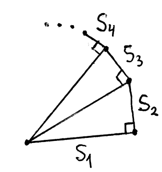
Олимпиада БГУ по математике среди студентов физико-математических специальностей

22 апреля 2015г.

1. Можно ли построить правильный пятиугольник в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, все вершины которого имеют целочисленные координаты? (При рассмотрении многоугольника в многомерном пространстве считается, что все его вершины лежат в одном подпространстве размерности 2).

2. В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим наборы $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, состоящие из линейно независимых векторов, начинающихся в нуле и оканчивающихся в вершинах куба $[0,1]^n$. Для каждого такого набора рассмотрим число $S_B = ||v_1||^2 + ||v_2||^2 + \cdots + ||v_n||^2$, где $||v_k||^2$ — квадрат длины вектора v_k. Найдите $\max\limits_B S_B$.

3. Бесконечная последовательность отрезков $\{S_n\}$ располагается на плоскости таким образом, что каждый следующий отрезок перпендикулярен прямой, соединяющей его начало с началом первого отрезка. Получается развертывающаяся спираль (см. рис.). Сколько полных оборотов сделает эта спираль, если длина $|S_n|$ равна $1/n$, $n \geq 1$?



4. Найти все функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ такие, что для любых $x, y \in [0,1]$ выполняются неравенства $|x-y|^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.

5. Пусть $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция со следующими свойствами:

1) функция $g(x) : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, задаваемая формулой $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, имеет предел при $x \to +\infty$;

2) функция $h(x) : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, задаваемая формулой $h(x) = \dfrac{1}{x}\int\limits_1^x f(t)dt$, имеет конечный предел при $x \to +\infty$.

Докажите, что: а) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}\int\limits_1^x f(t)^2 dt = 0$.

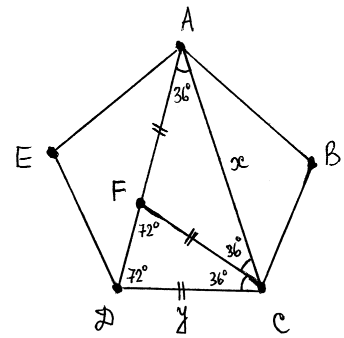
6. Пусть A, B — конечные семейства действительных чисел, среди которых могут быть и равные между собой числа, c — фиксированное действительное число. Докажите, что количество решений уравнения

$$x + y = c, \quad x \in A, y \in B,$$

не превосходит полусуммы количеств решений уравнений

$$x - y = 0, \quad x \in A, y \in A,$$
$$x - y = 0, \quad x \in B, y \in B.$$

Решения



1. Пятиугольник построить нельзя. Допустим, это возможно, и $ABCDE$ — правильный пятиугольник с целочисленными координатами вершин. По теореме Пифагора квадраты длин сторон и диагоналей являются натуральными числами. Рассмотрим треугольник ACD. Пусть $x = AC = AD$ — длина диагонали пятиугольника, $y = CD$ — длина стороны. Треугольник ACD имеет углы $36°, 72°, 72°$. Пусть CF — биссектриса угла C в этом треугольнике. Имеем $AF = FC = CD = y$. По свойствам биссектрисы

$$AF = AD \cdot \frac{AC}{AC + CD}, \text{ т.е. } y = x \cdot \frac{x}{x+y},$$

откуда $(x/y)^2 - (x/y) - 1 = 0$, т.е. $(x/y) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Получаем, что $x^2/y^2 = (x/y)^2 = (x/y) + 1 \notin \mathbb{Q}$, хотя это отношение должно быть рациональным как отношение двух натуральных чисел.

2. По теореме Пифагора $||v||^2 = ||p_1||^2 + ||p_2||^2 + \cdots + ||p_n||^2$, где p_i — проекции v на координатные оси. Так как координаты векторов v_k состоят из нулей и единиц, то $||v_k||^2$ равно числу единиц среди координат v_k, а S_B равно общему числу единиц среди всех координат всех векторов v_k, $k = \overline{1, n}$.

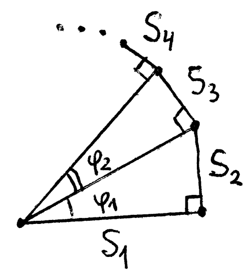
Так как B — базис, то вопрос сводится к нахождению максимального числа единиц в невырожденной матрице из 0 и 1. Покажем, что это число равно $n^2 - n + 1$. С одной стороны, оно не может быть больше, ибо в таком случае найдутся две строки из одних единиц. С другой стороны, оно достигается для следующей матрицы

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы показать невырожденность A_n, докажем по индукции равенство $\det A_n = 1$. Имеем $\det A_1 = \det A_2 = 1$. Предположим, что $\det A_{n-1} = 1$, $n \geq 3$. Разлагая $\det A_n$ по первому столбцу, получаем

$$\det A_n = 1 \cdot \det A_{n-1} - 0 \cdot \det B_{2,1} + 1 \cdot \det B_{3,1} - \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \det B_{n,1} = \det A_{n-1} = 1,$$

поскольку во всех дополнительных минорах $B_{3,1}, \ldots, B_{n,1}$ две первые строки состоят из единиц.



3. Покажем, что спираль совершит бесконечно много оборотов. Для этого рассмотрим сумму углов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{|S_{n+1}|}{\sqrt{|S_1|^2 + |S_2|^2 + \cdots + |S_n|^2}} =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1/(n+1)}{\sqrt{1/1^2 + 1/2^2 + \cdots + 1/n^2}}$$

и докажем, что ряд расходится.

