Олимпиада БГУ по математике среди студентов
физико-математических специальностей
18 апреля 2018 г.

1. Пусть $n > 1$ – целое число. Доказать, что предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)\right)$$

а) существует;
б) не является целым числом.

2. Пусть $f : [0,1] \to [0,1]$ – такая функция, что

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \text{ для всех } x, y \in [0,1].$$

Доказать, что множество неподвижных точек f состоит либо из одной точки, либо является отрезком.

3. Пусть $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ – произвольный многочлен с целыми коэффициентами, где $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Докажите, что найдётся бесконечно много простых чисел p, таких что p делит бесконечно много значений из множества $\{f(m) : m \in \mathbb{Z}\}$.

4. Пусть A, B – две матрицы $n \times n$ с элементами из $\mathbb{R}$. Всегда ли выполняется следующее неравенство для рангов матриц

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}(AB) + n?$$

5. Найти минимум суммы длин рёбер призмы, все рёбра которой касаются сферы единичного радиуса.

6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 f(x)dx$, где $f(x) = \min\limits_{y\in[0,1]} \max\{4x - y, y\}$.

Время написания – 4 астрономических часа.

Решения

1. а) (3 балла) Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\operatorname{arctg}(x)+\operatorname{arctg}\Big(\frac{x}{2}\Big)+\dots+\operatorname{arctg}\Big(\frac{x}{n}\Big)\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg}(x)-\operatorname{arctg}(0)}{x-0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{arctg}(\frac{x}{2})-\operatorname{arctg}(0)}{\frac{x}{2}-0}+\dots+\frac{1}{n}\cdot\frac{\operatorname{arctg}(\frac{x}{n})-\operatorname{arctg}(0)}{\frac{x}{n}-0}\right)=$$
$$=\operatorname{arctg}'(0)\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}.$$

б) (7 баллов) Пусть $S_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$, где $n\geq 2$. Выберем степень двойки $2^k\leq n<2^{k+1}$, где $k\geq 1$. Пусть P – произведение всех нечётных чисел $\leq n$. Число $2^{k-1}PS_n$ не может быть целым, т.к. оно равно сумме слагаемых, являющихся целыми, за исключением одного слагаемого равного

$$2^{k-1}P\frac{1}{2^k}\notin\mathbb{Z}.$$

Замечание. Для обоснования пункта б) можно также применить постулат Бертрана о том, что на любого натурального m существует простое $p\in(m,2m)$, откуда вытекает существование простого $p\in(n/2,n]$. Наличие такого p в знаменателе S_n означает, что $S_n\notin\mathbb{Z}$.

2. (10 баллов)Пусть $F=\{x\in[0,1]:f(x)=x\}=g^{-1}(0)$, где $g(x)=(f(x)-x)$ – непрерывная функция на $[0,1]$. Множество F ограничено и замкнуто, как прообраз замкнутого одноточечного множества $\{0\}$ под действием непрерывного отображения, т.е. F компактно.

Рассмотрим $a=\min F$, $b=\max F$. Если $a=b$, то утверждение верно. Иначе рассмотрим произвольный $x\in[a,b]$. Для него $f(x)-a\leq|f(x)-a|=|f(x)-f(a)|\leq x-a$, т.е. $f(x)\leq x$. Аналогично, $b-f(x)\leq|b-f(x)|=|f(b)-f(x)|\leq b-x$, т.е. $f(x)\geq x$. Следовательно, $f(x)=x$, т.е $x\in F$. Таким образом, $F=[a,b]$.

3. (10 баллов)Назовём простое p делителем f, если $p|f(m)$ для некоторого целого m. В этом случае $p|f(m+kp)$ для всех $k\in\mathbb{N}$, что вытекает из формулы бинома Ньютона. Чисел вида $f(m+kp)$ бесконечно много, так как $f(m+kp)\to\infty$ при $k\to\infty$.

Достаточно показать, что f имеет бесконечно много простых делителей.

Предположим, что f имеет конечное число таких делителей $p_1,p_2,\dots,p_k$. Пусть $m=p_1p_2...p_k$. Рассмотрим

$$f(a_0m)=a_n(a_0m)^n+a_{n-1}(a_0m)^{n-1}+...+a_1(a_0m)+a_0=$$
$$=a_0(a_na_0^{n-1}m^n+a_{n-1}a_0^{n-2}m^{n-1}+...+a_1m+1)=a_0g(m),$$

где

$$g(x)=a_na_0^{n-1}x^n+a_{n-1}a_0^{n-2}x^{n-1}+...+a_1x+1.$$

Поскольку $(p_i,g(m))=1$ для $i=1,2,...,k$, то $g(m)$ имеет простой делитель, отличный от $p_1,p_2,...,p_k$. Этот делитель будет делителем и для $f(a_0m)$, т.е. мы нашли новый простой делитель для $f(x)$. Противоречие.

4. (10 баллов)Воспользуемся тождеством для блочных матриц размера $2n\times 2n$:

$$\begin{pmatrix}I_n & 0\\ -A & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & B\\ A & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & -B\\ 0 & I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & -AB\end{pmatrix}.$$

Так как слева 1-я и 3-я матрицы невырождены, то

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -AB \end{pmatrix} = n + \operatorname{rank}(AB).$$

С другой стороны,

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \le \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{pmatrix},$$

что завершает доказательство.

Замечание. Данное неравенство известно как неравенство Сильвестра.

5. (10 баллов)Каждая грани призмы пересекает сферу по кругу, касающемуся сторон грани. Следовательно, каждая грань – описанный многоугольник. Сдвиг вдоль образующих призмы, переводящий одно основание в другое, переводит круг, вписанный в одно основание, в круг, вписанный во второе основание. Эти круги равны и лежат в параллельных плоскостях, т.к. основания равны и параллельны. Таким образом, вектор переноса перпендикулярен плоскостям этих кругов, т.е. *образующие призмы перпендикулярны основаниям.* Поэтому боковые стороны – прямоугольники. Поскольку они описанные прямоугольники, то они – квадраты. Следовательно, рёбра оснований и образующие имеют равную длину, поэтому основания – правильные многоугольники.

Теперь рассечём призму и сферу плоскостью, проходящей через центр сферы параллельно основаниям. Призма пересечётся по многоугольнику, равному основаниям, сфера – по большой окружности. Большая окружность содержит точку касания каждой касательной к сфере, ортогональной плоскости большой окружности. Следовательно, большая окружность содержит точку каждого бокового ребра призмы. Получаем, что основание – *правильный многоугольник, вписанный в окружность единичного радиуса.*

Для нахождения суммы длин рёбер призмы нам необходимо утроить периметр правильного многоугольника, вписанного в единичную окружность. Периметр n-угольника равен

$$P_n = 2n\sin\frac{\pi}{n} = 2\pi\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \text{ где } \alpha = \frac{\pi}{n}.$$

Наименьший периметр – у треугольника.

Ответ: $3P_3 = 9\sqrt{3}$.

6. (10 баллов) Заметим, что $4x - y \ge y \Leftrightarrow 2x \ge y$. Функция

$$g(x,y) = \max\{4x-y, y\} = \begin{cases} 4x - y & \text{при } y \le 2x, \\ y & \text{при } y \ge 2x. \end{cases}$$

Поскольку

$$\min_{x\in[0,1/2]} y = 2x, \qquad \min_{x\in[1/2,1]} (4x-y) = 4x-1,$$

то

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{1/2}(2x)dx + \int_{1/2}^1 (4x-1)dx = x^2\Big|_0^{1/2} + 4x^2\Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{4} + 2(1-\frac{1}{4}) = \frac{5}{4}.$$