Министерство образования Республики Беларусь

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе

____

В.Г.Сафонов

31.05.2018

ПРОГРАММА

вступительного экзамена в аспирантуру по специальности

01.01.04 «Геометрия и топология»

Минск, 2018

СОСТАВИТЕЛИ:

Д.Г.Медведев, декан механико-математического факультета, кандидат физ.-мат.наук, доцент;

В.В.Беняш-Кривец, заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации, доктор физ.-мат. наук, профессор;

В.И.Янчевский. профессор кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики, доктор физ.-мат. наук, профессор, академик НАН Б;

С.М.Агеев, профессор кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики, доктор физ.-мат. наук, профессор;

В.В.Балащенко, профессор кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики, доктор физ.-мат. наук, профессор;

С.Г.Кононов доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики, кандидат физ.-мат. наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации (протокол № 9 от 18 апреля 2018 г.)

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики (протокол № 8 от 4 апреля 2018 г.)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета Белорусского государственного университета (протокол № 7 от 29 мая 2018 г.)

Ответственный за редакцию С.Г.Кононов

Ответственный за выпуск С.Г.Кононов

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

На вступительном экзамене в аспирантуру по специальности 01.01.04 – геометрия и топология поступающий должен

знать:

– определения математических понятий, участвующих в формулировках теорем, которые он излагает;

– точные формулировки математических теорем;

– формулировки лемм и теорем, используемых при доказательствах.

уметь:

– применять теорию к решению задач и иллюстрировать определения математических понятий и формулировки теорем простыми примерами;

– проверять выполнимость условий теорем, применяемых при доказательствах.

Члены экзаменационной комиссии могут предлагать студенту в качестве дополнительных вопросов разбор простых примеров, определения и формулировки теорем из программы.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

РАЗДЕЛ I. Алгебра

Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Операции над комплексными числами. Извлечение корня n-ной степени из комплексного числа.

Матрицы. Операции над матрицами. Определитель квадратной матрицы, свойства определителя. Обратная матрица. Характеристический и минимальный многочлен матрицы. Жорданова клетка, жорданова нормальная форма матрицы.

Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Формулы Крамера. Однородные системы. Фундаментальная система решений.

Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Координаты вектора. Матрица перехода от одного базиса к другому. Подпространство. Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма и дополнение подпространств.

Линейный оператор, его ядро и образ. Ранг и дефект. Матрица линейного оператора. Алгебраические операции над линейными отображениями. Собственные значения и собственные векторы.

Билинейные, полуторалинейные и квадратичные формы. Симметрические, кососимметрические билинейные формы. Ранг формы. Матрица формы. Канонический вид квадратичной формы. Положительный и отрицательный индекс инерции, сигнатура квадратичной формы. Знакоопределенные квадратичные формы.

Евклидовы и унитарные пространства. Скалярное произведение. Длина вектора. Угол между векторами в евклидовом пространстве. Ортогональные векторы. Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональное дополнение к подпространству. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства. Сопряженный оператор. Унитарные и самосопряженные операторы.

Группа, подгруппа. Циклическая подгруппа. Порядок элемента группы. Нормальная подгруппа, факторгруппа. Смежный класс. Индекс подгруппы. Гомоморфизм и изоморфизм групп. Ядро гомоморфизма.

Кольцо, идеал кольца, факторкольцо. Поле, характеристика поля.

РАЗДЕЛ II. Аналитическая геометрия

Понятие вектора в $\mathbf{E}^3$. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базисы и аффинные реперы, координаты векторов и точек. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Уравнения прямых и плоскостей в $\mathbf{E}^2$ и $\mathbf{E}^3$. Эллипсы, гиперболы, параболы. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды. Фигуры второго порядка в $\mathbf{E}^2$ и $\mathbf{E}^3$.

Аффинное пространство $\mathbf{A}^n$. k-мерные плоскости в $\mathbf{A}^n$, уравнения плоскостей. Взаимное расположение плоскостей в $\mathbf{A}^n$, характеристика пары плоскостей. Аффинные преобразования. Аффинная группа и аффинная геометрия.

Евклидово точечное пространство $\mathbf{E}^n$. Ортогональные плоскости, расстояние от точки до плоскости, расстояние между плоскостями. Движения евклидова пространства. Группа движений и евклидова геометрия.

Фигуры второго порядка в пространствах $\mathbf{A}^n$ и $\mathbf{E}^n$.

