Республиканская студенческая олимпиада по математике

Минск, 6 мая 2015 г.

Группа А

1. Пусть $\sqrt{7} > \dfrac{m}{n}$, где m, n — натуральные числа. Докажите, что $\sqrt{7} > \dfrac{m}{n} + \dfrac{1}{mn}$.

2. Пусть $(Ax, x) = \sum\limits_{1 \le i,j \le 4} a_{ij} x_i x_j$ — положительно определённая квадратичная форма, заданная на векторах $x \in \mathbb{R}^4$, D — область в $\mathbb{R}^4$, в которой $(Ax, x) \le 1$. Вычислите интеграл

$$\int\int\int_D\int e^{(Ax,x)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

3. Пусть $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ — матрица с элементами из поля с характеристикой, отличной от 2. Перманентом матрицы назовём выражение

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

где суммирование производится по всем подстановкам σ множества индексов $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Данное выражение будем рассматривать как многочлен от переменных a_{ij}. Для каких натуральных n существует такая функция $\varepsilon : I \times I \to \{+1, -1\}$ (функция приписывания знаков элементам a_{ij}), что имеется равенство многочленов

$$\operatorname{per}(\varepsilon(i,j) a_{ij}) \equiv \det(a_{ij})?$$

4. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей и пусть $a \in R$.

а) Покажите, что если a имеет левый обратный и не имеет правого обратного, то a имеет по крайней мере два левых обратных.

б) Возможно ли существование элемента, имеющего в точности два левых обратных?

5. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ — два различных множества натуральных чисел, таких, что наборы чисел

$$a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n \text{ (все суммы } a_i + a_j,\ 1 \le i < j \le n) \text{ и}$$
$$b_1 + b_2, b_1 + b_3, \dots, b_{n-1} + b_n \text{ (все суммы } b_i + b_j,\ 1 \le i < j \le n)$$

совпадают с точностью до перестановки. Докажите, что n является степенью двойки.

6. Пусть $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = 0.$$

Докажите, что существует такое число $a \in (0, 1)$, что

$$a f(a) = \int_0^a x f(x) dx.$$

Время написания – 4 астрономических часа.

Пользование справочной литературой и калькулятором запрещено.

Решение каждой задачи должны быть приведено на отдельном листе с указанием её номера.

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

Решения

1. Имеем $7n^2 \geq m^2+1$. Отсюда $7n^2 \geq m^2+3$ (так как -1, -2 не являются квадратами $\mod 7$). Таким образом,

$$7 \geq \frac{m^2+3}{n^2} = \left(\frac{m}{n}+\frac{1}{mn}\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2n^2}\right) \geq \left(\frac{m}{n}+\frac{1}{mn}\right)^2.$$

2. Обозначим искомый интеграл I.

1) С помощью ортогональной замены координат приведём матрицу A к диагональному виду $A = \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$, где все $\lambda_i > 0$. Как следствие,

$$I = \iiiint\limits_{\sum\limits_{i=1}^{4}\lambda_i x_i^2 \leq 1} e^{\sum\limits_{i=1}^{4}\lambda_i x_i^2} dx_1dx_2dx_3dx_4.$$

2) Сделав замену переменных $\sqrt{\lambda}x_i = y_i$, получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{\det A}}\iiiint\limits_{\sum\limits_{i=1}^{4} y_i^2 \leq 1} e^{\sum\limits_{i=1}^{4} y_i^2} dy_1dy_2dy_3dy_4, \qquad \text{где } \det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4.$$

3) Перейдя к координатам $y_1 = r_1\cos\varphi_1, y_2 = r_1\sin\varphi_1, y_3 = r_2\cos\varphi_2, y_4 = r_2\sin\varphi_2$, получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{\det A}}\iint\limits_{r_1^2+r_2^2\leq 1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{r_1^2+r_2^2}\ r_1r_2\ dr_1dr_2d\varphi_1d\varphi_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}}\iint\limits_{t_1+t_2\leq 1,\ t_1\geq 0,\ t_2\geq 0} e^{t_1+t_2}dt_1dt_2 = \frac{\pi^2(e-1)^2}{2\sqrt{\det A}}.$$

3. Только для $n=1$ и $n=2$.

Случай $n=1$ тривиален. При $n=2$ возьмём $\varepsilon(1,1)=\varepsilon(2,1)=\varepsilon(2,2)=1$, $\varepsilon(1,2)=-1$.

