. Теорема Дирихле.
20. Вращение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси. Давление на ось.
21. Движение абсолютно твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Кинематические уравнения Эйлера.
22. Динамические уравнения Эйлера.

23. Общая постановка задачи о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки.
24. Первые интегралы. Проблема 4-го интеграла.
25. Элементарная теория гироскопа.
26. Принцип Гаусса.
27. Принцип Остроградского-Гамильтона.
28. Теория удара системы материальных точек.
29. Действие удара на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Центр удара.

Сопротивление материалов и основы строительной механики

30. Растяжение и сжатие стержня. Продольная сила. Условия прочности при растяжении.
31. Кручение стержня круглого поперечного сечения. Крутящий момент. Условия прочности и жесткости при кручении.
32. Изгиб балки. Нормальные и касательные напряжения. Условие прочности.
33. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки.
34. Энергетические методы определения перемещений. Теорема Кастилиано. Интеграл Мора. Правило Верещагина.
35. Канонические уравнения метода сил при изгибе балок и рам.
36. Устойчивость упругих стержней. Критическая сила.
37. Плоское напряженное состояние. Определение главных площадок и главных напряжений. Зависимости между линейными деформациями и нормальными напряжениями при плоском напряженном состоянии.
- 38. Прямой поперечный изгиб. Нормальные напряжения при чистом изгибе. Условие прочности при изгибе. Формула Журавского для определения касательных напряжений при поперечном изгибе.**
- 39. Потенциальная энергия упруго деформированного тела. Теорема Клайперона. Применение энергетического метода для определения обобщенных перемещений.**
40. Деформация кручения. Касательные напряжения при кручении бруса круглого поперечного сечения. Условие прочности при кручении.
41. Потеря устойчивости первого рода. Формула Эйлера для критической силы. Формула Ясинского. Критические напряжения. Гибкость стержня.
42. Динамические нагрузки и динамические напряжения. Ударные нагрузки. Динамические коэффициенты. Динамические напряжения.

Механика сплошной среды

43. Тензоры напряжений и деформаций.
44. Экстремальные свойства главных и касательных напряжений. Инварианты тензора напряжений.
45. Уравнения равновесия упругого тела в напряжениях.
46. Обобщенный закон Гука. Закон Гука для изотропного материала. Модуль упругости и коэффициент Пуассона, их связь с постоянными Ляме.
47. Уравнения Ламе движения упругого тела в перемещениях
48. Восстановление вектора перемещений по заданным компонентам деформаций. Уравнения совместности деформаций
49. Постановка задач теории упругости в компонентах перемещений и напряжений.
50. Свойство упругого равновесия изотропного тела при отсутствии массовых сил
51. Плоские деформированное и напряженное состояния. Метод функций Эйри при решении плоских задач в случае отсутствия объемных сил.
52. Кручение призматических стержней произвольного постоянного поперечного сечения.
53. Вариационные принципы в теории упругости. Принцип возможных перемещений Лагранжа. Принцип возможных сил Кастильяно.
54. Модель идеальной жидкости. Интегралы уравнений движения идеальной жидкости.
55. Плоское обтекание кругового цилиндра потоком идеальной жидкости.
56. Гравитационные волны в идеальной жидкости.
57. Модель вязкой жидкости. Уравнение Навье-Стокса. Граничные условия.
58. Слоистые течения. Течения Пуазейля и Куэтта. Течение под действием силы тяжести.
59. Основы теории пограничного слоя. Уравнения Прандтля. Задача Блазиуса.
60. Опыт Рейнольдса. Понятия об устойчивости течения и турбулентности.
61. Модель идеального совершенного газа. Граничные условия.
62. Одномерные стационарные течения газа. Интеграл Бернулли для адиабатических течений совершенного газа.
63. Течения газа в сопле Лавалья и простом сопле.
64. Теория звука. Волновое уравнение.
65. Одномерные нестационарные течения газа и их характеристики.

