О КЛАССИФИКАЦИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННОЙ С НОРМАЛИЗОВАННЫМ ПОТОКОМ РИЧЧИ

Н.А. Абиев[1]

[1]Таразский государственный университет им. М.Х.Дулати, Толе би 60, 080000 Тараз, Казахстан

abievn@mail.ru

Авторы [1,2] изучали нормализованный поток Риччи $\partial_t g(t) = -2\,\mathrm{Ric}_g + 2g(t)S_g n^{-1}$ на обобщенных пространствах Уоллаха размерности n, где Ric_g и S_g означают соответственно форму кривизны Риччи и скалярную кривизну 1-параметрического семейства римановых метрик $g(t)$ на рассматриваемом пространстве. Как установлено в [1], на обобщенных пространств Уоллаха нормализованный поток Риччи сводится к динамической системе

$$\dot{x}_i = F_i := -2x_i\left(\mathbf{r_i} - \left(\mathbf{r_1}a_1^{-1} + \mathbf{r_2}a_2^{-1} + \mathbf{r_3}a_3^{-1}\right)\left(a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1}\right)^{-1}\right), \quad i = 1,2,3, \qquad (1)$$

относительно параметров $x_i = x_i(t) > 0$ инвариантной римановой метрики, где $\mathbf{r_i}$ означают главные значения кривизны Риччи этой метрики и вычисляются по формулам $\mathbf{r_i} = \frac{1}{2x_i} + \frac{a_i}{2}\left(\frac{x_i}{x_j x_k} - \frac{x_k}{x_i x_j} - \frac{x_j}{x_i x_k}\right)$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$; действительные числа $a_1, a_2, a_3 \in (0, 1/2]$ являются параметрами обобщенного пространства Уоллаха (см. детали в [3,4]). Отметим, что классификация обобщенных пространств Уоллаха получена в [5]. В работе [1] также показано, что функция объема $V := x_1^{1/a_1} x_2^{1/a_2} x_3^{1/a_3}$ является первым интегралом (1), поэтому на поверхности $V \equiv 1$ систему (1) можно заменить системой

$$\dot{x}_1 = f_i(x_1, x_2), \quad i = 1,2, \qquad (2)$$

где $f_i(x_1,x_2) \equiv F_i(x_1, x_2, \varphi(x_1,x_2))$, $\varphi(x_1,x_2) = x_1^{-a_3/a_1} x_2^{-a_3/a_2}$. Особая точка (точка покоя) системы (2) называется *вырожденной*, если вырождена матрица Якоби J системы в этой точке. Такая точка может иметь типы: *полу-гиперболический* (J имеет только одно нулевое собственное значение); *нильпотентный* (оба собственные значения J равны нулю, но $J \neq 0$); *линейно нулевой* ($J = 0$).

В работах [1,2] были получены классификационные результаты относительно типов особых точек системы (2) при предположениях $a_i \in (0, 1/2]$, $i = 1,2,3$. В данной заметке мы утверждаем, что результат теоремы 1 из [1] и результаты первых двух пунктов теоремы 5 из [2] сохраняют свою силу и в более общем случае параметров a_i:

Теорема. *Пусть* $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ *и* $\mathcal{A} := a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \neq 0$. *Тогда система* (2) *не имеет особых точек нильпотентного типа и допускает особую точку линейно нулевого типа в том и только в том случае, если* $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$.

Как следствие, при $a_i \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \neq 0$ и $(a_1, a_2, a_3) \neq (1/4, 1/4, 1/4)$, вырожденные особые точки системы (2) являются полу-гиперболическими.

Замечание. В общем случае $a_i \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \neq 0$, утверждение третьего пункта теоремы 5 из [2], гарантирующее отсутствие у системы (2) фокусов и центров (как вырожденных, так и невырожденных), является неверным.

Литература

1. Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P. *The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces* // Differ. Geom. Appl. 2014. V. 35. P. 26–43.

2. Абиев Н. А., Арванитойоргос А., Никоноров Ю. Г., Сиасос П. *Нормализованный поток Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха* // Мат. форум. 2014. Т. 8. №4. С. 25–42.

3. Никоноров Ю. Г. *Об одном классе однородных компактных многообразий Эйнштейна* // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, №1. С 200–205.

4. Ломшаков А. М., Никоноров Ю. Г., Фирсов Е. В. *Инвариантные метрики Эйнштейна на три-локально-симметрических пространствах* // Мат. труды. 2003. Т. 6, №2. С. 80–101.

5. Nikonorov Yu. G. *Classification of generalized Wallach spaces* // Geom. Dedicata. 2016. V. 181. №1. P. 193–212.