# Республиканская
# студенческая олимпиада по математике

*Минск, 24 – 26 апреля 2013 г.*

***Группа А***

## РЕШЕНИЯ

**1.** Найдите все такие положительные числа $\alpha$ и $\beta$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\int\limits_0^{1/n} x^{x+1}\,dx = \beta.$$

**Ответ:** $\alpha = 2$, $\beta = 1/2$.

**Первое решение.** Рассмотрим функцию $f(x) = x^x$ на интервале $(0;1/2)$.
Очевидно, что $x^x = e^{x\ln x} \le [x\ln x < 0] \le 1$. Отсюда находим оценку сверху:

$$\int\limits_0^{1/n} x^{x+1}\,dx \le \left[x^{x+1} = x^x\cdot x \le x\right] \le \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2} \quad \forall\, n \ge 3.$$

Так как $f'(x) = x^x(\ln x + 1) < 0$ для всех $x < e^{-1} < 1/2$, то функция $f$ убывает на $(0;1/2)$. Отсюда получаем оценку снизу ($\forall\, n \ge 3$):

$$\int\limits_0^{1/n} x^{x+1}\,dx \ge \left[x^{x+1} = x^x\cdot x \ge f(\frac{1}{n})\cdot x = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} x\right] \ge \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \frac{1}{2n^2\sqrt[n]{n}}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \int\limits_0^{1/n} x^{x+1}\,dx = \dfrac{1}{2}$.

**Второе решение.** Если числа $\alpha$ и $\beta$ существуют, то они единственны, поскольку существования указанного в условии предела равносильно эквивалентности последовательностей $\int\limits_0^{1/n} x^{x+1}\,dx \sim \beta n^{-\alpha}$. Рассмотрим функцию $g(y) = y^{\alpha}\int\limits_0^{1/y} x^{x+1}\,dx$ и вычислим предел $\lim\limits_{y\to+0} g(y)$. Воспользовавшись правилом Лопиталя, получим

$$\lim_{y\to+0} g(y) = \lim_{y\to+\infty}\frac{\int\limits_0^{1/y} x^{x+1}\,dx}{y^{-\alpha}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\dfrac{d}{dy}\left(\int\limits_0^{1/y} x^{x+1}\,dx\right)}{\dfrac{d}{dy}\left(y^{-\alpha}\right)} = [\text{теорема Барроу}] =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{(1/y)^{1+1/y}\cdot\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)}{-\alpha y^{-\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha}\lim_{y\to+\infty}\frac{y^{\alpha-2}}{y^{1/y}} = [y^{1/y}\to 1] = \frac{1}{\alpha}\lim_{y\to+\infty} y^{\alpha-2} = [\alpha = 2] = \frac{1}{2}.$$

По критерию Гейне последовательность $g(n)$ имеет тот же предел.

**2.** Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-2n} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{(2n)^k}{k\,!}$.

**Ответ:** 1.

**Решение.** Рассмотрим предел $L = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-2n} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(2n)^k}{k\,!}$. Заметим, что $\dfrac{(2n)^k}{k\,!} \le \dfrac{(2n)^n}{n\,!}$ при $0 \le k \le n$, поскольку $\dfrac{(2n)^k}{k\,!} : \dfrac{(2n)^n}{n\,!} = \dfrac{(k+1)\cdot \ldots \cdot n}{(2n)^{n-k}} < 1$ при $0 \le k < n$. Поэтому с учетом формулы Стирлинга

$$L \le \lim_{n\to\infty} e^{-2n}\frac{(2n)^n}{n\,!}(n+1) = \lim_{n\to\infty} e^{-2n}\frac{2^n n^n}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}(n/e)^n}(n+1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2}{e}\right)^n = 0.$$

Следовательно, $L = 0$. Осталось заметить, что

$$e^{-2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)^k}{k\,!} + e^{-2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(2n)^k}{k\,!} = e^{-2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n)^k}{k\,!} = e^{-2n}\cdot e^{2n} = 1.$$

**3.** Пусть функция $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема и $f(1/2) = 0$. Докажите, что $\int\limits_0^1 (f'(x))^2\, dx \ge 12\left(\int\limits_0^1 f(x)\,dx\right)^2$.

