РЕШЕНИЯ

Группа А

1. Известно, что все корни уравнения $z^3+az^2+bz+c=0, a,b,c\in\mathbb{C},$ лежат на окружности $|z|=1$. Доказать, что все корни уравнения $z^3+|a|z^2+|b|z+|c|=0$ также лежат на окружности $|z|=1$.

Решение. Пусть z_1,z_2,z_3 – корни уравнения $z^3+az^2+bz+c=0$. Тогда $b=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=-c\bar{a}$. Так как $|c|=|z_1z_2z_3|=1$, то $|a|=|b|$, и второе уравнение принимает вид $z^3+|a|z^2+|a|z+1=0$. Один из корней этого уравнения равен -1, а два других являются комплексно сопряженными числами, произведение которых равно 1. Следовательно, они также лежат на окружности $|z|=1$.

2. а) Доказать, что существует многочлен P такой, что $\int\limits_{n-1}^{n}P(x)dx=n^4$ для любого натурального n.

б) Найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}k^4$.

Решение. а) Будем искать полином четвертой степени, удовлетворяющий условию задачи: $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Вычислив интеграл и приравняв коэффициенты при степенях n в обеих частях, получим линейную систему относительно неизвестных a,b,c,d,e с треугольной матрицей:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда находим полином $P(x)=x^4+2x^3+x^2-\frac{1}{30}$.

б) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^4=\int\limits_{0}^{n}P(x)dx=\frac{n}{30}(96n^4+15n^3+10n^2-1)=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-!)}{30}$.

3. Последовательность (a_n) задана рекуррентно: a_1 – некоторое число из $(0;1), a_{n+1}=\ln(1+a_n), n\geq 1$. Найти $\lim n\cdot a_n$.

Решение. Ясно, что $x_n\downarrow 0$. Имеем $\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{\ln(1+x_n)}=\frac{1}{x_n\bigl(1-\frac{x_n}{2}+o(x_n)\bigr)}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{2}+o(1)$, или $\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{2}+y_n$, где $y_n\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда следует, что $\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_1}+\frac{n}{2}+y_1+\ldots+y_n$, $\frac{1}{nx_{n+1}}=\frac{1}{nx_1}+\frac{1}{2}+\frac{y_1+\ldots+y_n}{n}$. Так как $y_n\to 0$, то и $\frac{y_1+\ldots+y_n}{n}\to 0$, поэтому $\frac{1}{nx_{n+1}}\to\frac{1}{2}$.

4. Пусть $e_1,e_2,\ldots,e_n$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n, a_1,a_2,\ldots,a_n$ – векторы единичной длины. Доказать, что если $(a_1,e_1)+(a_2,e_2)+\ldots+(a_n,e_n)>\sqrt{n(n-1)}$, то векторы $a_1,a_2,\ldots,a_n$ – линейно независимые.

Решение. Пусть $a_i=(a_{i1},\ldots,a_{in})$. Предположим, что векторы $a_1,\ldots,a_n$ линейно зависимы. Тогда в матрице (a_{ij}) линейно зависимы не только строки, но и столбцы. Поэтому существуют числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ (можно считать, что $\alpha_1^2+\ldots+\alpha_n^2=1$) такие, что $\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_ja_{ij}=0$ при $i=1,2,\ldots.$ Отсюда следует, что

$$\alpha_i^2a_{ii}^2=\bigl(-\sum_{j\neq i}\alpha_ja_{ij}\bigr)^2\leq\bigl(\sum_{j\neq i}\alpha_j^2\bigr)\bigl(\sum_{j\neq i}a_{ij}^2\bigr)=(1-\alpha_i^2)(1-a_{ii}^2),$$

т.е. $a_{ii}^2+\alpha_i^2\leq 1$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}\leq \sum_{i=1}^n 1\cdot\sqrt{1-\alpha_i^2}\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n (1-\alpha_i^2)}=\sqrt{n(n-1)}.$$

5. Дважды дифференцируемая функция $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ такова, что $\sup\limits_{x\in(0;+\infty)}|f(x)|\leq 1$, $\sup\limits_{x\in(0;+\infty)}|f''(x)|\leq 1$. Какие значения может принимать $\sup\limits_{x\in(0;+\infty)}|f'(x)|$?

Решение. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для любого $x\in(0,+\infty)$ и любого $h>0$ имеем: $f(x+2h)=f(x)+f'(x)\cdot 2h+f''(x+\Theta\cdot 2h)\cdot 2h^2, 0<\Theta<1$. $\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2h}[f(x+2h)-f(x)]-f''(x+\Theta\cdot 2h)\cdot h$. Отсюда с учетом условия получаем:

$$|f'(x)|\leq\frac{1}{h}+h$$

для любого $h>0$. Так как $\min\limits_{h>0}\left(\dfrac{1}{h}+h\right)=2$, то отсюда следует, что $|f'(x)|\leq 2, 0<x<+\infty$.

