Студенческая олимпиада БГУ по математике (2011 г.)

1. Функция $f \in C^3([a,b])$ в четырех различных точках обращается в нуль. Доказать, что существует точка $x_0 \in [a,b]$, в которой справедливо равенство
$$f'''(x_0) - f(x_0) = 3(f''(x_0) - f'(x_0)).$$

2. Последовательность (a_n) убывает, ее предел равен 0 и $b_n \geq 0$ для любого n, где $b_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n$ сходится и найти его сумму.

3. Доказать, что каждое положительное рациональное число можно представить в виде конечной суммы различных членов гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

4. Функция $f \in C([a,b])$ и $\int\limits_a^b x^n f(x)dx = 0$, $\forall n = 1, 2, \ldots$. Доказать, что $f = 0$.

5. Пусть $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 0$ и алгебраические дополнения $A_{ij} = a_{ij}^2$ $\forall i, j = 1, 2, 3$. Доказать, что $a_{ij} = 0$ $\forall i, j = 1, 2, 3$,

6. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей. Элемент $a \in A$ называется идемпотентным, если $a \neq 0$ и $a^2 = a$, и нильпотентным, если $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

   а) Проверить, что множество $I \subset A$ всех нильпотентных элементов является идеалом.

   б) Пусть элемент $\overline{a} = a + I$ из $\overline{A} = A/I$ является идемпотентным. Показать, что существует такой многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}(x)$, для которого $f(a)$ индемпотентен в A, причем $f(a) \equiv a(\mod I)$.

Студенческая олимпиада БГУ по математике (2011 г.)

1. Функция $f \in C^3([a,b])$ в четырех различных точках обращается в нуль. Доказать, что существует точка $x_0 \in [a,b]$, в которой справедливо равенство
$$f'''(x_0) - f(x_0) = 3(f''(x_0) - f'(x_0)).$$

2. Последовательность (a_n) убывает, ее предел равен 0 и $b_n \geq 0$ для любого n, где $b_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n$ сходится и найти его сумму.

3. Доказать, что каждое положительное рациональное число можно представить в виде конечной суммы различных членов гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

4. Функция $f \in C([a,b])$ и $\int\limits_a^b x^n f(x)dx = 0$, $\forall n = 1, 2, \ldots$. Доказать, что $f = 0$.

5. Пусть $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 0$ и алгебраические дополнения $A_{ij} = a_{ij}^2$ $\forall i,j = 1,2,3$. Доказать, что $a_{ij} = 0$ $\forall i,j = 1,2,3$,

6. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей. Элемент $a \in A$ называется идемпотентным, если $a \neq 0$ и $a^2 = a$, и нильпотентным, если $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

   а) Проверить, что множество $I \subset A$ всех нильпотентных элементов является идеалом.

   б) Пусть элемент $\overline{a} = a + I$ из $\overline{A} = A/I$ является идемпотентным. Показать, что существует такой многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}(x)$, для которого $f(a)$ индемпотентен в A, причем $f(a) \equiv a(\mod I)$.