Олимпиада БГУ по математике

19.04.2008.

Решения.

Задача 1. Ответ: a для $a > 1$, и 1 для $a < 1$.

Поскольку $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$, то требуемый предел равен $\lim_{x\to+\infty}(\frac{a^x-1}{a-1})^{1/x}$. При $a > 1$ имеем равенства $\lim_{x\to+\infty}(a^x - 1)^{1/x} = a, \lim_{x\to+\infty}(a - 1)^{1/x} = 1$. При $a < 1$ получаем $\lim_{x\to+\infty}(1 - a^x)^{1/x} = \lim_{x\to+\infty}(1 - a)^x = 1$.

Задача 2. а) Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Отметим, что из равенства $AA^T = E$ следует, что $\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 1$ для всех j от 1 до n. Поэтому $a_{ii}^2 \leqslant 1$, и, стало быть, $|a_{ii}| \leqslant 1$. Значит, $|\operatorname{tr}(A)| = |\sum_{i=1}^n a_{ii}| \leqslant \sum_{i=1}^n |a_{ii}| \leqslant n$.

б) Отметим, что матрица A обратима, обратная матрица дается формулой $A^{-1} = A^T$. Поэтому равенство $\det(A^2 - E) = 0$ эквивалентно $0 = \det(A^{-1}(A^2 - E)) = \det(A - A^T)$. Но $(A - A^T)^T = A^T - A$, откуда $\det((A - A^T)^T) = (-1)^n \det(A - A^T)$. Поскольку определитель не меняется при транспонировании, получаем, что $\det(A - A^T) = 0$.

Задача 3. Доказательство формулы для T_n следует из формулы включений и исключений: если $A_1, \ldots, A_n$ – конечные подмножества в некотором множестве X, то

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{i_1<i_2\ldots<i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

Чтобы доказать равенство для T_n достаточно в качестве X взять множество всех перестановок $a_1, \ldots, a_n$, а в качестве $X_i, i = \overline{1, n}$, – его подмножество, состоящее из всех, перестановок $a_1, \ldots, a_n$ с $a_i = i$. Тогда пересечение любых k из A_i имеет мощность $(n - i)!$. Получаем

$$n! - T_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k (n - k)! = n!(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}).$$

Задача 4. Нам надо доказать, что

$$C := \int_0^1 xf(x)^2 dx \cdot \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 xf(x)dx \cdot \int_0^1 f(x)^2 dx \leqslant 0.$$

Отметим, что

$$C = \iint_I xf(x)^2 f(y) - xf(x)f(y)^2 dxdy = \iint_I xf(x)f(y)(f(x) - f(y))dxdy,$$

где через I обозначен квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$. Аналогично,

$$C = \iint_I yf(y)^2 f(x) - yf(y)f(x)^2 dxdy = \iint_I yf(x)f(y)(f(y) - f(x))dxdy.$$

Складывая два получившихся равенства, получаем

$$2C = \iint_I f(x)f(y)(x-y)(f(x)-f(y))dxdy.$$

Заметим, что, по условию, $f(x)f(y) > 0, (x-y)(f(x)-f(y)) \leqslant 0$. Таким образом, подинтегральная функция неположительна, а значит, и весь интеграл неположителен.

Задача 5. Положим $d = \det(B)$. Поскольку $BA^nB^{-1} = B(A^n - E)B^{-1} + E$, то, принимая во внимание формулу для обратной матрицы, достаточно показать, что все коэффициенты матрицы $A^n - E$ делятся на d при некотором n. Обозначим через $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ (соотв., $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$) группу матриц с целыми коэффициентами, для которых обратная матрица также имеет целые коэффициенты (соотв., группу матриц с коэффициентами в $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, у которых найдется обратная матрица). Рассмотрим гомоморфизм $\pi : \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ редукции по модулю d (m – размер матриц). Отметим, что группа $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ конечна. Отсюда следует, что найдется натуральное число n, для которого $\pi(A^n) = \pi(E)$ (например, равное порядку группы $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$). Но это и значит, что все коэффициенты в $A^n - E$ кратны d.

Задача 6. Для того, чтобы двойная сумма имела смысл нужно, чтобы

$$\lim_{q\to+\infty} |\sum_{k=1}^{q} e^{2\pi ikz/q}| \to 0.$$

Если z не целое, то

$$\lim_{q\to+\infty} |\sum_{k=1}^{q} e^{2\pi ikz/q}| = \lim_{q\to+\infty} |e^{2\pi iz/q} \frac{1-e^{2\pi iz}}{1-e^{2\pi iz/q}}| = \frac{|1-e^{2\pi iz}|}{|1-e^{2\pi iz/q}|}.$$

Числитель последней дроби отличен от 0, а знаменатель стремится к $+\infty$. Таким образом, z – целое.

Покажем теперь, что $\sum_{k=1}^{q} e^{2\pi in/q} = q$, если q делится на n, и 0 иначе. Первый случай очевиден. В противном случае, пусть $d = \text{НОД}(n,q), n' = n/d, q' = q/d$. Числа $e^{2\pi in/q}$ суть корни степени q' из единицы, каждый встречается d раз. Но, по формуле Виета, сумма всех корней степени q' из 1 равна 0.

Таким образом, нужно найти все целые решения уравнения

$$\sum_{q=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{q} e^{2\pi ikn/q} = \sum_{q|n, q\geqslant 2} q = n.$$

Ясно, что второе равенство справедливо в точности для простых чисел n.