Покажем, что $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f'(x)|$ может принимать значения из отрезка $[0,2]$.

Рассмотрим функцию $f_1(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+2x-1 \text{ при } 0<x<2,\\ \cos(x-2) \text{ при } x\geq 2.\end{cases}$

Легко видеть, что функция $f_1(x)$ дифференцируема на интервале $(0,+\infty)$, причем $f_1'(x)=\begin{cases}-x+2 \text{ при } 0<x<2,\\ -\sin(x-2) \text{ при } x\geq 2.\end{cases}$

Функция $f_1'(x)$ также дифференцируема на интервале $(0,+\infty)$ и
$f_1''(x)=\begin{cases}l-1 \text{ при } 0<x<2,\\ -\cos(x-2) \text{ при } x\geq 2.\end{cases}$

Имеем: $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f_1(x)|=1$, $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f_1'(x)|=1$, $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f''(x)|=2$.

Функция $f(x)=\alpha f_1(x)$ $(0\leq\alpha\leq 1)$ удовлетворяет условию задачи, и $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f'(x)|=2\alpha$. Следовательно, $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f'(x)|$ может принимать все значения из отрезка $[0,2]$.

Ответ: $[0,2]$.

6. Пусть G – конечное множество $n\times n$ матриц $M_i, i=1,2,\ldots,r$, которое является группой по умножению. Предположим, что $\sum\limits_{i=1}^r trM_i=0$. Доказать, что $\sum\limits_{i=1}^r M_i$ является нулевой матрицей.

Решение. Пусть $S=\sum\limits_{i=1}^r M_i$. Для каждого j последовательность $M_jM_1, M_jM_2,\ldots,M_jM_r$ является перестановкой элементов G. Суммируя, получаем $M_jS=S$. Суммируя последние равенства по j от 1 до r получаем $S^2=rS$. Отсюда видим, что минимальный полином S делит x^2-rx, и каждое собственной значение S равно 0 или r. Но сумма всех собственных значений с учетом кратности – это $tr(S)$. Поэтому $tr(S)=0$, и все собственные значения равны 0.

Теперь заметим, что каждое собственное значение матрицы $S-rI$ равно $-r\neq 0$, поэтому $S-rI$ обратима. Из равенства $S(S-rI)=0$ получаем $S=0$.

7. Доказать, что для любых матриц $A,B\in M_n(\mathbb{C}), n\geq 2$, справедлива оценка $\operatorname{rank}(AB)-\operatorname{rank}(BA)\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$. Исследовать достижимость оценки.

Решение. $\mathrm{rank}(AB) - \mathrm{rank}(BA) \le \mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}A,\ \mathrm{rank}B.$ В силу неравенства Сильвестра $\mathrm{rank}(BA) \ge -\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - n.$ Тогда $\mathrm{rank}(AB) - \mathrm{rank}(BA) \le \mathrm{rank}B - \mathrm{rank}A - \mathrm{rank}B + n = n - \mathrm{rank}A \le n - \big(\mathrm{rank}(AB) - \mathrm{rank}(BA)\big),$ Откуда и следует требуемая оценка.

Достижимость:

$$n = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$n = 2p \qquad A_{2p} = \begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A \end{pmatrix}, B_{2p} = \begin{pmatrix} B & & & \\ & B & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B \end{pmatrix}$$

$$n = 2p+1 \quad A_{2p+1} = \begin{pmatrix} A_{2p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{2p+1} = \begin{pmatrix} B_{2p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЯ.

Группа Б

1. Доказать, что уравнение $x^n - a_1x^{n-1} - \ldots - a_{n-1}x - a_n = 0, a_1, a_2, \ldots, a_n > 0,$ имеет ровно один положительный корень.

Решение. Представим уравнение в виде $x^n \cdot g(x) = 0,$ где $g(x) = 1 - \dfrac{a_1}{x} - \dfrac{a_2}{x^2} - \ldots - \dfrac{a_n}{x^n}.$ Функция g строго возрастает на $(0;+\infty), \lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} = 1.$ По теореме о промежуточных значениях существует $x_0 \in (0;+\infty), g(x_0) = 0$ (g непрерывная функция) и x_0 единственное (g строго монотонная функция).

