Белорусская республиканская студенческая олимпиада по математике

11 мая 2017 г.

1. При каких действительных a найдется такая числовая последовательность $x_n > 0$, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a + x_{n+1}}{x_n} = 0?$$

2. Найдите

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) - n \int_0^1 \sin x\, dx \right).$$

3. Рассмотрим матрицу $A = I + B$, где I – единичная матрица 10×10, а B – матрица, содержащая «таблицу умножения», т.е. $B_{kj} = k \cdot j$ для $1 \le k, j \le 10$.

а) Докажите, что определитель $\det A \ne 0$.

б) Какой знак у определителя $\det A$?

в) Найдите определитель $\det A$.

4. Рассмотрим непрерывные функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, для которых $f(0) = f(1)$.

а) Докажите, что для $\tau = \frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$ – любое натуральное число, график f обязательно имеет горизонтальную хорду длины τ, т.е. найдутся такие два значения $t, t+\tau \in [0,1]$, что $f(t) = f(t+\tau)$.

б) Можно ли гарантировать существование горизонтальной хорды для каких-нибудь других значений $\tau \in (0,1) \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$?

5. На группе S_n подстановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ задана функция ζ:

$$\zeta(\sigma) = \sum_{k:\sigma(k)\ne k} k \quad \text{для всех } \sigma \in S_n.$$

Найдите среднее значение функции, т.е.

$$\mathrm{M}\zeta = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} \zeta(\sigma).$$

6. Существуют ли такие действительные квадратные матрицы A, B одинакового размера, что имеются пределы $A_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} A^n$, $B_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} B^n$, но не существует предела $\lim\limits_{n\to+\infty} (AB)^n$? (Под пределом последовательности матриц понимается матрица, составленная из пределов элементов матриц. Пределы элементов подразумеваются конечными.)

Время написания – 4 астрономических часа.

Решения

1. Если $a \le 0$, то подходит последовательность $x_n = -a + \frac{1}{n!}$. Действительно,

$$0 \le \frac{a + x_{n+1}}{x_n} = \frac{a - a + \frac{1}{(n+1)!}}{-a + \frac{1}{n!}} \le \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Пусть $a > 0$. Если предположить, что такая последовательность существует, то начиная с некоторого номера N будет выполняться неравенство

$$\frac{a + x_{n+1}}{x_n} < \frac{1}{2}, \text{ т.е. } x_{n+1} < \frac{1}{2}x_n - a.$$

Из последнего неравенства индукцией по $k \in \mathbb{N}$ получим, что

$$x_{N+k} < \frac{1}{2^k}x_N - a. \qquad (*)$$

Действительно, утверждение при $k = 1$ верно по определению N. Предположив, что оно верно при некотором $k \in \mathbb{N}$, имеем

$$x_{N+(k+1)} < \frac{1}{2}x_k - a < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}x_N - a\right) - a < \frac{1}{2^{k+1}}x_N - a.$$

Неравенство (*) при достаточно больших k противоречит условию $x_n > 0$.

Ответ. При $a \le 0$.

2.

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 \sin x dx = n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 \sin x dx\right) = n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\sin\left(\frac{k}{n}\right) - \sin x\right)dx =$$

$$= [\text{теорема Лагранжа, } \theta_k(x) \in \left(\frac{k}{n}, x\right)] = n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \cos\theta_k(x)\left(\frac{k}{n} - x\right)dx.$$

Обозначив $m_k := \min\{\cos x : x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]\}$, $M_k := \max\{\cos x : x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]\}$, получаем оценки

$$m_k\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right)dx \le \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \cos\theta_k(x)\left(\frac{k}{n} - x\right)dx \le M_k\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right)dx.$$

Просуммировав по k и умножив на n, получаем

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} m_k \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \cos\theta_k(x)\left(\frac{k}{n} - x\right)dx \le \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} M_k.$$

По определению интеграла Римана

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} m_k = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} M_k = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos x dx = \frac{1}{2}\sin 1.$$

В силу предыдущего неравенства исходная последовательность сходится к числу $\frac{1}{2}\sin 1$.

Ответ. $\frac{1}{2}\sin 1$.

3. б) Матрица A является симметричной положительно определенной как сумма симметричных положительно определенных, т.е. для всех векторов $x \in \mathbb{R}^{10}$, $x \neq 0$, верно неравенство

$$(Ax, x) = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 2 \cdot x_2 \\ \vdots \\ 10 \cdot x_{10} \end{pmatrix} \right\|^2 > 0.$$

По критерию Сильвестра $\det A > 0$.