Покажем, что при $n\geq 3$ такой функции не существует. Достаточно доказать это для $n=3$. Случай $n>3$ сводится к случаю $n=3$ рассмотрением прямой суммы матриц 3-го порядка и единичной матрицы порядка $n-3$.

Предположим, что при $n=3$ такая функция ε существует. Тогда число минусов, приписываемых элементам каждого слагаемого перманента, соответствующем чётной подстановке, должно быть чётным (чтобы в произведении давать 1). Таким образом, общее число минусов в таких слагаемых должно быть чётным.

С другой стороны, число минусов в каждом слагаемом, соответствующем нечётной подстановке, должно быть нечётным (чтобы в произведении давать -1). Общее число минусов в таких слагаемых должно быть нечётных, так как их всего 3.

Однако, в слагаемых, соответствующих чётным подстановкам, и в слагаемых, соответствующих нечётным подстановкам, должно быть одинаковое число минусов, поскольку каждая переменная a_{ij} входит в них одинаковое число раз. Противоречие.

4. а) Пусть $b\in R$ — левый обратный для a, и пусть $c = 1-ab$. Тогда $c\neq 0$, поскольку a не имеет правого обратного. Элемент $b+c$ будет другим левым обратным для a:

$$(b+c)a = (b+1-ab)a = 1+a-a = 1.$$

б) Рассмотрим множество левых обратных $B = \{b \in R : ba = 1\}$, $B \neq \varnothing$, и пусть $b_0 \in B$ — фиксированный элемент этого множества. Функция $f : B \to B$, $f(b) = ab - 1 + b_0$ будет инъективной, но не сюръективной. В самом деле,

$$f(b) = f(b') \implies ab = ab' \implies b = b' \text{ (достаточно умножить слева на } b).$$

С другой стороны, $b_0 \notin f(B)$. Если бы $b_0 \in f(B)$, тогда бы $ab = 1$ и a, являясь обратимым элементом, должен был бы иметь единственный левый обратный, что противоречит предположению.

Для любого отображения из конечного множества в себя свойства инъективности и сюръективности эквивалентны. Поскольку это не так для отображения $f : B \to B$, то множество B должно быть бесконечным.

5. Ассоциируем с множествами A и B многочлены $P_A(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i}$ и $P_B(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{b_i}$, соответственно. Тогда

$$[P_A(x)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2 \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} x^{a_i + a_j} = P_A(x^2) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} x^{a_i + a_j}.$$

Аналогично,

$$[P_B(x)]^2 = P_B(x^2) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} x^{b_i + b_j}.$$

Из условия задачи следует, что

$$\sum_{1 \le i < j \le n}^{n} x^{a_i + a_j} = \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} x^{b_i + b_j}.$$

Следовательно,

$$[P_A(x)^2] - [P_B(x)]^2 = P_A(x^2) - P_B(x^2).$$

Поскольку множества A и B различны, $P_A(x) - P_B(x) \neq 0$. Поэтому имеем

$$P_A(x) + P_B(x) = \frac{P_A(x^2) - P_B(x^2)}{P_A(x) - P_B(x)}.$$

Так как $P_A(1) = P_B(1) = n$, то получаем, что $x = 1$ — корень многочлена $P_A(x) - P_B(x)$, т.е. $P_A(x) - P_B(x) = (x-1)^k F(x)$, где $F(1) \neq 0$. Тогда $P_A(x^2) - P_B(x^2) = (x^2-1)^k F(x^2)$. Следовательно,

$$P_A(x) + P_B(x) = \frac{(x^2-1)F(x^2)}{(x-1)^k F(x)} = \frac{(x+1)^k F(x^2)}{F(x)}.$$

Полагая $x = 1$, получим $2n = P_A(1) + P_B(1) = \dfrac{2^k F(1)}{F(1)} = 2^k$, откуда $n = 2^{k-1}$.

6. Пусть $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $G(x) = \int_0^x tf(t)dt$, $H(x) = \dfrac{G(x)}{x} - F(x)$, $x \in (0,1]$. Отметим, что $H(0+) = \lim_{x \to 0+} H(x) = G'(0) - F(0) = 0$. Так как $H(0+) = H(1) = 0$, то существует такое $b \in (0,1)$, что $H'(b) = 0$. Так как $H'(x) = -\dfrac{G(x)}{x^2}$, то $G(b) = 0$. Пусть $K(x) = e^{-x}G(x)$. Тогда существует такое $a \in (0,b)$, что $K'(a) = 0$, т.е. $G(a) = G'(a)$.