- 66. **Поверхности разрыва внутри идеальных сжимаемых сред. Адиабата Гюгонио.**
- 67. Задача о сильном взрыве в газе.
- 68. **Двумерное стационарное движение газа. Уравнение Чаплыгина.**
- 69. Трансзвуковые течения. Уравнение Эйлера–Трикоми. Особенности сверхзвукового обтекания тел.

Математические модели механики деформируемого твердого тела и основы механики разрушения

- 70. **Фундаментальные решения теории упругости.**
- 71. Ползучесть и релаксация. Математические модели реологических тел.
- 72. **Принцип Вольтера решения задач линейной вязкоупругости.**
- 73. Задачи теории пластичности и упруго-пластичности. Условия пластичности.
- 74. **Математические модели и постановка задач теории малых упругопластических деформаций.**
- 75. Условия прочности. Предельные поверхности. Критерии разрушения.

Численные методы механики сплошной среды

- 76. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Метод исключения. Метод итераций и теорема о сходимости.
- 77. **Численное решение ОДУ в механике. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности.**
- 78. Разностные схемы для уравнений математической физики и механики. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Явные и неявные разностные схемы, условия их устойчивости. Метод прогонки.
- 79. Основные принципы метода конечных разностей.
- 80. Основные принципы метода конечных элементов.
- 81. Основные принципы метода граничных элементов.

Компьютерная механика/ Пакет Ansys

- 82. **Математические основы метода конечных элементов.**
- 83. **Математические формулировки основных задач компьютерной механики (исследование НДС, собственных колебаний, устойчивости, вынужденных колебаний, разрушения, задач гидро- и газодинамики).**
- 84. Основные этапы компьютерного моделирования и решения задач механики.
- 85. Виды граничных условий и внешних нагрузок и их учет в задачах компьютерной механики.

86. Типовые конечные элементы. Правила генерации конечно-элементной сетки и сходимость решений.

МАТЕМАТИКА

Алгебра и теория чисел

1. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
2. Матрицы и операции над ними. Виды матриц. Обратная матрица, критерий существования и методы ее вычисления.
3. Определители, их основные свойства. Теорема Лапласа. Разложение определителя по элементам строки (столбца).
4. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Методы Гаусса и Крамера. Системы однородных линейных уравнений.
5. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность, координаты вектора. Матрица перехода от одного базиса к другому.
6. Линейное отображение векторных пространств, его ядро и образ. Матрица линейного оператора. Матрица суммы и произведения линейных операторов. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора.

Аналитическая геометрия

1. Векторы в пространстве E^3 , скалярное, векторное и смешанное произведения.
2. Уравнения прямых на плоскости E^2 , прямых и плоскостей в пространстве E^3 .
3. Эллипс, гипербола, парабола, их уравнения и свойства.
4. Классификация кривых второго порядка на плоскости E^2 .
5. Понятие аффинного пространства A^n , примеры. Плоскости в A^n , их уравнения и взаимное расположение.
6. Понятие евклидова точечного пространства E^n . Ортогональность плоскостей в E^n . Расстояние от точки до плоскости.

Дифференциальная геометрия

1. Кривые и поверхности. Примеры, способы задания и основные дифференциально-геометрические характеристики.

Математический анализ

1. Множество вещественных чисел. Важнейшие подмножества в R и их мощность. Теорема Кантора о несчетности множества вещественных чисел.

