Олимпиада БГУ по математике среди студентов физико-математических специальностей

12 апреля 2016 г.

1. Существует ли в 4-мерном евклидовом пространстве такой набор векторов $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, что при $i \neq j$ угол $\widehat{v_i, v_j} \geq 105°$? $115°$?

2. Все диагональные элементы a_{ij} эрмитовой матрицы A порядка n равны 1. Справедливы также неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq 2, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Докажите, что все собственные значения A лежат на отрезке $[0, 2]$.

3. Для натурального числа n обозначим через $S(n)$ сумму его цифр в десятичном представлении.

а) Докажите, что функция $S(n)$ субаддитивна и субмультипликативна:

$$S(n_1 + n_2) \leq S(n_1) + S(n_2), \quad S(n_1 \cdot n_2) \leq S(n_1) \cdot S(n_2).$$

б) Найдите $\alpha = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{S(n)}{S(2n)}$ и $\beta = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{S(n)}{S(3n)}$.

4. Непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция f удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_0^1 f(x)dx = 0, \int_0^1 xf(x)dx = 0, \ldots, \int_0^1 x^n f(x)dx = 1.$$

Докажите, что $\max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)| \geq 2^n(n + 1)$.

5. Известно, что дифференцируемая на (a, b) функция f удовлетворяет условиям:

$$1) \lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty, \lim_{x \to b-0} f(x) = -\infty; \quad 2) f'(x) + f(x)^2 + 1 \geq 0 \text{ для всех } x \in (a, b).$$

Докажите, что $b - a \geq 3$.

6. В урне лежат три шара: белый, чёрный и красный. Игроки $A_1, A_2, \ldots, A_N$ по очереди, т.е. в порядке $(A_1, A_2, \ldots, A_N, A_1, A_2, \ldots, A_N, A_1, A_2, \ldots)$, извлекают наугад по шару с последующим его возвращением в урну. Победителем объявляется игрок, первый доставший красный шар.

Найдите: а) среднюю продолжительность игры; б) наименьшее число участников N, при котором вероятность победы A_1 превосходит вероятность победы A_N по крайней мере в 5 раз.

Решения задач следует сдавать на отдельных листах с указанием номера задачи.

Решения

1. Угол в $105°$ достаточно мал, и такие векторы существуют даже в трёхмерном подпространстве, например:

$$(1,1,1,0),(1,-1,-1,0),(-1,1,-1,0),(-1,-1,1,0).$$

Косинусы углов между равны $-1/3$, что соответствует углу около $109°$.

Не ограничивая общности, можно считать, что все векторы имеют единичную длину. Если все углы $\geq \varphi$, то скалярное произведение можно оценить: $\langle v_i, v_j\rangle \leq \cos\varphi$. Откуда

$$0 \leq \left\langle \sum_{i=1}^{4} v_i, \sum_{j=1}^{4} v_j \right\rangle < 4 + 4\cdot 3\cdot \cos\varphi = 4(1+3\cos\varphi).$$

Если $\cos\varphi < -1/3$, например $\varphi = 115°$, то неравенство противоречиво.

2. Так как A эрмитова, то её собственные значения вещественны. Пусть i таково, что $|x_i| = \max_j |x_j|$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – собственный вектор, $Ax = \lambda x$. Из $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i$ получаем $(\lambda-1)x_i = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j$. Взяв абсолютные значения, получим оценку $|\lambda-1|\cdot|x_i| \leq |x_i|$, откуда $|\lambda-1| \leq 1$, т.е. $\lambda \in [0,2]$.

3. а) Сначала покажем, что $S(n)$ субаддитивна. Пусть $n_1 = \sum_{i=0}^{M} a_i 10^i$, $n_2 = \sum_{i=0}^{N} b_i 10^i$. Рассмотрим стандартный алгоритм сложения чисел «столбиком». При сложении цифр a_i и b_i разряда i будем стирать сами цифры a_i, b_i, записывая соответствующую цифру суммы c_i и перезаписывая цифру $d \in \{0,1\}$, отвечающую за перенос единицы в следующий разряд (первоначально $d = 0$). Как легко видеть, сумма всех записанных цифр не увеличивается на каждом шаге. При этом изначальная сумма цифр равна $S(n_1) + S(n_2)$, а конечная сумма равна $S(n_1+n_2)$. Таким образом, S субаддитивна.

