Белорусская республиканская студенческая олимпиада по математике

15 мая 2018 г.

1. По набору вещественных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ строится новый набор

$$\begin{aligned}
&b_1 = \sigma_1(a_1, a_2, ..., a_n) = a_1 + a_2 + ... + a_n,\\
&b_2 = \sigma_2(a_1, a_2, ..., a_n) = a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_{n-1}a_n,\\
&...\\
&b_n = \sigma_n(a_1, a_2, ..., a_n) = a_1a_2...a_n.
\end{aligned}$$

Затем по $b_1, b_2, ..., b_n$ строится набор

$$c_1 = \sigma_1(b_1, b_2, ..., b_n), c_2 = \sigma_2(b_1, b_2, ..., b_n), ..., c_n = \sigma_n(b_1, b_2, ..., b_n), \text{ и т.д.}$$

Могут ли все числа некоторой итерации оказаться положительными, если среди чисел исходного набора $a_1, a_2, ..., a_n$ есть отрицательные?

2. Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – арифметическая прогрессия, состоящая из положительных чисел. Найти

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(a_1a_2...a_n)^{1/n}}{(a_1 + a_2 + ... + a_n)/n}.$$

3. Обозначим через A_n множество целочисленных матриц $n \times n$, все диагональные элементы которых $a_{ii} = 0$, а внедиагональные $a_{ij} \in \{-1, +1\}$. При каких натуральных n множество A_n содержит вырожденные матрицы?

4. Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет для каждого $x \in \mathbb{R}$ неравенству $xf(x) \geq \int\limits_0^x f(t)dt$. Докажите, что функция $g : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt$ не убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, +\infty)$.

5. Пусть $k \geq 2$ – целое число. Докажите, что любой граф с $n \geq k+1$ вершинами и не менее чем $(k-1)(n-k-1) + C_{k+1}^2$ ребрами содержит подграф, минимальная степень вершин которого равна k.

6. Пусть a, b, c, d – действительные числа. Какое минимальное значение принимает выражение $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ при условии, что $ad - bc = 1$?

Решения

1. *Ответ.* Не могут.

Если $\sigma_1(d_1, d_2, ..., d_n) > 0, ..., \sigma_n(d_1, d_2, ..., d_n) > 0$, то $d_1, d_2, ..., d_n > 0$. Чтобы это показать, заметим, что $\sigma_i(d_1, d_2, ...d_n)$ – коэффициенты многочлена

$$P(x) = (x + d_1)(x + d_2)...(x + d_n).$$

Если все коэффициенты вещественного многочлена положительны, то у него нет корней на $[0, +\infty)$. Значит, все его корни, т.е. $-d_1, -d_2, ..., -d_n$, отрицательны. Это означает, что $d_1, d_2, ..., d_n > 0$.

2. 1) Если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_1+...+b_n}{n} = b$.

2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1...b_n n} = b$.

Это утверждение доказывается применением 1) к последовательности $\ln b_n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln b_1 + ... + \ln b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln b_n = \ln b \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1...b_n} = b.$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot ... \cdot \dfrac{b_2}{b_1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{b_n}{b_1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}.$

Пусть теперь $b_n := \dfrac{n^n(a_1...a_n)}{(a_1 + ... + a_n)^n}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Но

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)a_{n+1}}{a_1 + ... + a_{n+1}} \left(\frac{(a_1 + ... + a_n)/n}{(a_1 + ... + a_{n+1})/(n+1)}\right)^n = \frac{2a_{n+1}}{a_1 + a_{n+1}} \left(\frac{2a_1 + (n-1)d}{2a_1 + nd}\right)^n \to 2e^{-1},$$

где $d > 0$ – разность прогрессии.

Ответ. $2e^{-1}$.

3. Пусть n нечетно. Рассмотрим любую кососимметричную матрицу $A \in A_n$. Имеем

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A.$$

Таким образом, $\det A = 0$.

Пусть теперь n четно. Рассмотрим матрицы по модулю 2. При этом различие между $+1$ и -1 исчезнет. Имеем

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det(A^2) \neq 0.$$

Диагональные элементы A^2 являются суммами n элементов, из которых в точности один – нуль, а остальные $(n-1)$ равны 1, т.е. это 1 по модулю 2. Внедиагональные элементы A^2 являются суммами двух нулей и $(n-2)$ единиц, т.е. это 0 по модулю 2. Следовательно, $\det(A^2)$ – это всегда единица по модулю 2, и множество A_n не содержит вырожденных матриц.

Ответ. Искомое множество состоит из нечетных натуральных чисел.

4. Рассмотрим функцию $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Утверждение вытекает их неравенства

$$\left(\frac{F(x)}{x}\right)' = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2} \geq 0.$$

5. Доказательство проведём индукцией по числу n вершин графа.

Базис индукции: $n = k+1$. В этом случае граф G содержит не менее чем

$$(k-1)(k+1-k-1) + C_{k+1}^2 = C_{k+1}^2$$

рёбер. Следовательно, граф G является полным графом на $n = k+1$ вершинах и имеет минимальную степень, равную k. Поскольку любой граф является подграфом самого себя, утверждение для $n = k+1$ доказано.

Предположение индукции: любой граф с $n-1 > k+1$ вершинами и не менее чем $(k-1)(n-1-k-1) + C_{k+1}^2$ рёбрами содержит подграф, минимальная степень вершин которого равна k.

Шаг индукции: G – граф с n вершинами и не менее чем $(k-1)(n-k-1)+C_{k+1}^2$ рёбрами. Покажем, что G содержит подграф, минимальная степень вершин которого равна k. Если минимальная степень вершин графа G равна k, то доказывать нечего. Если же все степени вершин графа G строго больше k, то граф G очевидно содержит подграф с минимальной степенью вершин k. Действительно, если v – вершина минимальной степени в графе G и $\deg_G v > k$, то граф, который получается из G удалением $\deg_G v - k$ рёбер, инцидентных вершине v, является подграфом графа G и имеет минимальную степень, равную k. Осталось рассмотреть случай, когда граф G содержит вершину v, для которой $\deg_G v \leq k-1$. В этом случае граф $G' = G - v$, получаемый из графа G удалением вершины v и всех инцидентных ей рёбер, имеет $n-1$ вершин и $|E(G)| - \deg_G v$ рёбер, где $|E(G)|$ – число рёбер графа G. Таким образом, для числа $|E(G')|$ рёбер графа G' имеем

$$|E(G')| = |E(G)| - \deg_G v > (k-1)(n-k-1) + C_{k+1}^2 - (k-1) = (k-1)(n-1-k-1) + C_{k+1}^2.$$

Следовательно, по предположению индукции граф G' содержит подграф H', минимальная степень вершин которого равна k. В то же время G' является подграфом графа G и, значит, H' – подграф графа G. Доказательство завершено.

6. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \operatorname{tr}(AA^T) \to \min \text{ при условии } \det(AA^T) = 1.$$

Поскольку матрица (AA^T) симметрична, то в некотором базисе она принимает диагональный вид. В силу равенства $\det(AA^T) = 1$ на диагонали стоят взаимно обратные числа λ и $1/\lambda$. В силу того, что матрица (AA^T) положительно определенная, $\lambda > 0$. Поэтому

$$\operatorname{tr}(AA^T) = \lambda + 1/\lambda \geq 2.$$

Равенство достигается при $a = d = 1$, $b = c = 0$.