2. Числовые множества и их границы. Теорема Дедекинда о существовании точных границ.
3. Предел последовательности и его свойства (единственность, операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах). **Теорема о пределе монотонной последовательности.** Число Эйлера.
4. Критерий Коши сходимости последовательности. Предельная точка множества в R , лемма Больцано-Вейерштрасса. Теорема Кантора о стягивающейся последовательности отрезков. Лемма Бореля-Лебега о покрытиях отрезка интервалами.
5. Предел функции в точке и непрерывность. Основные теоремы о непрерывных функциях (две теоремы Больцано-Коши, две **теоремы Вейерштрасса**).
6. Производная и дифференцируемость, правила дифференцирования. Производная композиции, производная обратной функции.
7. Теоремы Ферма, Ролля, **Лагранжа (о конечных приращениях)**, Коши (об отношении приращений).
8. **Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей.**
9. Формула Тейлора с остатками в форме Пеано и Лагранжа.
10. Определение интеграла Римана для функций одной переменной. Необходимое условие интегрируемости. Суммы Дарбу и их свойства, критерий интегрируемости. Классы интегрируемых функций.
11. Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом. **Существование первообразной для непрерывной функции, формула Ньютона-Лейбница.** Интегрирование по частям и замена переменных в определенном интеграле.
12. Понятие числового ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды. Критерий Коши сходимости числовых рядов. Признаки сходимости положительных рядов (Коши с корнем, Даламбера, Гаусса).
13. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. **Признаки Дирихле и Абеля.**
14. Функциональные ряды и последовательности. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле для равномерной сходимости.
15. Интегральные представления частичных сумм тригонометрического ряда Фурье. Лемма Римана-Лебега. Принцип локализации. Условия сходимости рядов Фурье (в точке и равномерной).
16. Дифференцируемость и частные производные функции многих переменных, производная по направлению, градиент. Производные высших порядков, теорема Шварца о равенстве смешанных производных.
17. Локальные экстремумы функций одной и многих переменных. Необходимые условия и достаточные условия локального экстремума функции.
18. Мера и интеграл Римана в R^n . Сведение интеграла к повторному (теорема Фубини), замена переменной в кратном интеграле.

19. Криволинейные интегралы и их основные свойства. Формула Грина.

Теория функций комплексного переменного

1. Степенные ряды. Формула Коши-Адамара. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора. Свойства аналитических функций.
2. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Изолированные особые точки и их классификация.
3. Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах. Вычет в бесконечно удаленной точке. Теорема о полной сумме вычетов.

Теория вероятностей

1. Числовые характеристики случайных величин – математическое ожидание, дисперсия, коэффициент корреляции и их свойства.
2. Критерии независимости случайных величин (дискретный, абсолютно непрерывный).
3. Законы больших чисел.

Дифференциальные уравнения

1. Критерий уравнения в полных дифференциалах.
2. Базис пространства решений линейного дифференциального уравнения n -го порядка.
3. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений.
4. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Колебательный характер решений.
5. Линейные уравнения в частных производных первого порядка. Задача Коши. Схема её решения.
6. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.

Уравнения математической физики

1. Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
2. Решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний струны. Формула Даламбера.
3. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.
4. Теоремы единственности решения задачи Коши и первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.
5. Основные краевые задачи для уравнения Пуассона.
6. Свойства гармонических функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аппель П. Теоретическая механика: В 2-х т.-М.: Физматгиз, 1960.
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: В 2-х ч. М.: Наука, 1972.
3. Вильке В.Г. Теоретическая механика. М.: Изд-во МГУ, 1991.
4. Мещерский Н.Д. Сборник задач по теоретической механике. М., Наука, 1970.
5. Петкевич В.В. Теоретическая механика. М.: Наука, 1981.
6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Наука, 1976
7. Айзенберг Т.Б. Руководство к решению задач по теоретической механике. М.: Наука, 1968.
8. Седов Л.И. Механика сплошной среды – М.: Наука. 1970, Т.1. – 492 с.; Т.2. – 568с.
9. Безухов, Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести – М.: Высшая школа, 1968. – 784с.
10. Амензаде Ю. А. Теория упругости – М.: Высшая школа, 1976. – 272с.
11. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Т.1,2. М: Физматгиз, 1963.
12. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.:Наука, 1989.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидромеханика. М.:Наука, 1986.
14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.:Наука, 1986.
15. Шкадов В.Я. Течения вязкой жидкости. М.: Изд. МГУ, 1984.
16. Механика сплошных сред в задачах. Под ред. М.Э. Эглит. Т. 1,2. М.: Московский лицей, 1996.
17. Новацкий, В. Теория упругости – М.: Мир, 1975. – 872с.
18. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела – М.: Наука, 1977. – 416с.
19. Тимошенко С.П., Дж. Гудьер Теория упругости – М.: Наука, 1979. – 560с.
20. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел – М.: МГУ, 1976. – 368с.
21. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности – М.: Физматлит, 2001. – 704с.
22. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести – М.: Машиностроение, 1968. – 400с.
23. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды – М.: Наука, 2000. – 214с.
24. Ключников, В. Д. Математическая теория пластичности / В. Д. Ключников. – М.: МГУ, 1979. – 206с.
25. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела – М.: Наука, 1979. – 744с.
26. Горшков А.Г., Э. И. Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности – М.: Физматлит, 2002. – 416с.