РАЗДЕЛ III. Топология

Метрические и топологические пространства. Замыкание, внутренность и граница множества в метрическом и топологическом пространствах. Полные метрические пространства. Подпространство топологического пространства, индуцированная топология. Произведение топологических пространств. Непрерывные отображения. Гомеоморфизмы.

Компактные пространства. Критерии компактности метрического пространства. Связные пространства. Связная компонента топологического пространства. Линейно связные пространства.

РАЗДЕЛ IV. Дифференциальная геометрия

Понятие кривой. Натуральная параметризация кривой. Касательная прямая и соприкасающаяся плоскость кривой. Репер Френе. Формулы Френе. Кривизна кривой. Кручение кривой. Теорема существования и единственности для кривых.

Понятие поверхности. Кривые на поверхности. Касательная плоскость к поверхности. Гладкие отображения поверхностей. Сферическое отображение. Основной оператор поверхности. Первая фундаментальная форма поверхности. Внутренняя геометрия поверхности. Вторая фундаментальная форма поверхности. Нормальная кривизна поверхности. Полная и средняя кривизны поверхности. Типы точек на поверхности. Теорема существования и единственности для поверхностей. Геодезические линии на поверхности, линии кривизны и асимптотические линии.

Атласы, гладкие структуры. Определение и примеры гладких многообразий. Гладкие функции на многообразии. Алгебра гладких функций. Гладкие отображения многообразий, диффеоморфизм. Касательный вектор и касательное пространство к многообразию в точке. Натуральный базис касательного пространства. Дифференциал гладкого отображения многообразий. Гладкие векторные поля на многообразии. Векторные поля в координатной окрестности. Алгебра Ли гладких векторных полей.

РАЗДЕЛ V. Математический анализ

Вещественные числа. Точные границы числовых множеств. Различные формы полноты множества вещественных чисел. Последовательности и пределы последовательностей. Предел монотонной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

Определение предела функции одной вещественной переменной в точке. Определение непрерывности функции в точке. Понятие равномерной непрерывности. Определение производной и дифференциала функции одной вещественной переменой. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Определение интеграла Римана. Интегрируемость непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Понятие числового ряда. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов.

Понятие дифференцируемости функций многих переменных. Матрица Якоби. Теорема о неявной и обратной функции. Экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие, достаточные условия существования экстремума. Условный экстремум функций многих переменных.

Определение интеграла Римана на евклидовых пространствах. Определение криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода. Определение поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода. Формулы Грина, Стокса и Гаусса-Остроградского.

РАЗДЕЛ VI. Группы Ли, алгебры Ли и элементы алгебраической топологии

Фундаментальная группа топологического пространства. Классификация двумерных поверхностей. Теорема Брауэра о неподвижной точке.

Алгебры Ли, подалгебры Ли и идеалы. Гомоморфизмы алгебр Ли. Линейные представления алгебр Ли.

Определение и примеры групп Ли. Гомоморфизмы групп Ли. Специальные отображения в группе Ли (левый сдвиг, правый сдвиг, внутренний автоморфизм). Левоинвариантные векторные поля на группе Ли. Алгебра Ли группы Ли, ее геометрическая реализация.

Гладкие G-пространства, орбиты, однородные пространства. Однородное фактор-пространство группы Ли по замкнутой подгруппе.

ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Алгебра

1. Поле комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.

2. Кольцо многочленов от одной переменной. Корень многочлена, теорема Безу, кратность корня. Неприводимые многочлены над $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$. Теорема о разложении многочлена в произведение неприводимых многочленов.

3.Матрицы и алгебраические операции над ними. Ранг матрицы и его основные свойства. Обратная матрица, критерий существования и методы ее вычисления. Жорданова нормальная форма матрицы.

4. Определители, их основные свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по элементам строки (столбца). Определитель произведения квадратных матриц.

5. Системы линейных алгебраических уравнений. Критерий совместности. Метод Гаусса и правило Крамера. Размерность и базис пространства всех решений однородной системы линейных уравнений.

6. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса. Подпространства и операции над ними: пересечение, сумма, прямая сумма.

7. Линейный оператор, его ядро и образ. Матрица линейного оператора. Матрица суммы и композиции линейных операторов. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы.

8. Билинейные, квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Канонический вид квадратичной формы над $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$. Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

9. Понятие группы, подгруппы, примеры. Нормальная подгруппа, фактор-группа. Теорема Лагранжа. Гомоморфизм и изоморфизм групп. Основная теорема о гомоморфизмах групп.

