Студенческая олимпиада БГУ по математике

22 апреля 2014 г.

1. Функция вещественного переменного f определена и дифференцируема для всех $x \geq 1$ и удовлетворяет условиям $f(1) = 1$ и $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + f^2(x)}$.

Докажите, что существует $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \alpha$, причем $\alpha < 1 + \pi/4$.

Решение. Так как $f' > 0$, то f возрастает и для $t > 1$ имеем $f(t) > f(1) = 1$. Следовательно, для $t > 1$ $f'(t) = \dfrac{1}{t^2 + f^2(t)} < \dfrac{1}{t^2+1}$. Тогда

$$f(x) = 1 + \int\limits_1^x f'(t)dt < 1 + \int\limits_1^x \frac{1}{t^2+1}dt < 1 + \int\limits_1^\infty \frac{1}{1+t^2}dt = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Неравенство строгое, так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 + \int\limits_1^\infty f'(t)dt < 1 + \int\limits_1^\infty \dfrac{1}{t^2+1}dt = 1 + \dfrac{\pi}{4}$.

2. Дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(2013) = 2013$ и $f(2014) = 2014$. Докажите, что

а) существует такая точка $\theta \in (2013, 2014)$, что $f(\theta) = \theta f'(\theta)$;

б) существуют две различные точки $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, такие, что $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

Решение. а) Дифференцируемая функция $g(x) := \frac{f(x)}{x}$ такова, что $g(2013) = g(2014) = 1$. По теореме Ролля существует $\theta \in (2013, 2014)$, такое, что $g'(\theta) = \dfrac{f'(\theta)\theta - f(\theta)}{\theta^2} = 0$, откуда следует требуемое.

б) Аналогично заметим, что для $h(x) := f(f(x)) - x$ имеет место $h(2013) = h(2014) = 0$. Тогда по теореме Ролля существует точка $\xi \in (2013, 2014)$, такая, что $f'(f(\xi))f'(\xi) = 1$. Если $f(\xi) \neq \xi$, то достаточно положить $\xi_2 = \xi$, $\xi_1 = f(\xi)$. Если же $f(\xi) = \xi$, то по формуле конечных приращений имеем, что существуют $\xi_1 \in (2013, \xi)$ и $\xi_2 \in (\xi, 2014)$, такие, что

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\xi) - f(2013)}{\xi - 2013} = 1, \qquad f'(\xi_2) = \frac{f(2014) - f(\xi)}{2014 - \xi} = 1.$$

3. Докажите, что для возрастающей функции f, $f : [0; \pi/2] \to [0; +\infty]$, выполнено

а) $\int\limits_0^{\pi/2} (f(x) - f(\pi/4))(\sin x - \cos x)dx \geq 0$;

б) существует такое $a \in [\pi/4; \pi/2]$, что $\int\limits_0^a f(x)\sin x dx = \int\limits_0^a f(x)\cos x dx$.

Решение. а) Пусть

$$I = \int\limits_0^{\pi/4} (f(x) - f(\pi/4))(\sin x - \cos x)dx, \quad J = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (f(x) - f(\pi/4))(\sin x - \cos x)dx.$$

Поскольку для $x \in [0; \pi/4]$ имеем $f(x) \leq f(\pi/4)$ и $\sin x - \cos x \leq 0$, то $I \geq 0$.

Аналогично, поскольку для $x \in [\pi/4; \pi/2]$ имеем $f(x) \geq f(\pi/4)$ и $\sin x - \cos x \geq 0$, то $J \geq 0$.

Таким образом, $\int\limits_0^{\pi/2} (f(x) - f(\pi/4))(\sin x - \cos x)dx = I + J \geq 0$.

б) Пусть $F(t) = \int_0^t f(x)(\sin x - \cos x)dx,\ 0 \leq t \leq \pi/2$.