2. Для заданных комплексных чисел a и b вычислить $\max\limits_{|z|=1} |az^2 + bz + \bar{a}|.$

Решение. Заметим, что $\max\limits_{|z|=1} |az^2 + bz + \bar{a}| = \max\limits_{|z|=1} |az + b + \overline{az}| = \max\limits_{|z|=1} |b - (-2\Re(az))|$ есть расстояние от точки b до множества $E = \{-2\Re(az) : |z| = 1\}.$ Полагая $a = |a|e^{i\varphi}, z = e^{it}(t \in [0, 2\pi]),$ получаем $-2\Re(az) = -2|a|\cos(t + \varphi),$ а потому множество E есть отрезок $[-2|a|, 2|a|].$ Следовательно, искомый максимум равен наибольшему из расстояний от точки b до концов этого отрезка т.е. $\max\{|b - 2|a||, |b + 2|a||\}.$

3. Для $x > 0$ рассмотрим интегралы $C_x = \int\limits_x^{x+1} \cos t^2 dt$ и $S_x = \int\limits_x^{x+1} \sin t^2 dt.$ Доказать, что $\sqrt{C_x^2 + S_x^2} \le \dfrac{1}{x}$ для всех $x > 0.$

Решение. Рассмотрим $I_x = \int\limits_x^{x+1} e^{it^2} dt.$ Тогда $\sqrt{C_x^2 + S_x^2} = |I_x|; I_x = \int\limits_x^{x+1} \dfrac{de^{it^2}}{2it} = \dfrac{e^{i(x+1)^2}}{2i(x+1)} - \dfrac{e^{ix^2}}{2ix} + \dfrac{1}{2i} \int\limits_x^{x+1} e^{it^2} \dfrac{dt}{t^2}.$ Отсюда $|I_x| \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x} + \int\limits_x^{x+1} \dfrac{dt}{t^2}\right) = \dfrac{1}{x}.$

4. а) Доказать, что существует многочлен $P_4(x)$ четвертой степени такой, что $\int\limits_{n-1}^{n} P_4(x)dx = n^4$ для любого натурального $n.$

б) Найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4.$

Решение. а) Будем искать полином четвертой степени, удовлетворяющий условию задачи: $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$ Вычислив интеграл и приравняв коэффициенты при степенях n в обеих частях, получим линейную систему относительно неизвестных a, b, c, d, e с треугольной матрицей:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда находим полином $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - \dfrac{1}{30}.$

б) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \int\limits_0^n P(x)dx = \dfrac{n}{30}(96n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-!)}{30}.$

5. Матрица, состоящая только из нулей и единиц, называется бинарной. Какое наибольшее число единиц может содержать невырожденная бинарная матрица порядка n?

Решение. Если число нулей будет $\le n - 2,$ то, ясно, что какие-то два столбца будут состоять из одних единиц, и тогда $\det A = 0.$ С другой стороны, для любого n легко построить невырожденную матрицу, содержащую точно $n - 1$ нулей: пусть нули расположены на главной поддиагонали. Невырожденность такой матрицы доказываем по индукции разлагая определитель по первому столбцу:

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 1 \cdot \det A_{n-1} - 0 \cdot (\dots) + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \dots = \det A_{n-1} = \dots = \det A_1 = 1,$$ т.к. все слагаемые, начиная с 3-го содержат в первых двух строках одни единицы.

Ответ: $n^2 - n + 1$.

6. Пусть F — фокус параболы $y^2 = 2px$. Центр правильного n-угольника $A_1A_2\dots A_n$ находится в точке F и ни одна из его вершин A_i не лежит на оси Ox. Лучи $FA_1, FA_2, \dots, FA_n$ пересекают параболу в точках $B_1, B_2, \dots, B_n$. Доказать, что $|FB_1| + |FB_2| + \dots + |FB_n| > n \cdot p$ ($|FB_i|$ — расстояние между точками F и B_i).

Решение. Обозначим $t_k = |FB_k|, \alpha$ — угол, образованный FB_1 с осью Ox и $\alpha_k = \alpha + \dfrac{2\pi(k-1)}{n}$. Точка B_k имеет координаты $\left(\dfrac{p}{2} + t_k \cos\alpha_k; t_k \sin\alpha_k\right), t_k = \dfrac{p}{1-\cos\alpha_k}$ и тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{t_k} = \dfrac{n}{p} - \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\alpha + \dfrac{2\pi(k-1)}{n}\right) = \dfrac{n}{p}$, $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{t_k}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} t_k\right) \geq n^2$ (неравенство Коши), откуда и следует требуемый результат.

7. Для каких действительных чисел a и b последовательность $x_0 = a, x_1 = 1 + bx_0, x_2 = 1 + bx_1, \dots, x_{n+1} = 1 + bx_n, \dots$ имеет конечный предел?

Решение. По индукции легко доказать явную формулу $x_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1} + b^n a = \dfrac{b^n - 1}{b-1} + b^n a = \dfrac{1}{1-b} + b^n\left(a - \dfrac{1}{1-b}\right)$, $(b \neq 1)$. Последовательность (x_n) сходится к $\dfrac{1}{1-b}$ при $|b| < 1$ и любом a, либо при любом $b \neq 1$ и $a = \dfrac{1}{1-b}$.

В остальных случаях (x_n) расходится.