10. Понятие кольца, поля, подкольца, подполя, примеры. Идеал, фактор-кольцо. Гомоморфизм и изоморфизм колец. Основная теорема о гомоморфизмах колец.

Аналитическая геометрия

11. Векторы в $\mathbf{E}^3$, скалярное, векторное и смешанное произведения.

12. Различные виды уравнений прямой и плоскости в $\mathbf{E}^2$ и в $\mathbf{E}^3$.

13. Эллипс, гипербола, парабола, их уравнения и свойства. Классификация кривых второго порядка в $\mathbf{E}^2$.

14. Аффинные пространства $\mathbf{A}^n$. Плоскости в $\mathbf{A}^n$ и их уравнения. Взаимное расположение двух плоскостей.

15. Евклидовы точечные пространства $\mathbf{E}^n$. Ортогональность плоскостей в $\mathbf{E}^n$. Расстояние между плоскостями в $\mathbf{E}^n$.

Топология

16. Топологическое пространство. Способы задания топологий, сравнение топологий. Внутренность, замыкание, граница множества в топологическом пространстве.

17. Непрерывные отображения топологических пространств и их свойства. Гомеоморфизм.

18. Компактные и связные топологические пространства. Критерии компактности метрического пространства.

Дифференциальная геометрия

19. Кривые в $\mathbf{E}^2$ и в $\mathbf{E}^3$ и способы их задания. Натуральная параметризация кривой.

20. Кривизна и кручение кривой, их геометрический смысл. Формулы Френе.

21. Поверхности в $\mathbf{E}^3$ и способы их задания. Первая фундаментальная форма поверхности и задачи, решаемые с ее помощью.

22. Нормальная кривизна поверхности. Вторая фундаментальная форма поверхности. Полная (гауссова) кривизна.

23. Определение и примеры гладких многообразий. Гладкие функции на многообразии. Гладкие отображения многообразий,

24. Дифференциал гладкого отображения многообразий.

25. Гладкие векторные поля на многообразии. Алгебра Ли гладких векторных полей.

Математический анализ

23. Вещественные числа и их основные свойства. Поле вещественных чисел $\mathbf{R}$. Важнейшие подмножества в $\mathbf{R}$ и их мощность. Теорема Кантора о несчетности множества вещественных чисел.

24. Предел последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности. Теорема о пределе монотонной последовательности. Число Эйлера.

25. Формула Тейлора.

26. Определение интеграла Римана для функций одной переменной. Необходимое условие интегрируемости. Классы интегрируемых функций.

27. Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом. Существование первообразной для непрерывной функции, формула Ньютона-Лейбница.

28. Понятие числового ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды. Критерий Коши сходимости числовых рядов. Признаки сходимости числовых рядов.

29. Дифференцируемые отображения из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$. Матрица Якоби.

30. Локальные экстремумы функций одной и многих переменных. Необходимые и достаточные условия локального экстремума функции.

Группы Ли, алгебры Ли и элементы алгебраической топологии

31. Алгебры Ли, подалгебры Ли и идеалы. Гомоморфизмы алгебр Ли.

32. Определение и примеры групп Ли. Гомоморфизмы групп Ли.

33. Левоинвариантные векторные поля на группе Ли. Алгебра Ли группы Ли.

34. Фундаментальная группа топологического пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. ***Алгебра и аналитическая геометрия***, ч.1 - Мн., Вышэйшая школа,-1984.

2. Милованов М.В., Толкачев М.М.,Тышкевич Р.И., Феденко А.С. ***Алгебра и аналитическая геометрия***, ч.2 - Мн., Вышэйшая школа,-1987.

3. Кононов С.Г., Прасолов А.В., Тимохович В.Л., Тралле А.Е., Феденко А.С.- ***Топология***, - Мн., Вышэйшая школа, - 1990.

4. Белько И.В., Бурдун А.А., Ведерников В.И., Феденко А.С., ***Дифференциальная геометрия,***- Мн., БГУ, - 1982.

5. Кудрявцев Л.Д. ***Курс математического анализа***, - М., Высшая школа, Т.1,2 - 1981 и др. годы издания.

6. Рудин У. ***Основы математического анализа***, - М., Мир, - 1976.

7. Уорнер Ф. ***Основы теории гладких многообразий и групп Ли***. - М., Мир, 1987.

8. Наймарк М.А. ***Теория представлений групп.*** - М., Наука, 1976.