# Студенческая олимпиада по математике Белорусского государственного университета 2004 год

1. Показать, что для всех достаточно больших $n$ справедливо неравенство

$$\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{(2n+1)^3}}\right\}>\frac{1}{2},$$

где $\{\cdot\}$ - дробная часть числа.

2. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_0=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+2}$.

Найдите $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{2^k}$

3. Пусть $x$=0 – асимптотически устойчивое решение для линейных стационарных систем $\frac{dx}{dt}=Ax$ и $\frac{dx}{dt}=Bx$. Докажите, что $x$=0 – асимптотически устойчивое решение и для системы $\frac{dx}{dt}=(A+B)x$, если $AB=BA$.

4. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ — $n$ точек в $\mathbf{R}^N$, $D=\max_{i,j}\rho(A_i,A_j)$, $d=\min_{i,j}\rho(A_iA_j)$.

Докажите неравенство $\frac{D}{d}>\frac{\sqrt[N]{n}-1}{2}$..

5. Пусть $M_{n^2}$ – множество $n^2$- значных чисел, $M=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}M_{n^2}$. Функция $f:M\to\mathbf{Z}$, каждому $n^2$- значному числу $\overline{a_{n^2-1}a_{n^2-2}...a_1a_0}$ ставит в соответствие определитель

$$\begin{vmatrix} a_{n^2-1} & a_{n^2-2} & \cdots & a_{n^2-n} \\ a_{n^2-n-1} & a_{n^2-n-2} & \cdots & a_{n^2-2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix}.$$

Найдите $\sum_{a\in M}f(a)$.

6. Существует ли последовательность непрерывных функций $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такая, что для любого иррационального $x$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ и для каждого рационального $x$

а) $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=+\infty$;

б) последовательность $f_n(x)$ ограниченная и расходящаяся ?