Олимпиада БГУ по математике среди студентов физико-математических специальностей

21 апреля 2017 г.

1. В трех точках (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) параболы, симметричной относительно оси Ox, проведены нормали к параболе. Известно, что нормали пересекаются в одной точке. Докажите, что $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

2. Существует ли такая пятерка натуральных чисел, что они попарно взаимно просты, но сумма не менее двух из них обязательно является составным числом? Если да, то приведите пример, если нет, то обоснуйте почему.

3. Пусть A, B – две симметричные вещественные матрицы порядка n, причем $\mathrm{tr}A > 0$ и $\mathrm{tr}B < 0$. Докажите, что существует такой вектор $x \in \mathbb{R}^n$, что $(Ax, x) > 0$ и $(Bx, x) < 0$.

4. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция, которая обладает следующими свойствами:

- для всех аргументов $x_1 < x_2$ и всех значений y, лежащих между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, существует $\xi \in (x_1, x_2)$, такой что $f(\xi) = y$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x)) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty$.

а) Докажите, что существуют пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, конечные или равные $\pm\infty$.

б) Могут ли пределы из пункта а) быть конечными при надлежащем выборе f?

5. Пусть $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, такая что для всех натуральных n выполняется равенство

$$\int_0^n f(x)f(n-x)dx = \int_0^n f(x)^2 dx.$$

Докажите, что f – периодическая функция.

6. Какое максимальное число пар знакомых между собой людей может быть в аудитории из 100 человек, если при этом не должно быть ни одной тройки попарно знакомых между собой людей?

Решения задач следует оформлять на <u>отдельных</u> листах с указанием номера задачи.
Черновики следует пометить словом «Черновик».
Время написания – 4 астрономических часа.

Решения

1. Поскольку сумма $y_1 + y_2 + y_3$ не меняется при параллельном сдвиге вдоль оси Ox, можно считать, что парабола имеет уравнение $y^2 = ax$. Пусть (α, β) – точка пересечения нормалей, (x, y) – произвольная точка на параболе. Коэффициент наклона прямой, проходящей через (x, y) и (α, β) равен $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$. Коэффициент наклона касательной в точке (x, y) вычисляется с помощью производной и равен $\frac{a}{2y}$, коэффициент наклона нормали равен $-1/\frac{a}{2y} = -\frac{2y}{a}$. Следовательно, точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) удовлетворяют уравнению

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = -\frac{2y}{a}.$$

Подставляя $x = \dfrac{y^2}{a}$, получаем уравнение

$$y - \beta = -\frac{2y}{a}\left(\frac{y^2}{a} - \alpha\right).$$

В этом кубическом уравнении отсутствует член с y^2, что, с учетом формул Виета, означает, что $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

2. *Решение 1.* Для любого $n \geq 2$ можно сконструировать такие n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что они попарно взаимно просты, но суммы не менее двух из них обязательно являются составными. Такими числами будут $a_i = i \cdot n! + 1$, $1 \leq i \leq n$.

Действительно, для пары $1 \leq i < j \leq n$ верно

$$(i \cdot n! + 1, j \cdot n! + 1) = (i \cdot n! + 1, (j - i) \cdot n!) = 1,$$

поскольку число $(j - i) \cdot n!$ имеет только простые делители, не превосходящие n, которые заведомо не делят число $i \cdot n! + 1$.

С другой стороны, для любого $k \geq 2$

$$(i_1 \cdot n! + 1) + \cdots + (i_k \cdot n! + 1) = (i_1 + \cdots + i_k) \cdot n! + k \;\vdots\; k.$$

Ответ: да, например 121, 241, 361, 481, 601.

Решение 2. Рассмотрим числа $\{30k + 1 : 0 \leq k \leq 4\} = \{1, 31, 61, 91, 121\}$. Поскольку $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, и числа дают остаток 1 при делении на 30, то сумма любых двух чисел из множества делится на 2, трех – на 3, четырех – на 2, пяти – на 5. Взаимная простота следует из разложения на простые: 31, 61 – простые, $91 = 7 \cdot 13$, $121 = 11 \cdot 11$.

3. Выберем базис, в котором матрица A диагональна (след линейного оператора не зависит от выбора ортонормированного базиса). Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайный вектор, координаты которого – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающих значения ± 1 с вероятностью $1/2$. Имеем равенство для любого вектора $X \in \{-1, +1\}^n$

$$(AX, X) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} X_i X_j = \sum_{i}^{n} A_{ii} (X_i)^2 = \sum_{i}^{n} A_{ii} = \mathrm{tr} A.$$

В то же время

$$\mathrm{M}(BX, X) = \frac{1}{2^n} \sum_{X \in \{-1,+1\}^n} (BX, X) = \mathrm{tr} B < 0.$$

(матожидание в данном случае совпадает со средним арифметическим значений квадратичной формы по 2^n векторам, координаты которых равны ± 1). Поэтому найдется такая реализация вектора X, что $(BX, X) < 0$.

