Олимпиада БГУ среди студентов физико-математических специальностей

24 апреля 2019 г.

1. Найти сумму ряда
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}.$$

2. Сколько существует невырожденных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{1, 2, \ldots, 10\}$?

3. Существует ли дифференцируемая функция $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ такая, что $f(0) = 0$ и
$$f'(x) = f(x)^2 + x^2?$$

4. Пусть G – конечная группа невырожденных матриц в $M_n(\mathbb{C})$ относительно умножения. Докажите, что для каждого преобразования $A \in G$ найдётся базис в $\mathbb{C}^n$, состоящий из собственных векторов A.

5. Пусть бесконечно дифференцируемая функция на $(-\infty, +\infty)$ такова, что:
1) $f(1/n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
2) существует $L > 0$ такая, что $|f^{(k)}(x)| \leq L$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \mathbb{R}$.
Следует ли отсюда, что $f(x) \equiv 0$?

6. На окружности наудачу и независимо друг от друга выбираются 6 точек. Три первых объявляются красными, три оставшиеся – синими.
Какова вероятность того, что «красный» треугольник не пересекается с «синим»?

Время написания 4 астрономических часа.
Черновики следует пометить словом черновик.
Решения разных задач следует сдавать на отдельных листах с указанием номера задачи.

Решения

1.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)-1}{(k+3)!}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+3)!}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=\frac{5}{3}.$$

2. Всего существует n^4 матриц с элементами из $\{1,2,\dots,n\}$.

Подсчитаем количество вырожденных матриц. Каждая вырожденная матрица соответствует двум коллинеарный вектор-строкам (a,b) и (c,d), а значит фиксирует некий луч проходящий через начало координат. Пусть (i,j) – пара чисел из $\{1,2,\dots,n\}$, лежащем на данном луче, $k=\max\{i,j\}$. На луче лежит ровно $[n/k]$ точек (a,b), где $a,b\in\{1,2,...,n\}$. Соответственно, существует $[n/k]^2$ пар $((a,b),(c,d))$, образующих вырожденную матрицу.

Возможны случаи $i<j=k$, $i=j=k$, $j<i=k$. Для фиксированного $j=k\in\{2,...,n\}$ существует ровно $\varphi(k)$ чисел i, $1\le i<k$, взаимно простых с k. Лучей, связанных с парой (i,k) также ровно $\varphi(k)$. Случай $j<i=k$ рассматривается точно так же. Случай $i=j=k$ соответствует одному лучу с n точками на нём.

Таким образом, вырожденных матриц существует ровно $n^2+2\sum_{k=2}^{n}\varphi(k)[n/k]^2$, В случае $n=10$ это $10^2+2(\varphi(2)\cdot[10/2]^2+\varphi(3)\cdot[10/3]^2+4\cdot[10/4]^2+\varphi(5)\cdot[10/5]^2+\varphi(6)\cdot[10/6]^2+7\cdot[10/7]^2+\varphi(8)\cdot[10/8]^2+\varphi(9)\cdot[10/9]^2+10\cdot[10/10]^2)=100+2(1\cdot25+2\cdot9+2\cdot4+4\cdot4+2+6+4+6+4)=278.$

Ответ. $10000-278=9722.$

Подробнее про свойства функции Эйлера $\varphi(k)$ см.

https://ru.wikipedia.org/wiki/Функция_Эйлера

3. Допустим такая функция существует. При $x\ge1$ имеем $f(x)=f(x)^2+x^2\ge f(x)^2+1$. Рассмотрим на отрезке $[1,3]$ уравнение

$$f'_*(x)=f_*(x)^2+1,\quad f_*(1)=f(1),\ \text{где}\ f(1)\ge0.$$

Его решением является $f'_*(x)=\mathrm{tg}(x-1+\mathrm{arctg}f(1))$.

Выполняется неравенство

$$f(x)=f(1)+\int_1^x f'(y)dy\ge f(1)+\int_0^x f'_*(y)dy=\mathrm{tg}(x-1+\mathrm{arctg}f(1))\ge\mathrm{tg}(x-1).$$

Но последняя функция обращается в бесконечность при $x=1+\frac{\pi}{2}<3$.

Ответ. Нет.

4. Если $|G|=m$, то $A^m=Id$, т.е. A является корнем многочлена X^m-1. Рассматривая жорданову нормальную форму A, убеждаемся, что все жордановы клетки имеют размерность 1, т.е. матрица A диагонализируется в некотором базисе, что и даёт требуемое.

5. Докажем, что для любого $k \geq 0$ существует последовательность (a_{kn}) такая, что $a_{kn} \to 0$ при $n \to +\infty$ и $f^{(k)}(a_{kn}) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

При $k = 0$ это так по условию. Если это так для некоторого k, то по теореме Лагранжа между a_{kn} и $a_{k(n+1)}$ найдётся $a_{(k+1)n}$, где $f^{(k+1)}(a_{(k+1)n}) = 0$.

В силу непрерывности производных $f^{(k)}(x)$ имеем $f^{(k)}(0) = 0$ для всех $k \geq 0$.

Для произвольного x запишем формулу Тейлора в виде Лагранжа:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ... + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^n + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad \theta \in (0,1).$$

Следовательно,

$$|f(x)| \leq \left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right| \leq \frac{Lx^n}{n!} \text{ для всех } n \geq 0,$$

откуда следует равенство $f(x) = 0$. Тождественность нулю следует из произвольности x в рассуждениях.

6. Положение каждой точки ω_i на окружности будем описывать углом в интервале $[0, 2\pi)$. Множество

$$D = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, ...\omega_6) : \omega_i = \omega_j \text{ при некоторых } i \neq j\} \subset [0, 2\pi)^6$$

имеет нулевой объём. Поэтому случай совпадения точек можно игнорировать.

Вся область $[0, 2\pi)^6 \setminus D$ распадается на 6! равнообъёмных областей, которые переходят друг в друга при перестановках координат.

Координаты вектора с условием $\omega_1 < \omega_2 < ... < \omega_6$ можно переставить с сохранением «непересекаемости» треугольников ровно $3! \times 3! \times 6$ способами. Это перестановки $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ между собой, перестановки $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ между собой, циклические перестановки, и их композиции.

Ответ. $6 \times 3! \times 3!/6! = 3/10$.