27. Старовойтов Э.И. Сопротивление материалов – М.: Физматлит, 2008. – 384с.
28. Качанов Л.М. Основы механики разрушения – М.: Наука, 1974.
29. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения – М.: Наука, 1974. – 640 с.
30. Хеллан, Коре. Введение в механику разрушения – М: Мир, 1988. – 364с.
31. Крауч С., Старфилд А. Метод граничных элементов в механике твердого тела – Москва: Мир, 1987.
32. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов – М.: Мир, 1987. – 524с.
33. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости – Санкт-Петербург: Наука, 1999. – 382 с.
34. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
35. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. – М.: Недра, 1987. – 220 с.
36. Теоретическая механика в примерах и задачах / Вярвьильская О.Н., Медведев Д.Г., Савенков В.А., Савчук В.П.; под общ. ред. Медведева Д.Г. – Минск: БГУ, 2014. – 396с.
37. Савчук В.П., Медведев Д.Г., Вярвьильская О.Н. Теоретическая механика. Классическое университетское издание. – Минск, БГУ, 2016. – 232с.
38. Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах. – Мн.: БГУ, 2002. – 456с.
39. Механика сплошной среды. Криволинейные брусья, пластины и оболочки: курс лекций / Громько А.О., Громько О.В., Журавков М.А., Медведев Д.Г.; под общ. ред. М.А. Журавкова – Мн.: БГУ, 2005. – 364с.
40. Гляков С.А., Громько О.В., Журавков М.А., Медведев Д.Г. Компьютерная механика. Динамический и кинематический анализ механических систем: курс лекций / под ред. М.А. Журавкова. – Мн.: БГУ, 2006. – 375с.
41. Журавков М.А. Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований. Курс лекций. – Минск: БГУ, 2008. – 247с.
42. Журавков М.А., Коновалов О.Л., Богдан С.И., Прохоров П.А., Круподеров А.В. Компьютерное моделирование в геомеханике / Под общ. ред. М.А. Журавкова. – Мн. БГУ, 2008. – 443с.
43. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности. Классическое университетское издание. – Минск: БГУ, 2011 – 543с.
44. Computer Mechanics: Introduction to FEA and CAD/CAE Systems: lecture course / Громько О.В., Журавков М.А., Медведев Д.Г., Гляков С.А., Громько А.О., Громько А.О., Царева А.А.; под общ. ред. проф. М.А. Журавкова. – Минск: БГУ, 2011. – 303с.

45. Сопротивление материалов. Курс лекций: пособие / О.В. Громыко, М.А. Журавков, Д.Г. Медведев, Ан.О. Громыко, Ал.О. Громыко; под общ. ред. М.А. Журавкова. – Минск: БГУ, 2013. – 535с.
46. Журавков М.А., Круподеров А.В., Щербаков С.С. Гранично-элементное моделирование в механике. Учебное пособие для обучающихся по специальности «Механика и математическое моделирование». – Минск: БГУ, 2014. – 174с.
47. Никольский С.М. Курс математического анализа. - М., Наука, Т.1,2 - 1983 и др. издания.
48. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М., Наука - 1969 и др. издания.
49. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М., Наука - 1977 и др. издания.
50. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Вышэйшая школа, 1974.
51. Федорюк М.В. Обыкновенных дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1985.
52. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1992.
53. Тихонов, Самарский Уравнения математической физики. М., Наука, 1989.
54. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
55. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1988.
56. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. -М.: Наука, 1999.