**Решение.** Из неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$\begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{1/2} x f'(x)\,dx\right)^2 & \le \dfrac{1}{24}\displaystyle\int_0^{1/2} (f'(x))^2\,dx \\ \left(\displaystyle\int_{1/2}^{1} (1-x) f'(x)\,dx\right)^2 & \le \dfrac{1}{24}\displaystyle\int_{1/2}^{1} (f'(x))^2\,dx \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{24}\int_0^1 (f'(x))^2\,dx \ge \left(\int_0^{1/2} x f'(x)\,dx\right)^2 + \left(\int_{1/2}^{1}(1-x)f'(x)\,dx\right)^2.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{1/2} x f'(x)\,dx = -\int_0^{1/2} f(x)\,dx,\ \int_{1/2}^{1}(1-x)f'(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx,$$

и, следовательно, $\frac{1}{24}\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx \ge \left(\int\limits_0^{1/2} f(x)\,dx\right)^2 + \left(\int\limits_{1/2}^{1} f(x)dx\right)^2 \ge$

$$\ge \frac{1}{2}\left(\int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_{1/2}^{1} f(x)dx\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

**4.** Пусть $A \in M_m(\mathbb{C})$ — обратимая матрица. Докажите, что следующие два условия эквивалентны

1) $A^{-1} = \overline{A}$;
2) сущесвует такая обратимая матрица $B \in M_m(\mathbb{C})$, что $A = B^{-1} \cdot \overline{B}$.

**Решение.** (1) $\implies$ 2)) Ищем матрицу $B$ в виде $B = \alpha\overline{A} + \beta E$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $E$ — единичная матрица. Имеем

$$A = B^{-1}\cdot\overline{B} \iff BA = \overline{B} \iff (\alpha\overline{A}+\beta E)A = \overline{\alpha}A+\overline{\beta}E \iff \alpha\overline{A}A+\beta A = \overline{\alpha}A+\overline{\beta}E \iff$$

$$\iff [A^{-1} = \overline{A}] \iff \alpha E + \beta A = \overline{\alpha}A + \overline{\beta}E.$$

Очевидно, что последнее равенство выполнено при $\beta = \overline{\alpha}$.

Остается показать, что при некотором $\alpha \in \mathbb{C}$ матрица $B$ является невырожденной. Для $\alpha \neq 0$ имеем $\det B = \alpha^m \det\left(\overline{A} + \dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha}E\right)$. Если бы $\det\left(\overline{A} + \dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha}E\right) = 0$ при всех ненулевых $\alpha$, то матрица $\overline{A}$ имела бы бесконечное число собственных значения. Следовательно, существует такое ненулевое число $\alpha$ при котором $\det B \neq 0$.

(2) $\implies$ 1)) Пусть $B$ — обратимая матрица и $A = B^{-1}\overline{B}$. Тогда

$$A^{-1} = (B^{-1}\overline{B})^{-1} = (\overline{B})^{-1}B = [(\overline{B})^{-1} = \overline{B^{-1}}]] = \overline{B^{-1}}\,\overline{\overline{B}} = \overline{B^{-1}\overline{B}} = \overline{A}.$$

**5.** Набор подмножеств $\{A_1, A_2, ..., A_N\}$ конечного множества $S = \{1, 2, ..., n\}$ назовем *подчиненным*, если для всех $i \neq j$ $(i, j = 1, ..., N)$ выполнено

$$|A_i \cap A_j| < \frac{1}{n}|A_i| \cdot |A_j|.$$

Докажите, что число подмножеств $N$ в любом подчиненном наборе не превосходит $n + 1$.

**Решение.** Сопоставим каждому $A_i$ вектор $a_i = (0, ..., 1/\sqrt{n}, 0, ..., 1/\sqrt{n}, ...) \in \mathbb{R}^n$, в котором все ненулевые элементы равны $1/\sqrt{n}$, причем $k$-я координата не равна нулю тогда и только тогда, когда $k \in A_i$. Множеству $S$ сопоставим вектор $s = (1/\sqrt{n}, ..., 1/\sqrt{n})$.

Легко видеть, что тогда $\dfrac{1}{n}|A_i| = (a_i, s)$ и $\dfrac{1}{n}|A_i \cap A_j| = (a_i, a_j)$. Спроектируем векторы $a_i$ на прямую $< s >$ и рассмотрим ортогональные дополнения $b_i$ к этим проекциям: $b_i = a_i - (a_i, s)s$. Тогда

$$(b_i, b_j) = (a_i - (a_i, s)s, a_j - (a_j, s)s) = (a_i, a_j) - 2(a_i, s)\cdot(a_j, s) + (a_i, s)\cdot(a_j, s) =$$

$$= (a_i, a_j) - (a_i, s)\cdot(a_j, s) = \frac{1}{n}|A_i \cap A_j| - \frac{1}{n^2}|A_i|\cdot|A_j|.$$

Таким образом, условие подчиненности $|A_i \cap A_j| < \dfrac{1}{n}|A_i|\cdot|A_j|$ равносильно условию $b_i, b_j) < 0$.

