

«МОН-2018»
XI олимпиада по математике
среди студентов нематематических специальностей БГУ
27 апреля 2018 г.

Задача 1. Найдите все рациональные члены разложения $\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$.

Ответ: «запись ответа с точностью до факториала», так как пользоваться калькуляторами при решении задач по Положению олимпиады запрещено

$$T_2 = C_{20}^2 \cdot 32 = \frac{20!}{2!18!} \cdot 32, \quad T_8 = C_{20}^8 = \frac{20!}{8!12!}, \quad T_{14} = C_{20}^{14} \cdot \frac{1}{32} = \frac{20!}{14!6!} \cdot \frac{1}{32},$$
$$T_{20} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}.$$

Задача 2. Шесть студентов-биологов располагаются в вершинах правильного шестиугольника, в центре симметрии которого находится редкий жук. Доцент посоветовал студентам поймать жука, двигаясь в каждый момент времени строго в направлении местоположения жука. Отношение скорости движения жука к скорости движения студентов равно 5:4. Укажите и обоснуйте возможную траекторию движения жука, при которой он может избежать коллекции.

Ответ: возможная траектория движения жука, при которой он может избежать коллекции, есть луч из центра симметрии правильного шестиугольника, проходящий через середину любой стороны данного шестиугольника.

Задача 3. В ювелирном магазине создается новый интерьер, важным элементом которого является система плоских зеркал. Напишите уравнение плоскости, в которой располагается одно из зеркал, если известно, что луч света от источника, находящегося в точке $A(3; -3; 7)$, отразившись от поверхности этого зеркала в точке $B(-1; 1; 0)$, проходит через точку $C(-3; 0; 2)$. Влияние других зеркал на этот эффект отсутствует.

Ответ: $-2x - 7y + 13z + 5 = 0$.

Задача 4. Вычислите предел $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2(x) \right)$.

Ответ: $L = \frac{2}{3}$.

Задача 5. Найти наименьшее $n \in \mathbb{N}$, при котором верно равенство

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = 2^n \cdot (A - B)^n, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ: 6.

Задача 6. При обследовании двух одинаковых по численности групп мужчин и женщин, нарушавших таможенный режим, было установлено, что среди мужчин 5% дальтоников, а среди женщин – 0,25%. Найти вероятность того, что наугад выбранный нарушитель: а) страдает дальтонизмом; б) является мужчиной, если известно, что нарушитель страдает дальтонизмом.

Ответ: а) $\frac{21}{800}$; б) $\frac{20}{21}$.

~~~~~  
\* Максимальный балл за каждую задачу равен 10 баллам.

\*\* Решения задач следует сдавать на отдельных листах с указанием номера задачи.

\*\*\* При выполнении заданий олимпиады запрещено пользоваться калькуляторами и всеми другими электронными устройствами.