Во-первых, арктангенс является выпуклой вверх функцией на положительной полуоси, поэтому для $t \in [0,1]$ (таков аргумент арктангенса в предыдущей формуле) имеем

$$\operatorname{arctg}(t) = \operatorname{arctg}((1-t)\cdot 0 + t\cdot 1) \geq (1-t)\cdot \operatorname{arctg}(0) + t\cdot \operatorname{arctg}(1) = t\cdot \frac{\pi}{4}.$$

Во-вторых, знаменатель дроби выше ограничен сверху конечным числом:

$$\sqrt{1/1^2 + 1/2^2 + \dots + 1/n^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2} = \sqrt{\zeta(2)}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{arctg}\frac{1/(n+1)}{\sqrt{1/1^2 + 1/2^2 + \dots + 1/n^2}} \geq \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\zeta(2)}}\cdot\frac{\pi}{4},$$

откуда вытекает расходимость ряда.

4. Имеем $|f(1) - f(0)| = 1$. Рассмотрим произвольное $x \in [0,1]$. С одной стороны, $|f(1) - f(x)| + |f(x) - f(0)| \leq 1 - x + x = 1$. С другой стороны, $|f(1) - f(x)| + |f(x) - f(0)| \geq |f(1) - f(0)| = 1$. Поэтому $|f(1) - f(x)| + |f(x) - f(0)| = 1$, т.е. $f(x)$ лежит между $f(0)$ и $f(1)$. Кроме того, $|f(1) - f(x)| = 1 - x$, $|f(x) - f(0)| = x$. Получаем, что точки $(0, f(0))$, $(x, f(x))$ и $(1, f(1))$ коллинеарны. Следовательно, $f(x) = f(0) \pm x$.

5. а) Обозначим $l = \lim\limits_{n\to\infty} g(x)$. Допустим, $l \in (0, +\infty)$. Пусть $a > 0$ таково, что при всех $x \geq a$ верно неравенство $g(x) \geq l/2$. Тогда

$$h(x) = \frac{1}{x}\left(\int_1^a f(t)dt + \int_a^x f(t)dt\right) \geq \frac{1}{x}\int_1^a f(t)dt + \frac{l}{2x}\int_a^x tdt =$$
$$= \frac{1}{x}\int_1^a f(t)dt + \frac{l(x^2-a^2)}{4x} \to +\infty \text{ при } x \to +\infty,$$

что противоречит 2). Аналогично рассматривается случай $l = +\infty$. Остается вариант $l = 0$.

б) Заметим, что $\int\limits_1^x f(t)dt > 0$ для $x > 1$. Таким образом,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)^2dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\int_1^x f(t)dt}{x}\cdot\frac{\int_1^x f(t)^2dt}{x\int_1^x f(t)dt}\right) = \lambda\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x f(t)^2dt}{x\int_1^x f(t)dt} = \lambda\lim_{x\to+\infty}\frac{u(x)}{v(x)},$$

где $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$, $u(x) = \int_0^x f(t)^2dt$, $v(x) = x\int_1^x f(t)dt$.

Чтобы обосновать равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u(x)}{v(x)} = 0$, используем правило Лопиталя. Для этого заметим, что:

- u и v дифференцируемы;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$ (это следует из оценки $v(x) > m(x-1)$ для $x \geq 2$, где $m = \inf\limits_{x\in[1,2]} f(x)$);

- $v'(x) = \int_1^x f(t)dt + xf(x) \neq 0$ для всех $x \geq 1$;
- принадлежность $\dfrac{u'(x)}{v'(x)} = \dfrac{f(x)^2}{xf(x) + \int_1^x f(t)dt} = g(x) \cdot \dfrac{f(x)}{f(x) + h(x)} \in (0, g(x))$ вместе с

равенством $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ дают $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{u'(x)}{v'(x)} = 0$, откуда и вытекает требуемое равенство.

6. Рассмотрим уравнение

$$x + y = c, \quad x \in A, y \in B. \tag{1}$$

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — различные числа, образующие A, и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — кратности этих чисел. Тогда множество A содержит $\sum_{i=1}^r \lambda_i$ чисел.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — различные числа, образующие B, и $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ — кратности этих чисел. Тогда множество B содержит $\sum_{k=1}^s \mu_k$ чисел.

Если $x = a_i, y = \mu_k$ — решения (1), то число таких решений равно произведению $\lambda_i \cdot \mu_k$. Поскольку $\lambda_i \cdot \mu_k \leq \frac{1}{2}\left(\lambda_i^2 + \mu_k^2\right)$, то число всех решений (1) не превосходит суммы

$$\sum_{\substack{i,k \\ x_i+y_k=c}} \frac{1}{2}(\lambda_i^2 + \mu_k^2) \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^2 + \sum_{k=1}^s \mu_k^2\right). \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение

$$x - y = 0, \quad x \in A, y \in A. \tag{3}$$

Если $x = y = a_i$ $(1 \leq i \leq r)$ — решения (3), то число таких решений равно $\sum_{i=1}^r \lambda_i^2$. То же уравнение относительно переменных $x \in B, y \in B$ имеет $\sum_{k=1}^s \mu_k^2$ решений $x = y = b_k$ $(1 \leq k \leq s)$.

Из последних двух предложений и оценки (2) следует утверждение задачи.