Лемма. *В $\mathbb{R}^n$ не существует $n+2$ векторов с попарно тупыми углами между ними.*

Доказательство. Предположим, от противного, что такие векторы $w_1$, ..., $w_{n+2}$ существуют. Покажем, что в линейной комбинации

$$\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_{n+2}w_{n+2} = 0 \qquad (*)$$

коэффициенты $\alpha_i$ можно выбрать так, что $\sum\limits_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0$.

Не ограничивая общности, считаем. что $w_{n+1}, w_{n+2} \in < w_1, ..., w_n >$, т.е.

$$w_{n+1} = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n \text{ и } w_{n+2} = \alpha_1' w_1 + ... + \alpha_n' w_n.$$

Если либо $u = \alpha_1 + ... + \alpha_n - 1$, либо $u' = \alpha_1' + ... + \alpha_n' - 1$, равно 0, то все доказано. Если же $u, u' \neq 0$, то существует такое $t$, что $tu + u' = 0$. Тогда искомая зависимость имеет вид

$$(t\alpha_1 + \alpha_1')w_1 + ... + (t\alpha_n + \alpha_n')w_n - tw_{n+1} - w_{n+2} = 0.$$

С другой стороны, в равенстве $(*)$ все ненулевые $\alpha_i$ должны быть одного знака. Действительно, пусть это не так. Тогда перепишем $(*)$ в виде $\alpha_{i_1} w_{i_1} + ... + \alpha_{i_k} w_{i_k} = \alpha_{i_{k+1}} w_{i_{k+1}} + ... + \alpha_{i_{n+2}} w_{i_{n+2}}$, где все $\alpha_{i_j} \geq 0$ и по крайней мере одно из них строго больше 0. Пусть $w = \alpha_{i_1} w_{i_1} + ... + \alpha_{i_k} w_{i_k}$. Тогда

$$0 \leq (w, w) = (w, \alpha_{i_{k+1}} w_{i_{k+1}} + ... + \alpha_{i_{n+2}} w_{i_{n+2}}) < 0.$$

Полученное противоречие и доказывает лемму, а вместе с тем и утверждение задачи.

**6.** Пусть $M$ — множество всех действительных корней всевозможных квадратных уравнений $x^2 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами $p$ и $q$.

Можно ли множество $M$ представить в виде счетного пересечения $M = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i$ открытых множеств $U_i$?

**Ответ:** нельзя.

**Решение.** Очевидно, что $M$ счетно. Покажем, что $M$ плотно в $\mathbb{R}$.

Если $\alpha$ — корень уравнения $x^2 = p$, $p \in \mathbb{Z}$, то $\{\alpha\}^2 = (\alpha - [\alpha])^2 = p - 2[\alpha]([\alpha] + \{\alpha\}) + [\alpha]^2$, т.е. $\{\alpha\}$ — корень уравнения $x^2 + 2[\alpha]x + [\alpha]^2 - p = 0$. При любом $n \in \mathbb{Z}$ из $\alpha^2 = p$ находим, что число $\{n\alpha\}$ будет корнем уравнения $x^2 + 2[n\alpha]x + [n\alpha]^2 - n^2 p = 0$. В том случае, когда целое $p$ не является квадратом, число $\{\alpha\} = \{\sqrt{p}\}$ иррационально. А тогда последовательность $(\{n\alpha\})$ плотна в $[0; 1]$ (теорема Якоби).

Наконец, если $\beta$ — корень уравнения $x^2 + px + q = 0$, то при любом целом $k$ число $\beta + k$ будет корнем уравнения $x^2 + (p - 2k)x + (q + k^2 - pk) = 0$.

Итак, доказано, что $M$ плотно в $\mathbb{R}$.

Предположим, что существует представление $M = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i$, $U_i$ — открытые множества. Тогда $M^c = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i^c$, где $F_i = U_i^c$ — замкнутые нигде не плотные множества, т.к. в любом интервале $I$ есть рациональные точки, которые не входят в $I$ вместе с некоторой окрестностью. Записывая $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i \bigcup \bigcup\limits_{m \in M} \{m\}$, получим представление полного метрического пространства $\mathbb{R}$ в виде счетного объединения нигде неплотных множеств, что противоречит теореме Бэра. Полученное противоречие и доказывает невозможность указанного в условии представления.