в) Оператор с матрицей B имеет ранг 1, т.к. $Bx = (x, a) \cdot a$, где вектор $a = (1, 2, \ldots, 10)^T$. Выберем ортонормальный базис где первый базисный вектор сонаправлен a. В этом базисе оператор A примет диагональный вид $\mathrm{diag}(1 + ||a||^2, 1, \ldots, 1)$. Поскольку определитель не зависит от выбора базиса,

$$\det A = 1 + ||a||^2 = 1 + \sum_{k=1}^{10} k^2 = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Big|_{n=10} = 1 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 386.$$

Ответ. 386.

Замечание. Данную задачу также можно решить, применив к матрице A элементарные преобразования: строку 1 следует отнять от строки k ровно k раз, $2 \leq k \leq 10$; затем столбцы j следует добавить к столбцу 1 ровно j раз, $2 \leq j \leq 10$; полученная матрица имеет треугольный вид с числами $386, 1, \ldots, 1$ на диагонали, что и даёт ответ.

4. а) Рассмотрим $g(t) = f(t + \frac{1}{n}) - f(t)$. По условию

$$g(0) + g(\tfrac{1}{n}) + \cdots + g(\tfrac{n-1}{n}) = (f(\tfrac{1}{n}) - f(0)) + (f(\tfrac{2}{n}) - f(\tfrac{1}{n})) + \cdots + (f(1) - f(\tfrac{n-1}{n})) = f(1) - f(0) = 0.$$

Если хотя бы при одном k верно равенство $g(\frac{k}{n}) = 0$, то хорда найдена. Если такого k нет, то среди $g(\frac{k}{n})$ имеются как положительные, так и отрицательные числа. Рассмотрим k, для которого $g(\frac{k}{n})$ и $g(\frac{k+1}{n})$ имеют разные знаки. Для некоторого $\xi \in (\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ верно $g(\xi) = 0$. Хорда найдена.

б) Пусть $\tau \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, где $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим кусочно-линейную функцию, которая имеет коэффициенты наклона равные $+1$ на $n+1$ интервалах длиной $\frac{1}{2(n+1)}$ и коэффициенты наклона равные -1 на n интервалах длины $\frac{1}{2n}$ каждый. Её график не имеет хорды длины τ.

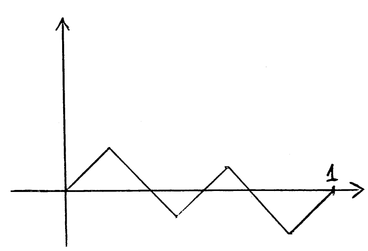

Рис. 1: График функции для $n = 2$.

Ответ. Нет.

5. Сформулируем решение в теоретико-вероятностных терминах.

Рассмотрим случайную величину

$$\xi(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \eta_k, \qquad \text{где } \eta_k = \begin{cases} 1, \sigma(k) = k, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Легко найти $M\eta_k$:

$$M\eta_k = k \cdot P\{\eta_k = 1\} = k \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{k}{n}.$$

Поэтому

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}, \quad M\zeta = \sum_{k=1}^{n} k - M\xi = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{2}.$$

Ответ. $\frac{n^2-1}{2}$.

6. Рассмотрим бесконечное семейство матриц A, B следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

С помощью индукции по n убеждаемся, что

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n & \alpha^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при $|\alpha| < 1$ существуют пределы

$$A_0 = \lim_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \lim_{n\to+\infty} B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{1-\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

При этом

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица симметричная, а ее собственные значения являются корнями уравнения

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(AB)\lambda + \det(AB) = \lambda^2 - (1+2\alpha^2)\lambda + \alpha^2 = 0.$$

Один из корней

$$\lambda_1 = \frac{(1+2\alpha^2) + \sqrt{(1+2\alpha^2)^2 - 4\alpha^2}}{2} = \frac{(1+2\alpha^2) + \sqrt{1+4\alpha^2}}{2} > 1$$

для любого $a \in (0,1)$. Поскольку AB имеет собственное значение большее 1, то $(AB)^n$ не может иметь предела при $n \to +\infty$.

Ответ. Да, существуют.

Замечание. Участниками олимпиады был предложены ряд примеров другого рода. Наиболее простой пример таков:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$