Замечание. В качестве источника информации по линейной алгебре и теории матриц можно порекомендовать следующую книгу: Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. Она доступна по адресу `http://www.inm.ras.ru/vtm/lection/all.pdf`. Эрмитовы матрицы, нужные в этой задаче, рассматриваются в лекции 33.

Хорошей идеей является то, что гарантированно имеется отрицательное (положительное) число в наборе, если среднее арифметическое значение отрицательно (положительно). Несмотря на простоту, варианты этой идеи часто полезны.

4. а) Разберем случай $x \to +\infty$, случай $x \to -\infty$ аналогичен. Предположим, что предел $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ не существует. Тогда нижний и верхний предел $f(x)$ при $x \to +\infty$ отличаются. Обозначим

$$a = \liminf_{x\to+\infty} f(x), \quad b = \limsup_{x\to+\infty} f(x), \quad a < b.$$

Существуют последовательности $x_n, y_n \to +\infty$ такие, что $f(x_n) \to a$ и $f(y_n) \to b$. Не ограничивая общности $x_n < y_n$. Выберем число c в промежутке между a и b. При достаточно больших n верно неравенство $f(x_n) < c < f(y_n)$ и существуют такие ξ_n, лежащие между x_n и y_n, что $f(\xi_n) = c$. Но тогда $f(f(\xi_n)) = f(c) \not\to +\infty$. Противоречие с условием.

б) Ответ: нет, пределы всегда бесконечные.

Допустим, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c \neq \pm\infty$. Заметим сразу, что функция f не стабилизируется при увеличении x, иначе существовали бы $x_n \to +\infty$, для которых $f(f(x_n)) = f(c) \not\to +\infty$.

Далее возможны два случая (не взаимно исключающих!):

(i) Функция принимает значения $f(x) > c$ при стремлении x к $+\infty$.

Выберем $x_n \to +\infty$ такой, что $f(x_n) \searrow c$ сверху. Функция f неограничена на любом интервале вида $(c, c + \frac{1}{k})$, поскольку $f(x_n) \searrow c$ и $f(f(x_n)) \to +\infty$ по условию.

Из условия далее следует, что образ $f((c, +\infty))$ содержит весь луч $(f(c), +\infty)$. Выберем $y_k \in (c, c + \frac{1}{k}) \cap (c, f(x_1))$ такой, что $f(y_k) = f(c) + 1$, и заметим, что $y_k \in (f(x_{n_i}), f(x_{n_j}))$ при некотором выборе номеров n_i, n_j. По условию существует такой $\xi_k \in (x_{n_i}, x_{n_j})$, что $f(\xi_k) = y_k$. Получаем $f(f(\xi_k)) = f(y_k) = f(c) + 1 \not\to +\infty$. Противоречие с условием.

(ii) Функция принимает значения $f(x) < c$ при стремлении x к $+\infty$.

Выберем $x_n \to +\infty$ такой, что $f(x_n) \nearrow c$ снизу. Рассмотрим интервалы вида $(c - \frac{1}{k}, c)$ и т.д., в полной аналогии со случаем (i).

5. Покажем, что 1 является периодом функции f. Пусть n – произвольное натуральное число. Сделав замену переменных $x \mapsto n - x$ в условии, получим равенство

$$\int_0^n f(n-x)f(x)dx = \int_0^n f(n-x)^2 dx.$$

Сложив его с равенством из условия, и перенеся левые слагаемые в правую часть, получим

$$0 = \int_0^n (f(x) - f(n-x))^2 dx.$$

Из непрерывности f теперь следует, что $f(x) = f(n-x)$ для всех $x \in [0, n]$. Выбрав для произвольного $x \in [0, +\infty)$ натуральное $n \geq x$, получим

$$f(x+1) = f(n+1-x-1) = f(n-x) = f(x).$$

6. Решим задачу для $2n$ человек в аудитории, где n – натуральное число.

Ситуация, при которых имеется ровно n^2 пар знакомых, получается, если есть две непересекающиеся группы по n человек, при этом внутри групп знакомых нет, но каждый знаком со всеми людьми из «противоположной» группы.

Рассмотрим «социальный граф», в котором люди соответствуют вершинам, а ребра представляют знакомство. Треугольником в графе будем называть любые 3 вершины, попарно соединенные ребрами.

По индукции покажем, что в графе с $2n$ вершинами без треугольников имеется не более n^2 ребер.

При $n = 1$ утверждение тривиально.

Допустим, утверждение верно при некотором натуральном n, и пусть имеется граф с $2(n+1)$ вершинами без треугольников. Рассмотрим две вершины A, B, соединенные ребром. Для каждой из $2n$ вершин, отличных от A и B, имеется лишь одно ребро соединяющее их либо с A, либо с B (отсутствие треугольников!). Таким образом, ребер, содержащих A или B, имеется не более $2n+1$, включая само ребро AB. По предположению индукции имеется не более n^2 ребер, соединяющих вершины отличные от A и B. В сумме получается не более $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ ребер.

Ответ: 50^2.

Замечание. Утверждение является частным случаем теоремы Турана из теории графов, см. `https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Турана`