Имеем $F(\pi/4) = \int_0^{\pi/4} f(x)(\sin x - \cos x)dx \leq 0$ и

$$F(\pi/2) = \int_0^{\pi/2} f(x)(\sin x - \cos x)dx \geq [\text{см. } \mathbf{a)}] \geq \int_0^{\pi/2} f(\pi/4)(\sin x - \cos x)dx = 0.$$

Поскольку F непрерывна, то по теореме Больцано – Вейерштрасса имеем требуемое.

4. Невырожденная матрица $A \in M_3(\mathbb{R})$, такова, что $\det(A) = 1$, $\mathrm{tr}(A) = 0$, $\mathrm{tr}(A^{-1}) = 0$.

Докажите, что $A^3 = I_3$, где I_3 – единичная 3×3 матрица.

Решение. Пусть J – жорданова форма матрицы A над $\mathbb{C}$, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – ее диагональные элементы. Легко видеть, что $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(J) = \det(A) = 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}(J) = \mathrm{tr}(A) = 0$ и $\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1} = \mathrm{tr}(J^{-1}) = \mathrm{tr}(A^{-1}) = 0$. Из последнего следует, что $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 0$. По теореме Гамильтона – Кэли имеем

$$J^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)J^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)J - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 I_3 = J^3 - I_3 = 0,$$

откуда $J^3 = I_3$, а, следовательно, и $A^3 = I_3$.

5. В пространстве квадратично сходящихся вещественных последовательностей

$$l_2 = \{x | \sum_{k=1}^{\infty} x^2(k) < +\infty\}$$

с нормой $||x|| = \{\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^2(k)\}^{1/2}$ рассмотрим два замкнутых шара с центром в нуле:

$$B = \{x \in l_2 |\ ||x|| \leq d\} \quad \text{и} \quad B' = \{x \in l_2 |\ ||x|| \leq d + \delta\},$$

где $0 \leq \delta < d$. Пусть A – выпуклое множество, лежащее в $B' \setminus B$.

Докажите, что для любых точек $x, y \in A$ выполняется неравенство $||x - y|| \leq \sqrt{12d\delta}$.

Решение. Воспользуемся тождеством параллелограмма: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Так как $\frac{1}{2}(x+y) \in A$, то $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| > d$, т.е. $\|x+y\| > 2d$. Тогда из тождества получаем:

$$\|x-y\|^2 < 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4d^2 \leq 4(d+\delta)^2 - 4d^2 < 12d\delta.$$

6. Пусть G – такая группа, что все ее элементы удовлетворяют условию $x^2 = e$, где e – единица группы G.

Докажите, что

а) G – абелева группа;

б) если G конечна и $G \neq \{e\}$, то существует $n \in \mathbb{N}$, для которого $G \cong \underbrace{Z/2Z \oplus \ldots \oplus Z/2Z}_{n \text{ слагаемых}}$.

Решение. а) Если $x^2 = e$, то $x = x^{-1}$. Для $x, y \in G$ имеем $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$.

б) Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ – минимальная система образующих для G (она существует, так как G конечна).

Если $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ в $Z/2Z$, то $2|\alpha - \beta$ и для $x \in G$, $x^\alpha = x^\beta$. Тогда отображение

$$\varphi : Z/2Z \oplus \ldots \oplus Z/2Z \to G, \quad (\bar{\alpha}_1 \ldots, \bar{\alpha}_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

корректно определено.

Очевидно, отображение φ – гомоморфизм. Покажем, что оно биективно. Действительно, φ сюръективно, так как $(x_1, \ldots, x_n)$ – система образующих. Докажем, что φ инъективно. Пусть $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n) \in \mathrm{Ker}\varphi$. Если существует i, для которого $\bar{\alpha}_i = \bar{1}$, например, $\bar{\alpha}_n = \bar{1}$, то равенство $x_1^{\alpha_1} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n = e$ влечет $x_n = x_n^{-1} = x_1^{\alpha_1} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, т.е. $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ – система образующих, что противоречит минимальности $(x_1, \ldots, x_n)$. Итак, $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{(\bar{0}, \ldots \bar{0})\}$ и φ – инъективно.