Из субаддитивности вытекает неравенство

$$S(n_1n_2) = S(\underbrace{n_2 + \cdots + n_2}_{n_1}) \leq S(n_2) + \cdots + S(n_2) = n_1 S(n_2),$$

из которого следует субмультипликативность:

$$S(n_1n_2) = S(n_1\sum_{i=0}^{N} b_i 10^i) = S(\sum_{i=0}^{N} n_1 b_i 10^i) \leq \sum_{i=0}^{N} S(n_1 b_i 10^i) =$$
$$= \sum_{i=0}^{N} S(n_1 b_i) \leq \sum_{i=0}^{N} S(n_1) b_i = S(n_1)\sum_{i=0}^{N} b_i = S(n_1)S(n_2).$$

б) $S(n) = S(10n) \leq S(5)S(2n) = 5S(2n)$, откуда $S(n)/S(2n) \leq 5$, причём равенство достигается при $n = 5$. Таким образом, $\alpha = 5$.

Для вычисления β достаточно рассмотреть число вида $n = \underbrace{333\ldots33}_{N}4$. В этом случае $3n = \underbrace{100\ldots0}_{N+1}2$, $S(3n) = 3$, т.е. $S(n)/S(3n) = (3N+4)/3 \to +\infty$ при $N \to +\infty$. Таким образом, $\beta = +\infty$.

4. Из условия следует, что

$$\int\limits_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)dx = 1.$$

Предположим, что для всех $x \in [0,1]$ выполняется неравенство $|f(x)| < 2^n(n+1)$. Тогда

$$1 = \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)dx \le \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^n \max|f|dx = \max|f| \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^n dx <$$
$$< 2^n(n+1)\int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^n dx = 2^n(n+1)\cdot 2\int_0^{1/2} x^n dx = 2^n(n+1)\cdot\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

Противоречие доказывает требуемое неравенство.

5. На интервале $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ запишем теорему Лагранжа для функции $\operatorname{arctg}\circ f$:

$$\operatorname{arctg}(f(x_2)) - \operatorname{arctg}(f(x_1)) = \frac{f'(x_0)}{1+f(x_0)^2}(x_2-x_1).$$

Условие 2) показывает, что

$$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2} \ge -1,$$

откуда

$$\operatorname{arctg}(f(x_2)) - \operatorname{arctg}(f(x_1)) \ge -(x_2-x_1).$$

Переходя к пределу при $x_1 \to a+0$, $x_2 \to b-0$, получим $-\pi \ge -(b-a)$, т.е. $b-a \ge \pi$.

6. а) Рассмотрим целочисленную случайную величину ξ, которая принимает значение r, если игра заканчивается на шаге r, где $r = 1, 2, 3, \ldots$. Пусть

$$G_\xi(z) = \sum_{r=1}^{+\infty} P(\xi = r)z^r \text{ — производящая функция случайной величины } \xi.$$

Здесь

$$P(\xi = r) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^r, \text{ т.е. } G_\xi(z) = \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^r = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2/3)z}{1-(2/3)z}.$$

Как легко установить с помощью почленного дифференцирования ряда, матожидание

$$M\xi = \sum_{r=1}^{+\infty} r\cdot P(\xi = r) = G'_\xi(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{2z}{3-2z}\right)'_{z=1} = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3.$$

б) Вероятность победы A_1 равна

$$P(A_1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^N + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2N} + \cdots = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(2/3)^N}$$

Вероятность победы A_N равна

$$P(A_N) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{N-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2N-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3N-1} + \cdots = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{N-1}\frac{1}{1-(2/3)^N}.$$

Таким образом,

$$\frac{P(A_1)}{P(A_N)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{N-1} \ge 5 \;\Leftrightarrow\; N \ge 5.$$