Белорусская республиканская студенческая олимпиада по математике

14 мая 2019 г.

1. Пусть $f(x) = \cos^3(x)$. Доказать, что для любого действительного x для k-й производной выполняется оценка
$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{3^k + 3}{4}.$$

2. Рассмотрим два утверждения:

а) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ – непрерывная функция такая, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty$. Тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

б) $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ – непрерывная функция такая, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty$. Тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Одно из этих утверждений верно, а другое не верно. Приведите контрпример к неверному утверждению, а верное докажите.

3. Множество квадратных матриц $M_n(\mathbb{R})$ размером $n \times n$ образует векторное пространство размерности n^2 с операциями обычного сложения матриц и умножения их на число. Найдите размерность подпространства V, порождённого множеством
$$\{AB - BA : A, B \in M_n(\mathbb{R})\}.$$

4. Пусть f – такая дифференцируемая на отрезке $[0, 1]$ функция, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Покажите, что любое натуральное число n представимо в виде
$$n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)},$$
где $x_1, x_2, ..., x_n$ – различные точки из $[0, 1]$.

5. Пусть $n \geq 2$. Сколько существует последовательностей из нулей и единиц длины n, в которых встречаются две подряд идущие единицы?

6. Обозначим через A множество всех натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит нулей.

а) Сходится ли ряд $\sum\limits_{n \in A} \frac{1}{n}$?

б) Найти все такие действительные $\alpha > 0$, что $\sum\limits_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится.

Время написания 4 астрономических часа.
Черновики следует пометить словом черновик.
Решения разных задач следует сдавать на отдельных листах с указанием номера задачи.

Решения

1. Поскольку $f(x) = \dfrac{3\cos x + \cos(3x)}{4}$, то для чётных $k = 2m$ и нечётных $k = 2m+1$ имеем

$$f^{2m}(x) = \frac{3(-1)^m \cos x + 3^{2m}(-1)^m \cos(3x)}{4}, \quad f^{2m+1}(x) = \frac{3(-1)^{m+1} \sin x + 3^{2m+1}(-1)^{m+1} \sin(3x)}{4}.$$

Отсюда вытекает требуемая оценка.

2. Утверждение б) неверно. Рассмотрим $f(x) = 1/$. Тогда $f(f(x)) = x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty$, но $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Предположим, что а) неверно. Тогда существует $C > 0$ и последовательность $x_n \to +\infty$, для которых $f(x_n) \in [0, C]$. Так как f непрерывна, то она ограничена на отрезке $[0, C]$, т.е. существует $M > 0$ для которого $f(f(x)) \le M$ для всех $f(x) \in [0, C]$. В частности $f(f(x_n)) \le M$, что противоречит условию $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty$.

3. Имеем $V \subset \{X : \mathrm{tr} X = 0\}$, поэтому $\dim V \le n^2 - 1$.

С другой стороны, при $i \ne j$ рассмотрим матрицу $E_{ij} \in V$ (элементы матрицы E_{ij} всюду нулевые за исключением элемента в строке i и столбце j, равного 1). Тогда

$$E_{ij} = E_{ij}E_{jj} - E_{jj}E_{ij} \in V.$$

Далее рассмотрим для строчек и столбцов с номерами $i \in \{1, ..., n\}$, $j = n$, минор

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

что после дополнения нулями даёт ещё $n-1$ матрицу из V, линейно независимую с прочими.

Ответ. $n^2 - 1$.

4. Для заданного n всегда существует наименьшее число c_i такое, что $f(c_i) = i/n$ (по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции). Тогда $0 < c_1 < c_2 < ... < c_{n-1} < 1$. Положим по определению $c_0 = 0, c_n = 1$.

Для каждого интервала (c_{i-1}, c_i) найдётся такое $x_i \in (c_{i-1}, c_i)$, что

$$f'(x_i) = \frac{f(c_i) - f(c_{i-1})}{c_i - c_{i-1}} = \frac{i/n - (i-1)/n}{c_i - c_{i-1}} = \frac{1}{n(c_i - c_{i-1})}.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} n(c_i - c_{i-1}) = n.$$

5. Рассмотрим последовательности *без* идущих подряд единиц. Пусть S_n – их количество.

Если первый элемент последовательности – нуль, то второй может быть каким угодно. Если первый элемент последовательности – единица, то второй обязательно нуль. Таким образом

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \quad \text{для } n \geq 4,$$

т.е. S_n удовлетворяет рекуррентному соотношению Фибоначчи.

Учитывая первые значения $S_2 = 3$, $S_3 = 5$, видим, что $S_n = F_{n+2}$. Используя стандартный подход к линейным рекуррентным последовательностям, имеем

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Ответ.

$$2^n - F_{n+2} = 2^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right).$$

Замечание. Стандартный подход для работы с рекуррентными последовательностями:

https://ru.wikipedia.org/wiki/Линейная_рекуррентная_последовательность

6. а) k-Значное число $n \in A$ записывается в виде

$$n = a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad a_i \in \{1, 2, ..., 9\}.$$

Всего имеется 9^k таких чисел, причём любое из них $\geq 10^{k-1}$. Следовательно,

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9^k}{10^{k-1}} = 90.$$

б) Аналогично с пунктом а) имеем

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9^k}{10^{\alpha(k-1)}}.$$

Поэтому при $\alpha > \log_{10} 9$ ряд сходится.

С другой стороны,

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha} > \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9^k}{(10^k-1)^\alpha} > \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9^k}{10^{k\alpha}},$$

откуда видим, что при $\alpha \leq \log_{10} 9$ ряд $\sum\limits_{n \in A} \dfrac{1}{n^\alpha}$ расходится.

Ответ. $\alpha \in (\log_{10} 9, +\infty)$.